SOPHUS LIE,

GEOMETRIE

DER

BERÜHRUNGSTRANSFORMATIONEN.

DARGESTELLT

VON

SOPHUS LIE UND **GEORG SCHEFFERS.**

ERSTER BAND.

MIT FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1896.

Vorwort.

Zur Einführung in das vorliegende Werk erscheint es mir angebracht, einige Bemerkungen allgemeinerer Natur vorauszuschicken.

Im Laufe der Zeit hat die Stellung der Analysis zur Geometrie und zu den verschiedenen Zweigen der angewandten Mathematik viele und beträchtliche Wandlungen durchgemacht. Während der vergangenen Jahrhunderte hat die gegenseitige Anregung die Einzeldisciplinen erheblich gefördert. Dabei herrschte bald die eine, bald die andere Disciplin vor. Dies letztere liegt in der Natur der Sache und ist an sich nicht zu bedauern. Aber in unserem Jahrhundert hat eine Zersplitterung der Mathematik in viele und dabei sehr umfangreiche einzelne Fächer stattgefunden, und diese Zerteilung hat oft dazu geführt, dass die Vertreter des einen Faches die Wichtigkeit der übrigen Fächer verkannten, sodass sie infolge dessen den von den anderen Fächern ausgehenden befruchtenden Ideen zum Schaden der Entwickelung ihrer eignen Disciplin gleichgültig oder gar abweisend gegenüberstanden.

Es sei gestattet, zur Erläuterung dieser Bemerkungen in knappen Worten an einige Entwickelungsphasen der Mathematik zu erinnern.

Bei den alten *Griechen* war die Geometrie die fast ausschliesslich herrschende Disciplin der Mathematik. Eine abstracte Analysis gab es noch nicht, und selbst die Astronomie und die Mechanik ordneten sich der Geometrie unter. Nach beachtenswerten Ansätzen bei Diophant und bei den *Indern* entwickelte sich erst in der *Renaissancezeit* eine Algebra, ein Formelapparat, dessen Fehlen bei den so scharfsinnigen Griechen stark fühlbar ist.

Alsdann wurde durch die Einführung des Coordinatenbegriffes und durch die Schöpfung der analytischen Geometrie durch Descartes eine epochemachende Verknüpfung zwischen Geometrie und Analysis zustande gebracht, die bald zu dem wahren Fundamentalbegriff der Mathematik, zum Begriff der *Function*, führen sollte. Die im Keime schon in Archimedes' geometrischen Untersuchungen auftretenden Begriffe: Integral und Differentialquotient entwickelten sich nach und nach und zwar, was zu beachten ist, durch die Behandlung *geometrischer*, kinematischer und mechanischer Probleme in den Arbeiten von Kepler, Cavalieri, Descartes, Wallis und namentlich Fermat. Es waren ähnliche Betrachtungen, die Newton und Leibniz dazu führten, das innere Wesen und besonders das gegenseitige Verhältnis dieser beiden Begriffe zu erkennen und damit die Infinitesimalrechnung zu begründen. Denselben geometrisch-mechanischen Ursprung hat dann insbesondere auch die Theorie der Differentialgleichungen sowie die Variationsrechnung gehabt.

Nicht minder charakteristisch, wenn auch weniger beachtet ist es, dass der *Transformationsbegriff*, der in der neueren Mathematik immer stärker hervortritt und sich neben dem Functionsbegriff als ein selbständiger Fundamentalbegriff geltend macht, bei den älteren Geometern, wenn auch natürlich nur in sehr specieller Form, so doch in der Anschauung seinen Ursprung hat. Auch der diesem Begriff nahestehende Begriff: *Differentialinvariante* tritt uns zunächst in der *Geometrie*, nämlich in der Krümmungstheorie entgegen.

Schon diese kurzen Bemerkungen zeigen, dass Geometrie und Mechanik in den früheren Jahrhunderten den mächtigsten Einfluss auf die Entwickelung der Analysis ausgeübt haben. Dass umgekehrt auch die mächtigsten Rückwirkungen von der Analysis auf die Geometrie und die Mechanik ausgingen, liegt auf der Hand und braucht hier nicht weiter erläutert zu werden.

Diese so glückliche Wechselwirkung wurde dadurch gefördert und überhaupt ermöglicht, dass die Einzeldisciplinen verhältnismässig nicht zu umfangreich waren, sodass noch am Schlusse des vorigen Jahrhunderts Euler, Lagrange, Laplace und um die Wende des Jahrhunderts Gauss und dann Cauchy alle Zweige der Mathematik umfassen konnten.

In unserem Jahrhundert ist dies nach und nach anders geworden. Der Umfang der Einzeldisciplinen wuchs in ausserordentlichem Masse, ja es bildeten sich neue selbständige Wissenschaften, wie die mathematische Physik in den Händen von Laplace, Ampère, Fourier, Fresnel, Green, Gauss, Cauchy, Poisson und Lejeune-Dirichlet.

Die Geometrie, die im vorigen Jahrhundert durch Euler und Monge in neue Bahnen geleitet worden war, nahm ebenfalls einen mächtigen Aufschwung, indem auf der einen Seite durch Carnot, Brianchon und insbesondere durch Poncelet die *projective* Geometrie als selbständige Disciplin begründet und dann von Möbius, Plücker, Chasles und Steiner weiter entwickelt und auf der anderen Seite durch Gauss' Theorie des Krümmungsmasses und Minding's sich daran anschliessende Ergebnisse die Infinitesimalgeometrie mit neuen bahnbrechenden Ideen bereichert wurde. Beide Richtungen trugen wesentlich zur Entwickelung der Cayley'schen Invariantentheorie bei.

Noch mächtiger war der Aufschwung der Analysis in den zwanziger und dreissiger Jahren unseres Jahrhunderts. Schon Lagrange's und noch mehr Gauss' und Cauchy's Untersuchungen brachten nicht nur viele neue und wichtige Ergebnisse, sondern zeichneten sich vor allem auch durch eine vollendete Form und namentlich durch eine classische Strenge aus, die im vorigen Jahrhundert bei so vielen bedeutenden Mathematikern fehlte. Es war aber in erster Linie Abel, der durch seine umfassenden Probleme, seine grossen, tiefen Entdeckungen und seine logische Schärfe die neue Epoche inaugurierte. Auch hat Abel's lichtvolle Darstellung seiner neuen Theorien wesentlich dazu beigetragen, den Mathematikern das Erfassen von Cauchy's Imaginärtheorie und besonders von Galois' ebenso tiefen wie schwerverständlichen algebraischen Untersuchungen zu ermöglichen.

Es ist wahr, dass Abel und sein Nachfolger Galois sich in ihrer kurzen Laufbahn kaum mit Geometrie beschäftigten. Um so merkwürdiger ist es, dass gerade Abel's Ideen die Geometrie mit weiten neuen Gesichtspunkten bereichert haben, sowie, dass Galois' Ideen schon anfangen, einen ähnlichen Einfluss zu üben.

Die hier nur angedeuteten bahnbrechenden Entdeckungen gaben der Analysis, der Geometrie und der mathematischen Physik einen so grossen Inhalt und eine solche Ausdehnung, dass es wohl für den Einzelnen unmöglich geworden ist, die gesamte Mathematik zu umfassen, denn selbst Jacobi und Riemann ist dies kaum vollständig gelungen.

Riemann, der von Gauss und Jacobi beeinflusst war, wenn er auch wohl eher als Nachfolger von Cauchy und Abel zu betrachten ist, wusste die Hülfsmittel der Geometrie in grossartiger Weise für die Analysis zu verwerten. Mag es auch sein, dass sein überraschender mathematischer Instinct ihm zuweilen sofort lieferte, was seine Zeit ihm noch nicht erlaubte, durch rein logische Betrachtungen definitiv zu begründen, so sind doch seine glänzenden Ergebnisse das beste Zeugnis für die Fruchtbarkeit seiner Methoden.

Weierstrass, Riemann's Zeitgenossen, möchte ich ebenso als Nachfolger Abel's bezeichnen und zwar nicht allein wegen der Richtung seiner Untersuchungen, sondern noch mehr wegen seiner rein analytischen Methode, in der er die Anschauung als Hülfsmittel zu vermeiden bestrebt ist. So hervorragend auch Weierstrass' Leistungen für die Grundlagen und für die höchsten Gebiete der Analysis sind, so erscheint es doch auch mir, als ob seine einseitige Betonung der Analysis jedenfalls auf einige seiner Schüler einen nicht unbedingt günstigen Einfluss geübt habe. Ich glaube mich in dieser Auffassung an die Seite Klein's zu stellen, der selbst es so gut verstanden hat, nach Riemann's Vorbild aus der Anschauung fruchtbare Anregungen für die Analysis zu entnehmen.

Unter allen Umständen ist es bedauerlich, dass die so grosse Entwickelung der Analysis in Deutschland in den letzten Jahrzehnten nicht von entsprechenden Fortschritten der Geometrie begleitet wurde. Hervorragende deutsche Geometer wie Möbius, Plücker, v. Staudt und Grassmann fanden zu ihrer Zeit nicht die richtige Würdigung von Seiten der dazu berufenen Stelle.

Die Zersplitterung der Mathematik hat, wie oben angedeutet wurde, auf die Vertreter der einzelnen Disciplinen oft eine ungünstige Wirkung geübt. Während nämlich einige Geometer so weit gehen, es als geradezu verdienstvoll zu betrachten, bei der Behandlung geometrischer Probleme auf die Hülfsmittel der Analysis vollständig, richtiger gesagt in möglichst grosser Ausdehnung zu verzichten, findet man wohl andererseits unter den Analytikern hier und da die Auffassung, dass die Analysis nicht allein unabhängig von der Geometrie entwickelt werden *könne*, sondern auch *müsse*, da nach ihrer Ansicht Beweise analytischer Sätze durch geometrische Betrachtungen nicht unbedingt zuverlässig sind.

In meinen wissenschaftlichen Bestrebungen bin ich immer von der Auffassung ausgegangen, dass es im Gegenteil wünschenswert ist, dass sich Analysis und Geometrie ebenso wie früher auch in unserer Zeit gegenseitig stützen und mit neuen Ideen bereichern. Diese Auffassung war im Jahre 1886 das Thema meiner Antrittsvorlesung an der Universität Leipzig.

Diese meine Auffassung versuche ich seit mehr als fünfundzwanzig Jahren durch eigene Arbeiten zur Geltung zu bringen. Charakteristisch für meine Richtung dürfte es besonders sein, dass ich nach dem Vorbilde von Monge die geometrischen Begriffe, namentlich die von Poncelet und Plücker eingeführten, für die Analysis verwertet und andererseits Lagrange's, Abel's und Galois' Ideen über die Behandlung der algebraischen Gleichungen auf die Geometrie und besonders auf die Theorie der Differentialgleichungen ausgedehnt habe.

Das Werk, dessen erster Band hier vorliegt, bringt eine ausführliche Darstellung meiner ersten geometrischen Arbeiten aus den Jahren 1869 bis 72. Unter diesen ist die meist bekannte die im Jahre 1872 in den Math. Ann., 5. Band, S. 145, erschienene Abhandlung: „*Über Complexe, insbesondere Linien- und Kugelcomplexe mit Anwendung auf die Theorie partieller Differentialgleichungen*“, die fast alle diese Untersuchungen zusammenfasst. Dabei möchte ich hervorheben, dass sich diese Abhandlung im Wesentlichen mit einer ein Jahr früher in den Verh. der Ges. d. Wiss. zu Christiania erschienenen Arbeit in zwei Teilen deckt, von denen leider der erste Teil als Habilitationsschrift in norwegischer Sprache abgefasst ist. Eine vollständige Zusammenstellung meiner wichtigsten Ergebnisse wurde aber schon im October 1870 der Ges. der Wiss. zu Christiania mitgeteilt unter dem Titel: „*Om en Classe geometriske Transformationer*“, was ich aus verschiedenen Gründen hervorheben möchte.

Auf den Inhalt des vorliegenden Bandes gedenke ich hier nicht näher einzugehen; ich verweise vielmehr auf das Werk selbst und bemerke nur, dass besonderes Gewicht darauf gelegt wurde, die Beziehungen zu meinen Vorgängern nach bester Überzeugung in die richtige Beleuchtung zu stellen. Dagegen lag kein Anlass vor, auf die Beziehungen zu meinen Nachfolgern schon in diesem Bande näher einzugehen.

Ich bin besonders glücklich darüber, dass Herr Scheffers dazu bereit war, mit mir zusammen meine Geometrie der Berührungstransformationen zu redigieren.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass bei der Redaction des Werkes der Versuch gemacht worden ist, dem Vortrag eine solche Form zu geben, die nicht allein für Mathematiker von Fach, sondern auch für Studenten, welche die grundlegenden mathematischen Vorlesungen mit Nutzen gehört haben, passend erscheinen kann. Die in kleinerem Satz gegebenen Entwickelungen können bei dem Studium dieses Bandes überschlagen werden, ohne dass dadurch die Verständlichkeit des Haupttextes beeinträchtigt wird.

Leipzig, im Februar 1896.

Sophus Lie.

Inhaltsverzeichnis*).

Abschnitt I.

*) Ein *alphabetisch geordnetes Sachregister* sowie ein *Namenverzeichnis* befindet sich am Schluss dieses Bandes.

Abschnitt II.

Berichtigungen.

Seite 12, Z. 4 d. Anmerkung lies in der letzten Formel zum Schluss y' statt y.
- 13, - 6 v. u. lies in der letzten Formel Y_x statt Y.
- 32, - 3 v. u. ist „vielleicht" zu streichen.
- 47, - 1 v. u. lies zum Schluss y' statt y_1'.
- 61, - 18 v. o. lies „Beispiels" statt „Paragraphen".
- 66, Fussnote lies Bd. 23, S. 1, 1884.
- 92 ist die Formelnummer (7) zu streichen.
- 93, Z. 7 u. 8 v. o. lies p statt z.
- 97, - 14 u. 16 v. u. lies überall p_0 statt p.
- 158 in der zweiten Formel (52) lies v statt dv.
- 223, Z. 10 v. u. lies „übergeführt" statt „überführt".
- 265, Fussnote. Vgl. hierzu die Berichtigung i. d. 1. Fussnote auf S. 518.
- 272, 2. Fussnote, letzte Zeile lies 1837 statt 1827.
- 277 ist η bez. η' überall durch $-\eta$ bez. $-\eta'$ zu ersetzen.
- 321, Z. 23 v. o. lies „diesen" statt „diese".
- 323, - 5 v. u. lies „géométriques".
- 337, letzte Zeile d. Anm. ist das Citat zu ersetzen durch: § 5 des 8. Kap.
- 493, Z. 19 v. u. lies „Dann" statt „Denn".
- 508, - 6 v. o. lies „gewöhnlichen" statt „totalen".

Abschnitt I.

Berührungstransformationen der Ebene.

In grossen Zügen deuten wir hier an, was der erste Abschnitt enthält: Wir entwickeln zuerst den allgemeinen Begriff einer *Berührungstransformation in der Ebene* oder zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit und zeigen, wie man alle derartigen Transformationen finden kann. Wir legen ihre wichtigsten Eigenschaften dar und versuchen, ihre *Bedeutung für die Geometrie und für die gewöhnlichen Differentialgleichungen* durch einfache, aber lehrreiche Anwendungen zu beleuchten. Ganz besonders lenken wir die Aufmerksamkeit des Lesers auf *die infinitesimalen Berührungstransformationen*, von denen gezeigt wird, dass jede durch Angabe einer einzigen Function von drei Argumenten vollkommen definiert wird. Um die Wichtigkeit der infinitesimalen Berührungstransformationen an einer interessanten Anwendung hervortreten zu lassen, erledigen wir schliesslich die schwierige Aufgabe, die Form des Bogenelementes aller Flächen zu finden, für welche die Differentialgleichung dritter Ordnung ihrer *geodätischen Kreise*, geschrieben in krummlinigen oder Gaussischen Coordinaten x, y, eine oder mehrere infinitesimale Berührungstransformationen des zweidimensionalen Gebietes (x, y) gestattet.

Kapitel 1.

Zur Vorgeschichte der Theorie der Berührungstransformationen.

Lange vor der Einführung des allgemeinen Begriffes der Berührungstransformation trat *dieser Begriff in specieller Form* auf; und es erscheint uns in geschichtlicher wie pädagogischer Hinsicht angemessen, in diesem Kapitel einige unter diesen speciellen Berührungstransformationen kurz zu besprechen. Hierdurch wird ebensowohl das Verständnis des allgemeinen Begriffes vorbereitet, als auch eine richtige *Würdigung der Bedeutung dieses Begriffes* verbürgt.

Wir erinnern zunächst kurz an eine Reihe wichtiger Punkttransformationen, an die linearen, an die projectiven und an die Transformation durch reciproke Radien. Eine jede unter diesen Transformationen hat als *Übertragungsprincip* eine grosse Rolle in der Entwickelung der *Geometrie* gespielt. Durch ausdrückliche Einführung des Begriffes: *Linienelement* gelingt es, überhaupt alle Punkttransformationen der Ebene als Transformationen der Linienelemente aufzufassen. Bei dieser Auffassung liefern die Punkttransformationen die einfachsten *Beispiele von Berührungstransformationen* und zwar solcher, welche die Punkte in Punkte überführen.

Wir wenden uns sodann zu einigen schon lange bekannten Operationen, die Curven jedenfalls im Allgemeinen in Curven überführen, ohne doch Punkttransformationen zu sein. Hierher gehört z. B. eine wohlbekannte Construction, die wir als Fusspunkttransformation bezeichnen, und die Transformation durch reciproke Polaren. Wir erkennen, dass sich auch diese Operationen als *Transformationen der Linienelemente* der Ebene auffassen lassen. Die Transformation durch reciproke Polaren hat ebenfalls als *Übertragungsprincip* eine grosse Bedeutung gehabt. Und für die Theorie der gewöhnlichen *Differentialgleichungen* erwies sie sich insofern als wichtig, als sie gewisse Differentialgleichungen auf integrierbare Formen zu bringen gestattete.

Alle diese Operationen sind *specielle Berührungstransformationen.* Im zweiten Kapitel sollen die Berührungstransformationen der Ebene alsdann vom allgemeinsten Standpunkte aus behandelt werden.

§ 1. Einige Punkttransformationen als Übertragungsprincipe.

Punkttransformation.

Zwei Gleichungen von der Form:

$$x_1 = X(x, y), \quad y_1 = Y(x, y) \tag{1}$$

ordnen jedem Punkt (x, y) der Ebene mit den Cartesischen Coordinaten x, y einen Punkt (x_1, y_1) einer Ebene und zwar entweder derselben oder einer anderen Ebene zu. Sind die Gleichungen (1) allgemein nach x, y auflösbar:

$$x = \overline{X}(x_1, y_1), \quad y = \overline{Y}(x_1, y_1), \tag{2}$$

so wird *jeder* allgemeine Punkt (x_1, y_1) durch passende Wahl des Punktes (x, y) aus (1) erhalten. Die Gleichungen (1) bestimmen alsdann eine Punkttransformation der Ebene (x, y) in die Ebene (x_1, y_1). Künftig lassen wir fast immer die beiden Ebenen und auch ihre Coordinatensysteme zusammenfallen, sodass die Gleichungen (1) bei Voraussetzung ihrer Auflösbarkeit *eine Punkttransformation der Ebene in sich* darstellen.

Wir erinnern nun an einige einfache Punkttransformationen und besprechen die Rolle, die sie als *Übertragungsprincipe* gespielt haben.

1. Beispiel: *Orthogonalprojection.* Orthogonal-projection.

Zwei Gleichungen von der Form

$$x_1 = x, \quad y_1 = my \tag{3}$$

stellen eine bekannte Transformation dar. Um sie geometrisch herzustellen, denken wir uns die beiden Ebenen (x, y) und (x_1, y_1) so gelegen, dass ihre Anfangspunkte sowie ihre positiven Abscissenaxen zusammenfallen und der Cosinus des Winkels ihrer positiven Ordinatenaxen gleich m ist. (Siehe Fig. 1.) Alsdann hat die *Orthogonalprojection*

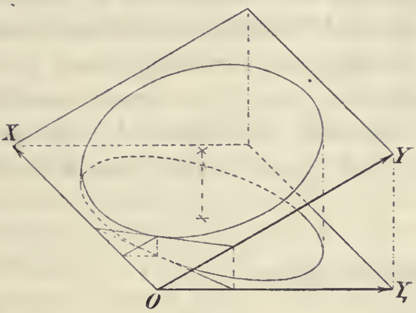

Fig. 1.

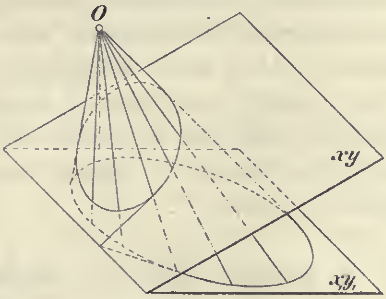

Fig. 2.

eines Punktes (x, y) der einen Ebene auf die andere die durch (3) gegebenen Coordinaten. Wenn man will, kann man die beiden Ebenen durch Umdrehung um die gemeinsame Abscissenaxe zusammenfallen lassen; dadurch erhält man eine lineare Transformation*) in der Ebene, bei der jeder Punkt (x, y) in einen Punkt übergeht, dessen Abscisse x_1 dieselbe, dessen Ordinate y_1 aber das m-fache von y ist.

Die Transformation (3) führt jede Gerade in eine Gerade über und lässt alle Punkte der Abscissenaxe ungeändert. Ferner führt sie zu einander parallele Geraden in zu einander parallele Geraden über. Insbesondere gehen gleichlange und parallele Strecken in ebensolche über. Jede Curve c wird in eine Curve c_1 verwandelt, insbesondere jede algebraische Curve n^{ter} Ordnung in eine algebraische Curve n^{ter} Ordnung. Weiterhin geht jede Tangente von c in eine von c_1 über, und hieraus folgt: Jede algebraische Curve m^{ter} Classe geht in eine eben-

*) Alle in der Folge erwähnten Eigenschaften der betrachteten Transformation kommen überhaupt jeder linearen Punkttransformation der Ebene zu. Wir wählen nur der Anschaulichkeit halber die obige specielle. Die linearen Transformationen wurden von Euler gelegentlich betrachtet.

solche über. Ferner wird jeder Doppelpunkt einer Curve wieder in einen Doppelpunkt verwandelt. Überhaupt geht jede Singularität einer Curve bei der Transformation (3) wieder in eine Singularität derselben Art bei der neuen Curve über. Die Plücker'schen Zahlen einer algebraischen Curve c stimmen also mit denen der transformierten Curve überein. Endlich steht die Fläche, die von einer geschlossenen Curve bestimmt wird, zu der Fläche, die von der transformierten Curve bestimmt wird, in dem constanten Verhältnis $1 : m$.

Orthogonalproj. als Übertragungsprincip.

Man benutzt die Transformation (3) z. B., um viele Sätze über die Ellipse aus Kreissätzen abzuleiten, da die Orthogonalprojection des Kreises eine Ellipse ist und jede Ellipse als Orthogonalprojection eines Kreises aufgefasst werden kann. So wird namentlich die Theorie der conjugierten Durchmesser der Ellipse aus der Theorie der zu einander senkrechten Kreisdurchmesser abgeleitet. Alle dem Kreise umschriebenen Quadrate geben solche der Ellipse umschriebene Parallelogramme, deren Seiten parallel conjugierten Durchmessern sind, die ferner sämtlich gleichen Inhalt haben und deren Diagonalen conjugierte Durchmesser sind. Der Inhalt der Ellipse ergiebt sich ebenfalls sofort aus dem des Kreises, u. s. w.

Projective Transformation.

2. Beispiel: *Projective Punkttransformation.*

Wenn die Gleichungen vorliegen:

$$x_1 = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_3 x + b_3 y + c_3}, \quad y_1 = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_3 x + b_3 y + c_3} \tag{4}$$

und die Determinante

$$\Sigma \pm a_1 b_2 c_3 \neq 0$$

ist, so sind sie auch nach x, y auflösbar und stellen eine *projective* Transformation der Veränderlichen x, y dar. Auch sie kann geometrisch hergestellt werden: Wählt man nämlich in zwei Ebenen (x, y) und (x_1, y_1) beliebige rechtwinklige Axenkreuze und ordnet jedem Punkte (x, y) der einen Ebene den Punkt (x_1, y_1) der anderen zu, der mit ihm auf der Geraden durch einen fest angenommenen Punkt O des Raumes liegt, so drücken sich x_1, y_1 in der Form (4) durch x, y aus. (Siehe Fig. 2, S. 3.) Von dieser räumlichen durch Centralprojection oder Perspective vermittelten Beziehung kommen wir zur projectiven Transformation der *Ebene in sich*, wenn wir die beiden soeben besprochenen Ebenen schliesslich zusammenklappen.

Die vorliegende Transformation führt jede Gerade in eine Gerade über und lässt das Doppelverhältnis von vier Punkten einer Geraden oder von vier Strahlen eines Büschels ungeändert. Sie führt jede Curve in eine Curve, jede Tangente der einen in eine Tangente der andern über und lässt Ordnung und Classe einer algebraischen Curve ungeändert. Ebenso führt sie jede Singularität wieder in eine Singularität derselben Art über. Man hat diese Punkttransformation seit Apollonius bis auf unsere Zeit als Übertragungsprincip benutzt, um die Eigenschaften der Kegelschnitte auf möglichst anschaulichem Wege abzuleiten, insbesondere aus den Eigenschaften des Kreises. Dasselbe Übertragungsprincip wendet man an, um algebraische Curven dadurch auf bequemere Formen zu bringen, dass man Singularitäten ins Unendlichferne verlegt. So wandte Newton es an, um alle Curven dritter Ordnung auf die cubischen Parabeln zurückzuführen*). Indem der Kreis bei Benutzung dieser Transformation vor den Kegelschnitten nichts voraus hat, sich vielmehr als Kegelschnitt durch die beiden unendlich fernen imaginären Scheitel der Strahlenbüschel

Proj. Transf. als Übertragungsprincip.

$$y = \pm ix + \text{Const.}$$

darstellt, gewinnen viele Sätze über Kreise sofort eine Bedeutung für beliebige Kegelschnitte.

Der grosse Geometer Poncelet, dem wir die so ausserordentlich wichtige Einführung des Begriffs der unendlich fernen Kreispunkte verdanken, führte mit ihrer Hülfe metrische Begriffe auf projective zurück. Ebenso war es von weittragender Bedeutung, dass Poncelet den Begriff: projective Transformation — allerdings in specieller und rein geometrischer Einkleidung — auf den Raum ausdehnte**).

Die projectiven Transformationen haben noch eine besondere Eigenschaft: Für jede bestimmte Wahl der Constanten a, b, c stellen die Gleichungen (4) eine projective Transformation dar. Bezeichnen wir eine solche kurz mit S, eine andere mit T u. s. w., so können wir festsetzen, dass ST diejenige Punkttransformation vorstellen soll, die der Aufeinanderfolge von S und T äquivalent ist. Ist nämlich S die Transformation (4), sodass sie jeden Punkt (x, y) in einen durch (4) gegebenen Punkt (x_1, y_1) überführt, so wird eine weitere projective Transformation T die Punkte (x_1, y_1) fernerhin in Punkte (x', y') verwandeln, für die etwa:

$$x' = \frac{a_1'x_1 + b_1'y_1 + c_1'}{a_3'x_1 + b_3'y_1 + c_3'}, \quad y' = \frac{a_2'x_1 + b_2'y_1 + c_2'}{a_3'x_1 + b_3'y_1 + c_3'}$$

*) Newton, *Enumeratio linearum tertii ordinis.* (1706) S. 19.

**) Die Bezeichnung „*projectiv*“ geht auf Poncelet's bahnbrechendes Werk: *Traité des propriétés projectives des figures*, 1822, zurück. Möbius (*Der barycentrische Calcul*, 1827) gab zuerst eine allgemeine *analytische* Darstellung der projectiven Transformationen und zwar in homogenen Coordinaten.

ist. Eliminiert man hieraus vermöge (4) die Grössen x_1, y_1, so stellen sich offenbar x', y' dar in der Form:

$$x' = \frac{A_1 x + B_1 y + C_1}{A_3 x + B_3 y + C_3}, \quad y' = \frac{A_2 x + B_2 y + C_2}{A_3 x + B_3 y + C_3}.$$

Dies ist die der Aufeinanderfolge zweier projectiver Transformationen S und T äquivalente Transformation und zwar, wie man sieht, ebenfalls eine projective Transformation.

Die projectiven Transformationen bilden also eine Schar von unendlich vielen Transformationen von der bemerkenswerten Eigenschaft, dass die Aufeinanderfolge zweier beliebiger Transformationen der Schar stets einer einzigen Transformation derselben Schar äquivalent ist. Eine Schar von Transformationen, die diese Eigenschaft besitzt, bildet nach unsrer Terminologie eine *Gruppe;* wir sagen daher kurz: *Alle projectiven Transformationen der Ebene bilden eine Gruppe.*

Trf. durch reciproke Radien.

3. Beispiel: *Transformation durch reciproke Radien.*

Bestimmt man zu jedem Punkt (x, y) der Ebene den Punkt (x_1, y_1) auf seinem Radiusvector so, dass das Product der Radienvectoren den Wert 1 hat, so findet man die Punkttransformation:

$$x_1 = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad y_1 = \frac{y}{x^2 + y^2}. \tag{5}$$

Diese sogenannte *Transformation durch reciproke Radien**) ist nach den projectiven Transformationen das einfachste Beispiel einer ein-eindeutigen Transformation. Die Auflösung nach x, y giebt diese Grössen ebenfalls rational ausgedrückt durch x_1, y_1 und zwar so:

$$x = \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2}, \quad y = \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2}.$$

Diese zur ursprünglichen Transformation *inverse* hat dieselbe Form wie jene. Also ergiebt sich: *Die Transformation durch reciproke Radien deckt sich mit ihrer inversen.* Anders ausgedrückt: *Führt man dieselbe*

---

*) Poncelet betrachtete zuerst (1822) die ein-eindeutige involutorische Punkttransformation, die alle Geraden in Kegelschnitte durch drei feste Punkte überführt (*Traité des propriétés projectives des figures,* Nr. 370). Magnus verlegte zwei dieser Punkte in die unendlich fernen imaginären Kreispunkte (Crelles Journal Bd. 5, 1832, S. 60); hieraus folgt die Transformation durch reciproke Radien in bekannter Weise. Nach einem Citat von Chasles in seinem *Rapport etc.* ist Quetelet schon 1827 im Besitz dieser Transformation gewesen und hat einen interessanten Satz über diese Transformation veröffentlicht (Nouveaux Mémoires de l'Acad. de Bruxelles, Bd. 4, S. 81, vgl. S. 27 und die Fussnote daselbst). Wie überaus wichtig diese Transformation, die inzwischen von mehreren Mathematikern betrachtet worden war, für die Physik wie für die Geometrie und die Functionentheorie ist, wurde von W. Thomson, Liouville und Anderen klargestellt.

Transformation durch reciproke Radien zweimal nach einander aus, so erhält man die identische Transformation, die alles in Ruhe lässt. Oben drückten wir eine projective Transformation durch einen Buchstaben aus. Jetzt bezeichne etwa R die Transformation durch reciproke Radien (5). Dann ist die der Aufeinanderfolge RR äquivalente Transformation die Transformation 1, wenn wir nämlich hier wie später immer die identische Transformation symbolisch mit 1 bezeichnen. Wir schreiben also

$$RR = 1.$$

Derartige Transformationen, die sich, zweimal nach einander ausgeführt, aufheben, nennt man *involutorisch.*

Zwei wichtige Eigenschaften, von denen allerdings die eine als Folge der andern abgeleitet werden könnte, besitzt die Transformation durch reciproke Radien: Sie führt jeden Kreis in einen Kreis über und verwandelt zwei Curven, die sich in einem Punkte p schneiden, in zwei Curven, die sich in dem entsprechenden Punkte p' unter demselben Winkel schneiden. Sie ist daher eine *conforme oder winkeltreue* Transformation. Insbesondere wird jede Gerade in einen Kreis durch den Anfangspunkt O und jeder Kreis durch O in eine Gerade übergeführt. Der Punkt O heisst der Pol der Transformation.

Durch Vermittelung der Transformation durch reciproke Radien lassen sich Sätze über Geraden und Kreise als Sätze über Kreise allein aussprechen, bei denen allerdings vielfach der Pol eine gewisse wesentliche Rolle spielt. So folgen z. B. durch dieses Übertragungsprincip aus den nachfolgend links stehenden Sätzen sofort die rechts stehenden: **Trf. durch recipr. Radien als Übertragungsprincip.**

1) Zwei Punkte bestimmen eine Gerade.	1) Drei Punkte bestimmen einen Kreis.
2) Zwei Geraden haben einen Schnittpunkt.	2) Zwei Kreise durch einen gegebenen Punkt haben überdies noch einen Punkt im Endlichen gemein.
3) Zwei Kreise haben vier gemeinsame Tangenten.	3) Durch einen gegebenen Punkt gehen vier Kreise, die zwei gegebene Kreise berühren.
4) Es giebt vier Kreise, die drei gegebene Geraden berühren.	4) Es giebt vier Kreise, die drei durch einen Punkt gehende Kreise berühren.

Ferner führt die Transformation durch reciproke Radien jedes Orthogonalsystem in ein ebensolches über. Auch ergiebt sich ohne Mühe, dass sie insbesondere jedes Isothermensystem in ein ebensolches verwandelt. So kann man z. B. aus den nachfolgend links genannten Isothermensystemen durch Übertragung die rechts erwähnten ableiten:

5) Isothermensystem zweier Geradenscharen. (Fig. 3a.)

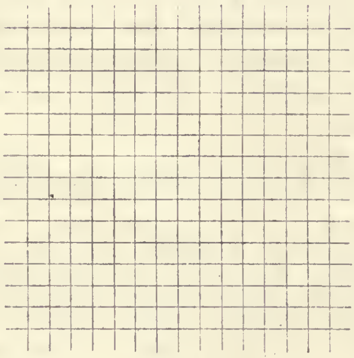

Fig. 3a.

5) System aller Kreise, die durch einen gemeinsamen Punkt gehen und daselbst eine von zwei zu einander senkrechten Geraden zur Tangente haben. (Fig. 3b.)

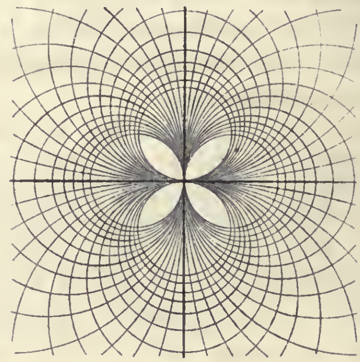

Fig. 3b.

6) Isothermensystem concentrischer Kreise und ihrer Radien. (Fig. 4a.)

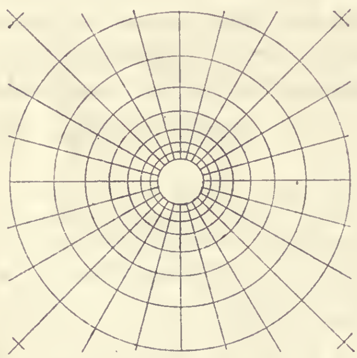

Fig. 4a.

6) System aller Kreise, von denen die der einen Schar durch zwei gegebene (reelle) Punkte gehen, während die andere Schar von den zu diesen Kreisen orthogonalen Kreisen gebildet wird. (Fig. 4b.)

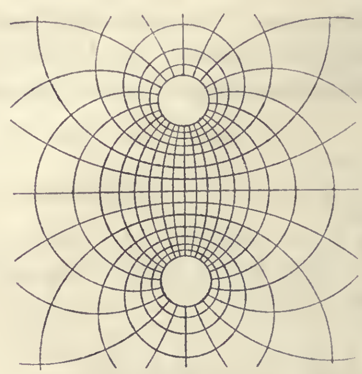

Fig. 4b.

7) Isothermensystem aller confocalen Ellipsen und Hyperbeln.

7) Isothermensystem zweier Scharen von Curven vierter Ordnung.

Ferner stehen sich gegenüber:

8) Algebraische Curve n^{ter} Ordnung von allgemeiner Lage.

8) Algebraische Curve $2n^{\text{ter}}$ Ordnung von specieller Lage und Form.

9) Krümmungskreise einer Curve.

9) Krümmungskreise einer Curve.

Gewisse Curven vierten Grades lassen sich vermöge der Transformation durch reciproke Radien in Kegelschnitte umwandeln und daher leichter studieren, so die Pascal'sche Schnecke, die aus einem Kegelschnitt hervorgeht, dessen einer Brennpunkt der Pol O ist, ferner die Cardioide u. s. w.

Ferner lässt sich mit Hülfe der Transformation durch reciproke Radien die Lösung jeder planimetrischen Aufgabe, die mit Zirkel und Lineal lösbar ist, so umformen, dass man mit dem Zirkel allein ausreicht. Dies führt zu der allerdings viel früher von Mascheroni begründeten „*Geometria del compasso*" (1797).

Dass bei der Transformation durch reciproke Radien jedes Isothermensystem in ein ebensolches übergeht, kann man bekanntlich auch so aussprechen: Die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

geht bei Einführung von x_1, y_1 vermöge dieser Transformation in diese über:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1{}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1{}^2} = 0.$$

Deshalb spielt die Transformation durch reciproke Radien in der Functionentheorie und in der Potentialtheorie eine so wichtige Rolle.

Wir haben nunmehr drei Beispiele von Punkttransformationen vorgeführt, die als Übertragungsprincipe Bedeutendes geleistet haben und noch leisten. Invariantentheoret. Bedeutg. d. Pkt.-Trf.

Wir wollen aber nicht unterlassen, noch einige andere und weitergehende Anwendungen solcher Transformationen zu erwähnen: Man stellt sich die Frage, ob es möglich ist, *durch eine passend zu wählende* Punkttransformation etwas Bestimmtes zu leisten, z. B. eine vorgelegte Differentialgleichung in eine andere gegebene überzuführen. Hierbei handelt es sich also darum, *zuerst aus der Schar aller unendlich vielen Punkttransformationen eine geeignete zu finden.* Ein Beispiel hierzu ist dieses: Man kann fragen, wie man entscheidet, ob eine gegebene gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung in x, y:

$$F(x, y, y', y'') = 0,$$

die ja ∞^2 Curven der Ebene definiert, durch Punkttransformation auf die Form $y'' = 0$ gebracht werden kann, d. h. auf eine solche Form, dass ihre Integralcurven die Geraden der Ebene werden. Diese interessante Frage wurde von Lie 1883 erledigt*). Er zeigte dabei, dass, sobald eine solche Reduction überhaupt möglich ist, wofür er die Kriterien aufstellte, die Integration der vorgelegten Differentialgleichung oder also, was offenbar dasselbe ist, ihre Zurückführung auf die sofort integrierbare Form $y'' = 0$ auf die Integration einer gewissen *linearen* Differentialgleichung *dritter* Ordnung hinauskommt.

---

*) Lie, *Classification und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen x, y, die eine Gruppe von Transformationen gestatten.* III. Archiv for Math. og Naturv., Christiania, 1883, Bd. 9, S. 371.

So spielen die Punkttransformationen und ebenso die später einzuführenden Berührungstransformationen, die diese umfassen, eine doppelte Rolle. Einmal dienen sie als Übertragungsprincipe, das andere Mal sind sie die Hülfsmittel invariantentheoretischer Untersuchungen.

Schliesslich wollen wir *eine neue Auffassung der Punkttransformationen* besprechen, die den Übergang zu den im nächsten Kapitel zu untersuchenden Berührungstransformationen vorbereiten und erleichtern wird.

Jede Punkttransformation

$$x_1 = X(x, y), \quad y_1 = Y(x, y) \tag{6}$$

Berührung von Curven.

verwandelt, wie wir wissen, Punkt in Punkt, Curve in Curve, *einander berührende Curven*, d. h. mehrere unendlich benachbarte Punkte gemein habende Curven, *in ebenfalls einander berührende Curven.* Dies Letztere, das begrifflich einleuchtet, beruht analytisch darauf, dass, sobald y eine gegebene Function ω von x ist:

$$y = \omega(x), \tag{7}$$

alsdann auch y_1 eine bestimmte Function ω_1 von x_1 wird:

$$y_1 = \omega_1(x_1). \tag{8}$$

Es ist dies nämlich die Function y_1, die aus

$$x_1 = X(x, \omega(x)), \quad y_1 = Y(x, \omega(x))$$

hervorgeht, sobald man mit Hülfe der ersten Gleichung x aus der zweiten fortschafft. Die Curve (7) geht bei der Punkttransformation in die Curve (8) über. Wenn y' den Differentialquotienten von y nach x, y_1' den von y_1 nach x_1 bezeichnet, so ist:

$$y' = \omega'(x)$$

und y_1' bestimmt sich aus (6) durch totale Differentiation nach x und Einsetzen des Wertes $y' = \omega'(x)$ in der Form:

$$y_1' = \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{Y_x + Y_\omega \omega'}{X_x + X_\omega \omega'},$$

oder, wenn wir $\omega(x)$ nach (7) durch y bezeichnen, indem wir dahingestellt sein lassen, welche Function von x die Veränderliche y darstellen soll:

$$y_1' = \frac{Y_x + Y_y y'}{X_x + X_y y'}.$$

Hierin stellen X_x, Y_x und X_y, Y_y die partiellen Differentialquotienten von $X(x, y)$ und $Y(x, y)$ nach x bez. y dar.

Kennt man von einer Curve c nur einen Punkt (x, y) und ihre Tangentialrichtung (y') daselbst, so kennt man alsdann vermöge der Gleichungen

$$(9) \qquad x_1 = X(x, y), \quad y_1 = Y(x, y), \quad y_1' = \frac{Y_x + Y_y y'}{X_x + X_y y'}$$

auch den transformierten Punkt (x_1, y_1) der neuen Curve c_1 und die Tangentialrichtung (y_1') in ihm.

Anstatt nun zu sagen, dass zwei einander berührende Curven einen Punkt und die Tangente daselbst gemein haben, sagen wir, *dass sie ein gemeinsames Linienelement besitzen*, indem wir nämlich *den Inbegriff eines Punktes* (x, y) *und einer hindurchgehenden Geraden als ein Linienelement* bezeichnen*). **Linienelement.**

Liegt eine Curve vor, so definiert sie nicht nur ∞^1 Punkte und ∞^1 Tangenten, sondern auch ∞^1 Linienelemente, die wir die *Linienelemente der Curve* nennen. **Linienelem. einer Curve.**

Wir sehen also:

Die Gleichungen (9) ordnen jedem Linienelement (x, y, y') ein neues Linienelement (x_1, y_1, y_1') derart zu, dass die Linienelemente einer Curve

$$y = \omega(x)$$

in die Linienelemente derjenigen Curve

$$y_1 = \omega_1(x_1)$$

übergehen, in welche die erstere Curve vermöge der vorgelegten Punkttransformation (6) verwandelt wird.

Die Gleichungen (9) sind auch umgekehrt nach x, y, y' auflösbar. Denn dass die Gleichungen (6) oder also die beiden ersten Gleichungen (9) nach x, y auflösbar sind, dass also die Functionen X, Y von einander unabhängig sind, haben wir vorausgesetzt. Es ist also

$$\begin{vmatrix} X_x & X_y \\ Y_x & Y_y \end{vmatrix} \neq 0.$$

Hieraus folgt sofort, dass auch die letzte Gleichung (9) nach y' auflösbar ist. Die Gleichungen (9) stellen also eine *Transformation* der drei Veränderlichen x, y, y' in die drei Veränderlichen x_1, y_1, y_1' dar.

*) Es ist oft *praktisch* bequem, sich ein Linienelement als ein unendlich kleines Stück einer Curve zu denken.

Erweiterte Pkt.-Trf.

Wir nennen sie die (einmalige) *Erweiterung der Punkttransformation* (6) oder auch bequemer *die erweiterte Punkttransformation* (6).*)

Linienelem. eines Pktes.

Durch einen *Punkt* gehen unendlich viele Linienelemente. Also ebenso wie eine Curve definiert auch ein Punkt unendlich viele Linienelemente. Liegt der Punkt P auf der Curve c, so hat er mit ihr ein Linienelement gemein, sonst nicht.

Allg. Trf. d. Pkte. u. Linienelemente.

Die Erweiterung (9) einer Punkttransformation ist nun nur ein besonderer Fall einer allgemeinen Operation. Stellt man nämlich drei Gleichungen auf von der Form:

$$(10) \qquad x_1 = X(x, y), \quad y_1 = Y(x, y), \quad y_1' = \varphi(x, y, y'),$$

und nimmt man an, sie seien nach x, y, y' auflösbar, so ordnen die beiden ersten genau so wie die Punkttransformation (6) jedem Punkte (x, y) einen Punkt zu. Ebenso werden sie jede Curve — als Punktort — in eine Curve verwandeln. Alle drei Gleichungen (10) zusammen aber ordnen jedem Wertsystem (x, y, y') ein Wertsystem (x_1, y_1, y_1') zu. Ersteres bestimmt wie letzteres ein Linienelement in der Ebene. Durch die Gleichungen (10) wird also jedem Linienelement (x, y, y') ein Linienelement (x_1, y_1, y_1') zugeordnet. Insbesondere gehen alle durch den Punkt (x, y) definierten Linienelemente in die Linienelemente des Punktes (x_1, y_1) über.

Bis dahin verhält sich alles so, wie bei der Transformation (9). Nun aber besteht ein wesentlicher Unterschied: Bei der Transformation (9) werden die Linienelemente einer Curve in die Linienelemente der transformierten Curve verwandelt, und dies ist bei der Transformation (10), wie man leicht einsieht, eben dann und nur dann der Fall, wenn sie die Form (9) hat, d. h. wenn φ die Form

$$\varphi = \frac{Y_x + Y_y y'}{X_x + X_y y'}$$

hat.

---

*) Wenn wir im Text das Linienelement als den Inbegriff eines Punktes und einer hindurchgehenden Geraden definieren und infolgedessen die *erweiterte Punkttransformation*

$$x_1 = X(x, y), \quad y_1 = Y(x, y), \quad y_1' = \frac{Y_x + Y_y y}{X_x + X_y y'}$$

als Transformation der Linienelemente auffassen, so muss dabei wohl beachtet werden, dass die *Punkttransformation*

$$x_1 = X(x, y), \quad y_1 = Y(x, y)$$

wohl den Punkt des Linienelementes (x, y, y') in den Punkt des transformierten Linienelementes (x_1, y_1, y_1') überführt, keineswegs aber die Gerade des ersteren Linienelementes in ihrer ganzen Ausdehnung in die Gerade des neuen Elementes verwandelt, denn eine Gerade kann sehr wohl in eine krumme Linie übergehen und wird dies auch im allgemeinen thun.

Zum Schlusse wollen wir eine analytische Definition der Erweiterung einer Punkttransformation geben. Sie wird zwar hier vielleicht einen etwas künstlichen Eindruck machen. Die späteren Betrachtungen aber werden diese Definition in ein anderes Licht rücken.

Wir bemerken, dass die Grösse φ oder y_1' in (9) der Gleichung genügt:

$$Y_x + Y_y y' - y_1'(X_x + X_y y') = 0.$$

Multiplicieren wir mit dx und addieren beiderseits

$$(Y_y - y_1' X_y)\,(dy - y'\,dx),$$

so kommt:

$$Y_x\,dx + Y_y\,dy - y_1'(X_x\,dx + X_y\,dy) = (Y_y - y_1' X_y)\,(dy - y'\,dx)$$

oder, da sich die linke Seite zusammenziehen lässt:

$$dY - y_1'\,dX = (Y_y - y_1' X_y)\,(dy - y'\,dx)$$

oder auch nach (9):

$$dy_1 - y_1'\,dx_1 = (Y_y - y_1' X_y)\,(dy - y'\,dx).$$

Verlangen wir umgekehrt, dass infolge der Transformation (10) eine Gleichung bestehe von der Form

$$dY - y_1'\,dX = \varrho(dy - y'\,dx),$$

in der ϱ eine von Null verschiedene Function von x, y, y' bedeutet, so zerfällt sie in die beiden einzelnen:

$$Y_x - y_1' X_x = -\varrho y',$$
$$Y_y - y_1' X_y = \varrho,$$

woraus durch Elimination von ϱ folgt:

$$y_1' = \frac{Y_x + Y_y y'}{X_x + X_y y'},$$

also der Wert von y_1' in (9).

Es gilt somit der

Satz 1: *Unter allen Transformationen der Linienelemente* (x, y, y') *der* (x, y)*-Ebene, die gleichzeitig Punkttransformationen sind:* Anal. Defin. der erweit. Pkt.-Trf.

$$x_1 = X(x, y), \quad y_1 = Y(x, y), \quad y_1' = \varphi(x, y, y'),$$

sind die Erweiterungen der Punkttransformationen, nämlich diese

$$x_1 = X(x, y), \quad y_1 = Y(x, y), \quad y_1' = \frac{Y + Y_y y'}{X_x + X_y y'},$$

die einzigen, bei denen eine Gleichung von der Form

$$dy_1 - y_1'\,dx_1 = \varrho(dy - y'\,dx)$$

besteht, in der ϱ *eine Function von* x, y, y' *bedeutet*).*

*) Die von Lie begründete Geometrie der Berührungstransformationen nimmt ihren Ursprung in seiner principiellen Einführung der Begriffe Linienelement und

Functionen-theoret. Anmerkg.

Als Anmerkung sei hier eine Sache zur Sprache gebracht, auf die wir später nicht wieder zurückkommen wollen.

Wenn wir zwei Gleichungen

$$x_1 = X(x, y), \quad y_1 = Y(x, y)$$

betrachten, die eine Punkttransformation bestimmen, so nehmen wir an, dass X und Y *analytische* Functionen ihrer Argumente sind. Wir denken uns dabei im Gebiete der Veränderlichen x, y einen solchen Bereich ausgewählt, innerhalb dessen X und Y eindeutige Functionen von x, y und auch umgekehrt x, y eindeutige Functionen von x_1, y_1 sind, sodass also zwischen zwei Gebieten eine eineindeutige Zuordnung zustande kommt.

§ 2. Einige bekannte Operationen aufgefasst als Transformationen der Linienelemente.

Nachdem wir die Punkttransformationen durch Mitberücksichtigung der Ableitung y' von y nach x als Transformationen der Linienelemente haben auffassen lernen, werden wir nun zu einigen anderen längst bekannten Operationen übergehen, die keine Punkttransformationen und auch keine Erweiterungen solcher sind, die aber dennoch allgemein gewählte Curven wieder in Curven und insbesondere einander berührende Curven in ebenfalls einander berührende Curven überführen. Wir werden sehen, dass sich diese Operationen als Transformationen der Linienelemente auffassen lassen, die allgemein gewählte Curven wieder in Curven überführen, während sie gewisse besondere Curven in Punkte und andererseits die Punkte der Ebene in gewisse Curven umwandeln.

Dilatation.

1. Beispiel: *Dilatation.*

Wir ordnen der beliebig gewählten Curve c ihre Parallelcurve im Abstande n zu. Diese Zuordnung ist eine Operation, und wir werden sie insbesondere eine *Dilatation* nennen. Diese Operation ist zweideutig, da die Curve c zwei Parallelcurven c_1 und c_2 hat. (Siehe Fig. 5.) Das, was wir in der Folge entwickeln werden, gilt sowohl für die eine wie für die andere Parallelcurve. Der Kürze wegen sehen wir aber von dieser Doppeldeutigkeit ab und betrachten nur die eine Parallelcurve c_1 zur Curve c.*)

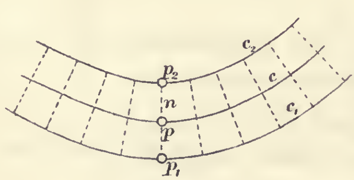

Fig. 5.

Flächenelement als Grundgebilde in der Geometrie der Ebene und des Raumes. (Siehe *Over en Classe geometriske Transformationer,* Verhdlgn. d. Gesellsch. d. Wiss. zu Christiania 1870 u. 71, sowie *Über Complexe, insbesondere Linien- und Kugelcomplexe u. s. w.*, Math. Annalen Bd. 5 (1872), S. 145.)

*) Die beiden Curven c_1, c_2 sind im allgemeinen Zweige derselben analytischen Curve.

Bekanntlich ist die Normale der Curve c in ihrem Punkte p zugleich die Normale der Parallelcurve c_1 in ihrem Punkte p_1, der von p den Abstand n hat. Daraus folgt, dass, wenn zwei Curven c und c' sich in p berühren (vgl. Fig. 6), alsdann auch ihre Parallelcurven c_1 und c_1' sich in einem Punkte p_1 berühren. Alle Curven, die c in p berühren, haben daselbst mit c ein Linienelement l gemein. Die durch die Dilatation zugeordneten Parallelcurven haben ebenfalls mit c_1 in p_1 ein Linienelement l_1 gemein. Mit der vorgelegten Operation

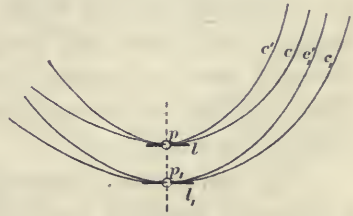

Fig. 6.

ist daher auch eine Zuordnung der Linienelemente verknüpft. Dem Linienelemente l mit dem Punktort p entspricht das zu l parallele Linienelement l_1, dessen Punkt p_1 im Abstande n von p auf der Normalen durch p zum Element l gelegen ist. Diese Zuordnung ist umkehrbar, also eine wirkliche *Transformation der Linienelemente.* Betrachtet man alle Linienelemente der Curve c und unterwirft sie dieser Transformation, so gehen sie in die Linienelemente der Parallelcurve c_1 über. Mithin ist durch die angegebene Transformation der Linienelemente jene Zuordnung der Curven völlig definiert, von der wir ausgingen. *Die Dilatation ist daher eine gewisse Transformation der Linienelemente.*

Um sie analytisch darzustellen, wollen wir unter x, y, y' die Coordinaten des ursprünglichen und unter x_1, y_1, y_1' die des neuen Linienelementes verstehen. Dann bestehen die Beziehungen:

$$(11) \qquad \left\{\begin{aligned}(x_1-x)^2+(y_1-y)^2 &= n^2,\\ x_1-x+(y_1-y)\,y' &= 0,\\ y_1' &= y',\end{aligned}\right.$$

aus denen sich durch Auflösung ergiebt:

$$(11') \qquad x_1 = x - \frac{ny'}{\sqrt{1+y'^2}}, \quad y_1 = y + \frac{n}{\sqrt{1+y'^2}}, \quad y_1' = y'.$$

Alle Linienelemente eines Punktes (x, y) werden offenbar in die des Kreises um diesen Punkt (x, y) mit dem Radius n übergeführt. (Siehe Fig. 7). Dies ergiebt sich auch analytisch durch Elimination von y' aus (11):


Fig. 7.

$$\begin{aligned}(x_1-x)^2+(y_1-y)^2 &= n^2,\\ x_1-x+(y_1-y)\,y_1' &= 0.\end{aligned}$$

Die erste Gleichung ist die des erwähnten Kreises in den laufenden

Punktcoordinaten x_1, y_1, während die zweite die Tangentialrichtung y_1' an den Kreis bestimmt. Wir können also sagen: Bei der Dilatation geht jeder Punkt in einen Kreis über.

Eine Curve durch einen Punkt p wird in eine Curve übergeführt, die den Kreis um den Punkt p mit dem Radius n berührt. Der Inbegriff einer Curve und eines Punktes auf ihr geht also über in den Inbegriff zweier einander berührender Curven. Alle Punkte einer Curve c gehen in Curven, nämlich in Kreise, über, welche die Parallelcurve c_1 zu c berühren.

Zur analytischen Darstellung (11′) der Dilatation sei noch eine Bemerkung gemacht, deren Wert allerdings erst später — im nächsten Kapitel — hervortreten wird: Die Gleichungen (11′) definieren x_1, y_1, y_1' als Functionen von x, y, y'. Man findet nun, dass

$$dx_1 = dx - \frac{n}{\sqrt{1+y'^2}^3}\,dy',$$

$$dy_1 = dy - \frac{ny'}{\sqrt{1+y'^2}^3}\,dy'$$

ist und daher die bemerkenswerte Relation besteht:

$$dy_1 - y_1'\,dx_1 = dy - y'\,dx.$$

Da die Dilatation Geraden in Geraden und Kreise in Kreise verwandelt, so führt sie eine aus diesen Gebilden bestehende Figur wieder in eine solche derart über, das die Berührung in Berührung übergeht, wobei der Punkt als Specialfall des Kreises aufzufassen ist. Man kann deshalb die Dilatation als ein *Übertragungsprincip* in der Geometrie der Punkte, Geraden und Kreise verwenden. Dies Übertragungsprincip ist allerdings ziemlich trivial. Man wendet es z. B. zur Lösung der elementaren Aufgabe an, eine gemeinsame Tangente an zwei Kreise zu legen. Legt man nämlich von einem Punkte k_1 aus eine Tangente t_1 an einen Kreis k_1' (vgl. Fig. 8), so kann man sich diese Figur durch Dilatation aus der zweier Kreise k und k' und ihrer gemeinsamen Tangente t hervorgegangen vorstellen, und hierauf beruht die Lösung der erwähnten einfachen Aufgabe*).

Dilat. als Übertragungsprincip.

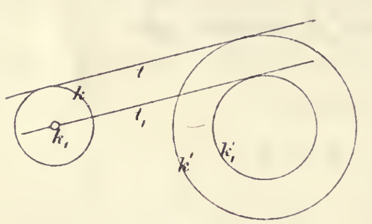

Fig. 8.

---

*) Die Benutzung der Begriffe Tangente, Normale und Krümmungskreis einer ebenen Curve führte schon Huygens zur Betrachtung von parallelen Curven. Bei dieser Gelegenheit erinnern wir noch daran, dass die *Wellentheorie* der Optik, deren Zusammenhang mit der Dilatation wir weiter unten noch besprechen werden,

2. Beispiel: *Fusspunkt-Transformation.*

Fusspunkt-Transformation.

Auch die Operation, vermittelst deren man zu gegebenen Curven ihre Fusspunkt-Curven in bezug auf einen gemeinsamen Pol O construiert, gehört, wie wir zeigen werden, zu den Transformationen der Linienelemente, die einander berührende Curven allgemeiner Lage in ebensolche verwandeln.

Ist c eine allgemein gewählte Curve (Fig. 9) und construiert man in ihren Punkten (x, y) die Tangenten, auf die man von einem gegebenen Punkt O die Lote fällt, so heisst der Ort c_1 der Fusspunkte (x_1, y_1) dieser Lote die *Fusspunkt-Curve* der Curve c in bezug auf den Pol O. Bei gegebenem Pol O kann man so zu jeder Curve ihre Fusspunkt-Curve construieren. Damit hat man eine Operation, die im allgemeinen Curven in Curven überführt.

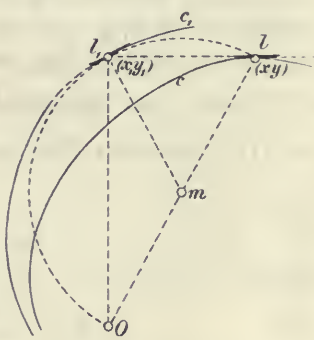

Fig. 9.

Wir machen nun auf den bemerkenswerten Umstand aufmerksam, dass man die Tangente der Fusspunkt-Curve in ihrem Punkte (x_1, y_1) angeben kann, sobald man nur den Punkt (x, y) und seine Tangente, auf der ja (x_1, y_1) liegt, gegeben hat, ohne aber die ursprüngliche Curve c selbst zu kennen. Man kann dies geometrisch oder analytisch einsehen. Zunächst geometrisch: Die Tangente der Fusspunkt-Curve in (x_1, y_1) ist die Verbindende dieses Punktes mit dem unendlich benachbarten Punkt der Fusspunkt-Curve. Letzterer Punkt aber ist der Fusspunkt des Lotes von O auf jene Tangente der Originalcurve c, die der Tangente im Punkte (x, y) unendlich benachbart ist. Die beiden zuletzt genannten Tangenten haben aber den Punkt (x, y) gemein. Daraus folgt, dass der Punkt (x_1, y_1) und der unendlich benachbarte Punkt der Fusspunkt-Curve auf dem Kreise liegen, der die Verbindende von O mit (x, y) zum Durchmesser hat. Der Mittelpunkt des Kreises sei m. Die Tangente der Fusspunkt-Curve im Punkte (x_1, y_1) ist also die Tangente an diesen Kreis.

Um den analytischen Beweis zu geben, wählen wir O als Coordinatenanfang und bezeichnen mit y' die Tangentialrichtung der Curve c im Punkte (x, y). Da der Punkt (x_1, y_1) auf der Tangente im Punkte

---

ebenfalls von Huygens herrührt. Vermutlich sind die Dilatation, die Fusspunkttransformation sowie die Transformation durch reciproke Polaren diejenigen Berührungstransformationen, deren Spuren sich am weitesten zurückverfolgen lassen.

(x, y) und auf dem Lote zu ihr durch O liegt, so erfüllen seine Coordinaten die beiden Gleichungen:

$$(x_1 - x)\, y' - (y_1 - y) = 0,$$
$$x_1 + y_1 y' = 0.$$

Hieraus ergeben sich ihre Werte:

$$(12) \qquad x_1 = -\frac{y'(y - xy')}{1 + y'^2}, \quad y_1 = \frac{y - xy'}{1 + y'^2}.$$

x_1, y_1 sind hiermit als Functionen von x, y, y' gegeben. Längs c ändern sich x, y, y' um dx, um dy oder $y'dx$ und um dy' oder $y''dx$. Die Incremente dx_1, dy_1 von x_1, y_1 lassen sich berechnen. Es handelt sich darum, ihr Verhältnis $\frac{dy_1}{dx_1}$ oder y_1' zu bestimmen. Wegen der aus (12) folgenden Relation

$$x_1 = -y_1 y'$$

ist

$$dx_1 = -y_1\, dy' - y'\, dy_1,$$

also:

$$(13) \qquad y_1' \equiv \frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{dy_1}{y_1 y''\, dx + y'\, dy_1}.$$

Andererseits giebt die zweite Formel (12):

$$dy_1 = \frac{xy'^2 - x - 2yy'}{(1 + y'^2)^2}\, y''\, dx.$$

Setzen wir diesen Wert in (13) ein, so sehen wir, *dass sich der Factor y'' überall forthebt.* Auch ist in (13) der Wert von y_1 aus (12) einzusetzen. Es kommt dann:

$$(14) \qquad y_1' = \frac{xy'^2 - x - 2yy'}{yy'^2 - y + 2xy'}.$$

Diese von y'' freie Relation sagt aber aus: Die Richtung y_1' der Tangente im Punkte (x_1, y_1) der Fusspunkt-Curve hängt nur vom Punkte (x, y) und der Tangentialrichtung y' ab, was eben bewiesen werden sollte. Deutet man diese Formel geometrisch, so kommt man zu der oben gegebenen Tangentenconstruction.

Aus diesem Ergebnis ziehen wir den Schluss: Berühren sich zwei Curven c und c' in einem Punkte (x, y), so berühren sich ihre Fusspunktcurven c_1 und c_1' in einem Punkte (x_1, y_1), dem Fusspunkte des Lotes von O auf die gemeinsame Tangente von c und c'. Alle Curven also, die ein Linienelement (x, y, y') gemein haben, gehen in Curven über, die ebenfalls ein Linienelement (x_1, y_1, y_1') gemein haben. Unsere Operation ordnet folglich jedem Linienelement (x, y, y') ein Linienelement (x_1, y_1, y_1') zu. Diese Zuordnung hat nach (12) und (14) die analytische Gestalt:

$$(15)\quad x_1 = -\frac{y'(y - xy')}{1 + y'^2}, \quad y_1 = \frac{y - xy'}{1 + y'^2}, \quad y_1' = \frac{xy'^2 - x - 2yy'}{yy'^2 - y + 2xy'}.$$

Diese Gleichungen sind nach x, y, y' auflösbar und stellen eine *Transformation der Linienelemente* dar, die *Fusspunkt-Transformation.* Fusspkt.-Trf. als Trf. der Linienelem.

Ist diese Transformation der Linienelemente gegeben, und unterwirft man ihr die Linienelemente einer Curve, so erhält man die Linienelemente der Fusspunkt-Curve in bezug auf den Anfangspunkt als Pol. Die Fusspunkt-Transformation ist also aufzufassen als eine Transformation der Linienelemente, die im allgemeinen Curven in Curven und einander berührende Curven in einander berührende Curven verwandelt.

Die Linienelemente (x, y, y') eines Punktes (x, y) gehen in die Linienelemente (x_1, y_1, y_1') des Kreises über, der die Strecke von O bis (x, y) zum Durchmesser hat. Will man dies analytisch nachweisen, so hat man y' aus (15) zu eliminieren. Dies giebt zwei Relationen, deren eine von y_1' frei ist und die Form hat:

$$\left(x_1 - \frac{x}{2}\right)^2 + \left(y_1 - \frac{y}{2}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{4}.$$

Sie stellt den genannten Kreis dar, geschrieben in den laufenden Coordinaten x_1, y_1. Die andere Relation giebt die Tangentialrichtung y_1' für diesen Kreis. Geometrisch erkennt man dies Ergebnis am bequemsten, wenn man den Punkt als degenerierten Kreis auffasst.

Nicht alle Curven gehen durch die Fusspunkt-Transformation wieder in Curven über, nämlich die Geraden nicht. Die Linienelemente einer Geraden g werden in die Linienelemente des Fusspunktes des Lotes von O auf g verwandelt. Eine Gerade und eine sie berührende Curve gehen in einen Punkt und eine Curve durch diesen Punkt über.

Zu der analytischen Darstellung der Fusspunkt-Transformation machen wir noch eine Anmerkung wie bei der Dilatation. Die Gleichungen (15) definieren x_1, y_1, y_1' als Functionen von x, y, y' und zwar so, dass die bemerkenswerte Relation besteht:

$$dy_1 - y_1'\,dx_1 = \varrho(dy - y'\,dx),$$

in der ϱ eine Function von x, y, y' ist, nämlich diese:

$$\varrho \equiv \frac{xy' - y}{yy'^2 - y + 2xy'}.$$

Die tiefere Bedeutung dieser Relation wird erst später zu erörtern sein.

Wie die Gleichungen (15) zeigen, ist die Fusspunkt-Transformation *ein-eindeutig*, während dagegen die Dilatation zwei-zweideutig ist, was daraus folgt, dass ihre Gleichungen (11) (S. 15) eine Quadratwurzel enthalten.

Wie man weiss, geht eine Parabel mit O als Brennpunkt durch die Fusspunkt-Transformation in ihre Scheiteltangente über und allgemein ein Kegelschnitt, dessen einer Brennpunkt O ist, in den Kreis, dessen Durchmesser die Hauptaxe des Kegelschnittes ist. Jeder Kreis der Ebene lässt sich daher als Fusspunkt-Curve eines gewissen Kegelschnittes auffassen.

Fusspunkt-Trf. als Übertragungsprincip.

Die Fusspunkt-Transformation lässt sich als ein *Übertragungsprincip* verwerten. Heben wir zunächst noch einmal übersichtlich solche Gebilde hervor, die durch diese Transformation aus einander hervorgehen, indem wir links das ursprüngliche, rechts das neue Gebilde vermerken:

1) Punkt allgemeiner Lage.	1) Kreis durch den Pol O.
2) Gerade allgemeiner Lage.	2) Punkt allgemeiner Lage.
3) Parabel mit dem Pol als Brennpunkt.	3) Gerade allgemeiner Lage.
4) Kegelschnitt mit dem Pol als einem Brennpunkt.	4) Kreis allgemeiner Lage.

Indem wir dieses Entsprechen sowie die Eindeutigkeit der Fusspunkt-Transformation benutzen, finden wir z. B., dass sich aus gewissen Sätzen über Punkte, Geraden und Kegelschnitte durch Anwendung der Fusspunkt-Transformation solche über Punkte, Geraden und Kreise ergeben oder auch durch inverse Anwendung Sätze der ersten Art aus solchen der zweiten Art. Wir stellen im Folgenden einige solche einander entsprechende Sätze einander gegenüber. Rechts stehen dabei jedesmal die, welche aus den links erwähnten durch Fusspunkt-Transformation hervorgehen:

5) Zwei Punkte bestimmmen eine Gerade.	5) Zwei Kreise durch einen gegebenen Punkt haben noch einen Punkt gemein.
6) Zwei Geraden schneiden sich in einem Punkte.	6) Drei Punkte bestimmen einen und nur einen Kreis.
7) Eine Parabel ist durch den Brennpunkt und zwei Tangenten eindeutig bestimmt.	7) Zwei Punkte bestimmen eine Gerade.
8) Ein Kegelschnitt ist durch einen Brennpunkt und drei Tangenten eindeutig bestimmt.	8) Drei Punkte bestimmen einen und nur einen Kreis.
9) Es giebt acht Kegelschnitte mit dem gemeinsamen Brennpunkt O, die drei Kegelschnitte mit demselben gemeinsamen Brennpunkt berühren.	9) Es giebt acht Kreise, die drei gegebene Kreise berühren.

Wie wir hervorgehoben haben, verwandelt die Fusspunkt-Transformation einander berührende Curven in ebensolche. Wenn wir nun die Fusspunkt-Transformation zweimal nach einander ausüben, so gehen also wieder einander berührende Curven hervor, und dies Verfahren können wir beliebig oft fortsetzen. Wird die Fusspunkt-Transformation mit dem Pole O durch das Zeichen F dargestellt, so ergiebt sich, dass ihre zweimalige Aufeinanderfolge FF oder F^2 eine Transformation der Linienelemente ist, die Curven im allgemeinen wieder in Curven und einander berührende Curven in ebensolche überführt. Eine Gerade z. B. geht bei F in einen Punkt und dieser bei nochmaliger Ausführung von F in einen Kreis durch O über. Also wird F^2 die Geraden in die Kreise durch O verwandeln. Wiederholung der Fusspkt.-Trf.

Entsprechend sind die Transformationen $F^3, F^4 \ldots$, die sich durch mehrmalige Wiederholung von F ergeben, solche Transformationen der Linienelemente, die im allgemeinen Curven in Curven und insbesondere einander berührende Curven in einander berührende Curven überführen.

Wir werden später (im vierten Kapitel) Gelegenheit haben, diese letzteren Andeutungen zu vervollständigen*).

§ 3. Transformation durch reciproke Polaren.

Die Transformation durch reciproke Polaren liefert uns ein weiteres Beispiel einer Transformation der Linienelemente, die Curven im allgemeinen in Curven verwandelt. Berührung geht dabei in Berührung über.

Sie besteht — zunächst im einfachsten Falle —, wie man weiss, in Folgendem: Vorgelegt sei der Kreis k:

$$x^2 + y^2 - 1 = 0. \tag{16}$$

Ist (x, y) ein beliebig gewählter Punkt der Ebene, so hat die Verbindende der Berührpunkte der vom Punkte (x, y) an den Kreis zu legenden Tangenten, also die *Berührsehne* oder *Polare***) des Punktes (x, y) die Gleichung: Polare.

$$xx_1 + yy_1 - 1 = 0, \tag{17}$$

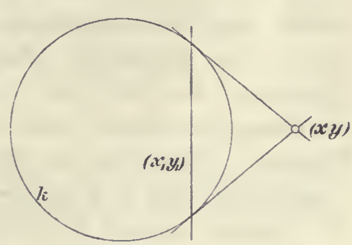

Fig. 10.

geschrieben in den laufenden Coordinaten x_1, y_1. (Siehe Fig. 10.) Die Gleichung (17) ist auch die Be-

*) Auch die Fusspunkt-Transformation gehört — wie wir schon in einer Fussnote bemerkten — zu denen, deren Ursprung weit zurückliegt. So hat z. B. schon Maclaurin in den Philosophical Transactions von 1718, Nr. 356, Untersuchungen über successive Fusspunkt-Curven und -Flächen angestellt.

**) Die Begriffe Pol und Polare kommen schon bei Apollonius vor.

dingung dafür, dass zwei Punkte (x, y) und (x_1, y_1) *conjugiert* hinsichtlich des Kreises k sind. Zu jedem Punkte (x, y) giebt es ∞^1 conjugierte Punkte, deren Ort eben die Polare des Punktes (x, y) ist. Umgekehrt lässt sich jede Gerade als Polare eines Punktes auffassen, Pol. der der *Pol* der Geraden genannt wird. Durchläuft der Pol (x, y) eine Gerade g, so dreht sich seine Polare um einen Punkt, nämlich um den Pol von g. Dies alles sind ja bekannte elementare Sätze.

Liegt nun irgend ein Polygon vor, gebildet von den Punkten $a, b, c \ldots$, so können wir die Polaren der Punkte $a, b, c \ldots$, also gewisse Geraden $a_1, b_1, c_1 \ldots$ construieren. Die Seiten $ab, bc, \ldots$ des vorgelegten Polygons haben ferner Pole, und diese Pole sind die Schnittpunkte von a_1 und b_1, von b_1 und c_1 u. s. w. Zu jedem Polygon lässt sich folglich ein zweites Polygon derart construieren, dass die Ecken des einen die Pole der Seiten des anderen sind. Die Beziehung zwischen beiden Polygonen ist vollständig umkehrbar: wären wir vom zweiten Polygon ausgegangen, so hätte sich das erste ergeben.

Durch einen Grenzübergang erkennt man nun, dass sich jeder Curve c der Ebene eine Curve c_1 derart zuordnen lässt, *dass die Punkte der einen Curve die Pole der Tangenten der andern sind*, und zwar ist diese Zuordnung eine völlig reciproke: Ist der Curve c die Curve c_1 zugeordnet, so ist der Curve c_1 die Curve c zugeordnet. Zwei einander in dieser Weise vermöge des Kreises k zugeordnete Curven heissen conjugiert oder zu einander reciprok hinsichtlich des Kreises k.

Trf. durch rec. Polaren. Die Operation, die diese Zuordnung bewirkt, heisst die *Transformation durch reciproke Polaren hinsichtlich des Kreises k.*

Wie man weiss, kann man diese Transformation auch dann herstellen, wenn statt des Kreises (16) irgend ein Kegelschnitt k vorliegt, da hier die Beziehung zwischen Pol und Polare dieselbe wie beim Kreise ist. So wird denn auch hier einer Curve c die Curve c_1 zugeordnet sein, deren Punkte die Pole der Tangenten von c und deren Tangenten die Polaren der Punkte von c hinsichtlich des Kegelschnittes k sind, und auch hier ist die Zuordnung völlig umkehrbar.

Dadurch gelangt man zur *Transformation durch reciproke Polaren hinsichtlich eines beliebigen Kegelschnittes k.*

Zwei gegebene Curven c und c', die einander berühren, haben nun an der Berührstelle einen Punkt und die hindurchgehende Tangente gemein. Die durch unsere Transformation zugeordneten Curven c_1 und c_1' haben daher eine Tangente und den auf ihr liegenden Berührpunkt gemein, d. h. einander berührende Curven werden in ebenfalls einander berührende Curven übergeführt. Da c und c' einen Punkt mit hindurchgehender Tangente gemein haben, so gehört ihnen ein Linienelement l gemeinsam zu. Entsprechend haben c_1 und c_1' ein gemeinsames Linienelement l_1. Der Punkt von l ist Pol der Geraden von l_1 und der Punkt von l_1 ist Pol der Geraden von l. Jedem Linienelemente l ist hiernach ein Linienelement l_1 zugeordnet. Damit sind wir wieder zu einer *Transformation der Linienelemente* gelangt, die sich leicht geometrisch construieren lässt. (Siehe Fig. 11.) Diese Transformation der Linienelemente führt jede Curve — als Ort von Linienelementen — in eine Curve, nämlich in die conjugierte, über; insbesondere verwandelt sie einander berührende Curven in ebensolche.

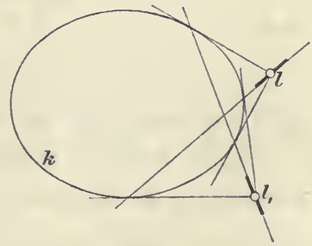

Fig. 11.

Trf. d. Linien-elemente.

Die Geraden bilden hierbei insofern eine Ausnahme, als die Linienelemente einer Geraden nicht in die einer Curve, sondern in die eines Punktes, des Poles der Geraden, übergehen. Andererseits geht der Punkt — aufgefasst als ein Ort von Linienelementen — in eine Gerade, seine Polare, über.

Legen wir der Transformation wieder den Kreis (16) zu Grunde Anal. Darst. d. Trf.

$$x^2 + y^2 - 1 = 0, \tag{16}$$

so ist sie leicht analytisch darzustellen. Der Punkt (x, y) des Linienelementes (x, y, y') geht in die Polare

$$xx_1 + yy_1 - 1 = 0, \tag{17}$$

geschrieben in x_1, y_1, über. Diese Gerade hat die Richtung y_1' des neuen Linienelementes (x_1, y_1, y_1'), sodass wir haben:

$$y_1' = -\frac{x}{y}.$$

Ganz analog ist, da (17) ebenfalls die Polare des Punktes (x_1, y_1) des neuen Elementes, geschrieben in x, y, darstellt, aus (17) die Richtung y' zu entnehmen:

$$y' = -\frac{x_1}{y_1}.$$

Lösen wir die drei letzten Gleichungen nach x_1, y_1, y_1' auf, so erhalten wir die analytische Darstellung der Transformation:

$$x_1 = \frac{-y'}{y - xy'}, \quad y_1 = \frac{1}{y - xy'}, \quad y_1' = -\frac{x}{y}. \tag{18}$$

Wir merken dabei an, dass die hiermit definierten Functionen x_1, y_1, y_1' von x, y, y' die Relation erfüllen:

$$dy_1 - y_1' dx_1 = \varrho(dy - y' dx),$$

in der

$$\varrho \equiv \frac{-1}{y(y - xy')}$$

ist. Die Bedeutung dieser Relation kann erst später erörtert werden.

Einer späteren Anwendung halber schalten wir noch ein: Legen wir anstelle des Kreises (16) den imaginären Kreis mit dem Radius $\sqrt{-1}$

$$x^2 + y^2 + 1 = 0 \tag{16'}$$

zu Grunde, so ergiebt sich als analytischer Ausdruck der zugehörigen Transformation durch reciproke Polaren ganz entsprechend:

$$x_1 = \frac{-y'}{xy' - y}, \quad y_1 = \frac{1}{xy' - y}, \quad y_1' = -\frac{x}{y}. \tag{18'}$$

Legen wir endlich anstelle des Kreises (16) oder (16′) die Parabel

$$x^2 + 2y = 0 \tag{19}$$

zu Grunde, so hat die Polare des Punktes (x, y) die Gleichung:

$$xx_1 + y + y_1 = 0,$$

geschrieben in den laufenden Coordinaten x_1, y_1. Hier also haben wir zu verlangen, dass y_1' die Richtung dieser Geraden angebe. Es muss daher

$$y_1' = -x$$

und analog

$$y' = -x_1$$

gesetzt werden, sodass die Auflösung der letzten drei Gleichungen nach x_1, y_1, y_1' die Transformation durch reciproke Polaren in bezug auf die Parabel (19) in der Form ergiebt:

$$x_1 = -y', \quad y_1 = xy' - y, \quad y_1' = -x. \tag{20}$$

Merken wir hier ebenfalls das Bestehen der Relation an:

$$dy_1 - y_1' dx_1 = \varrho(dy - y' dx),$$

in der

$$\varrho \equiv -1$$

ist.

Wir sagten schon, dass die Transformation durch reciproke Polaren hinsichtlich eines beliebigen Kegelschnittes k zu sich selbst invers, also *involutorisch* ist, was geometrisch sofort aus der wechselseitigen Zuordnung der Linienelemente erhellt. (Vgl. Fig. 11 auf S. 23.) Analytisch drückt es sich dadurch aus, dass z. B. die Gleichungen-systeme (18) oder (20) ungeändert bleiben, wenn x, y, y' mit x_1, y_1, y_1' vertauscht werden.

Betrachten wir eine beliebige Curve

$$y = f(x).$$

Sie geht vermöge der Transformation durch reciproke Polaren (20) wieder in eine Curve über. Um diese Curve analytisch darzustellen, bemerken wir, dass ihre ∞^1 Linienelemente (x, y, y') durch die beiden Gleichungen

$$y = f(x), \quad y' = f'(x)$$

dargestellt werden, die y und y' durch x ausdrücken. Diese Elemente gehen nach (20) in die ∞^1 Linienelemente (x_1, y_1, y_1') über, die durch die drei Gleichungen

$$x_1 = -f'(x), \quad y_1 = xf'(x) - f(x), \quad y_1' = -x \tag{21}$$

gegeben werden, wenn man in ihnen x als Parameter auffasst. Den Ort der Punkte (x_1, y_1) dieser neuen Linienelemente stellen die beiden Gleichungen

$$x_1 = -f'(x), \quad y_1 = xf'(x) - f(x) \tag{22}$$

vermittels der Hülfsveränderlichen x dar. Die Tangentialrichtung y_1' dieser Curve ergiebt sich hieraus durch Differentiation so:

$$y_1' = \frac{xf''(x)}{-f''(x)} = -x,$$

also gerade so, wie aus (21) zu entnehmen ist. Hiermit ist *analytisch* verificiert, dass die Transformation (20) die Linienelemente einer allgemein gewählten Curve wieder in die einer Curve verwandelt, während wir oben (S. 22) einen Grenzübergang zu diesem Zwecke machten. Nur wenn die gegebene Curve eine Gerade, also $f(x)$ linear in x ist, liefern die Gleichungen (22) constante Werthe für x_1 und y_1, also nur die Geraden gehen in Punkte über, wie wir schon wussten.

Dass die Transformation durch reciproke Polaren in der Geometrie eine höchst wichtige Rolle als *Übertragungsprincip* gespielt hat und noch spielt, ist aus der projectiven Geometrie bekannt. **Trf. durch rec. Polaren als Übertragungsprincip.**

Stellen wir wieder, um an einige Anwendungen zu erinnern, zunächst solche Begriffe einander gegenüber, die durch die Transformation durch reciproke Polaren in einander übergehen:

1) Punkt allgemeiner Lage.	1) Gerade allgemeiner Lage.
2) Punktort.	2) Geradenort.
3) Vier Punkte einer Geraden mit dem Doppelverhältnis D.	3) Vier Strahlen eines Büschels mit dem Doppelverhältnis D.

4) Algebraische Curve μ^{ter} Ordnung und ν^{ter} Classe.

Insbesondere:

5) Kegelschnitt.

6) Doppelpunkt einer Curve. (Vgl. Fig. 12a.)

7) Spitze einer Curve. (Vgl. Fig. 12a.)

4) Algebraische Curve ν^{ter} Ordnung und μ^{ter} Classe.

5) Kegelschnitt.

6) Doppeltangente einer Curve. (Vgl. Fig. 12b.)

7) Wendetangente einer Curve. (Vgl. Fig. 12b.)

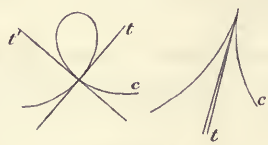

Fig. 12 a.

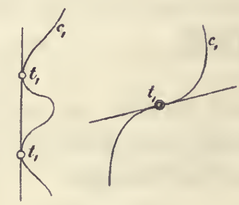

Fig. 12 b.

Erinnern wir ferner an einige Sätze, von denen jedesmal der eine aus dem andern vermöge der Transformation durch reciproke Polaren hervorgeht:

8) Pascal's Satz vom Sechseck im Kegelschnitt. (Vgl. Fig. 13a.)

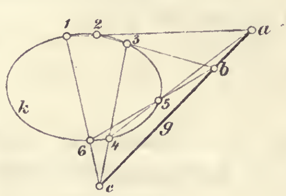

Fig. 13 a.

8) Brianchon's Satz vom Sechsseit um den Kegelschnitt*). (Vgl. Fig. 13b.)

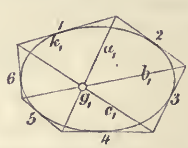

Fig. 13 b.

9) Fünf Punkte bestimmen einen und nur einen Kegelschnitt.

10) Satz des Desargues: Gehen die Verbindungslinien entsprechender Ecken zweier Dreiecke durch einen gemeinsamen Punkt, so liegen die Schnittpunkte entsprechender Seiten auf einer Geraden.

11) Zwei Kegelschnitte schneiden einander in vier Punkten.

9) Fünf Tangenten bestimmen einen und nur einen Kegelschnitt.

10) Umkehrung des Satzes von Desargues: Liegen die Schnittpunkte entsprechender Seiten zweier Dreiecke auf einer Geraden, so gehen die Verbindungslinien entsprechender Ecken durch einen Punkt.

11) Zwei Kegelschnitte haben vier gemeinsame Tangenten.

In der Theorie der algebraischen Curven wird die Transformation durch reciproke Polaren fortwährend angewandt. Um ein Beispiel

*) Diese Ableitung des Satzes vom Sechsseit durch Brianchon war die erste *rein geometrische* Anwendung, die man von der Transformation durch reciproke Polaren gemacht hat (Journal de l'École polyt., 13. Heft, Bd. 6, 1806, S. 297).

anzuführen, seien die Singularitäten einer ebenen algebraischen Curve erwähnt. Die Transformation verwandelt, wie gesagt, Doppelpunkt in Doppeltangente, Spitze in Wendetangente. Zwischen der Ordnungszahl μ, der Classenzahl ν, sowie der Zahl δ der Doppelpunkte, die keine Spitzen sind, ferner der Zahl τ der Doppeltangenten, die keine Wendetangenten sind, endlich der Zahl $\varkappa$ der Spitzen und ι der Wendetangenten bestehen, wie man weiss, gewisse Relationen, die sogenannten *Plücker'schen Gleichungen.* An die Curve gehen, da sie von μ^{ter} Ordnung ist, von einem Punkte aus $\mu(\mu-1)$ Tangenten, von denen aber die δ doppelt zählenden Geraden nach den Doppelpunkten und die $\varkappa$ dreifach zählenden Geraden nach den Spitzen abzuziehen sind, wenn man die Classenzahl erhalten will, sodass

$$\nu = \mu(\mu-1) - 2\delta - 3\varkappa$$

ist. Wenden wir diese Formel auf die transformierte Curve an, so ist μ mit ν, δ mit τ und $\varkappa$ mit ι zu vertauschen, sodass auch

$$\mu = \nu(\nu-1) - 2\tau - 3\iota$$

ist. So haben sich zwei der Plücker'schen Gleichungen ergeben. Auf die übrigen wollen wir hier nicht eingehen.

In speciellen Fällen ist die Transformation durch reciproke Polaren schon von Euler, Monge, Legendre und Brianchon angewandt worden. Als ein allgemeines geometrisches Princip wurde sie aber erst durch Poncelet*) aufgestellt. Er formulierte sie ausdrücklich und erkannte ihre ausserordentliche Bedeutung als Übertragungsprincip, indem er manche schöne Anwendungen gab. Auf ihre Bedeutung für gewisse Differentialgleichungen kommen wir später (S. 32) zu sprechen. Geschichtliches.

Zwischen der *Transformation durch reciproke Polaren P* hinsichtlich eines Kreises *k* mit dem Radius 1 und dem Punkt *O* als Mittelpunkt, ferner der *Transformation durch reciproke Radien R* mit *O* als Pol sowie der *Fusspunkt-Transformation F* mit *O* als Pol besteht eine interessante Beziehung**). Beziehgn. zw. einigen Trf.

Ist (x, y) ein beliebiger *Punkt* der Ebene, bezogen auf ein rechtwinkliges Axenkreuz, dessen Anfangspunkt *O* ist, so wird er durch die Fusspunkt-Transformation *F* in den *Kreis* verwandelt, dessen Durchmesser die Strecke von *O* nach dem Punkte (x, y) ist (siehe Fig. 14) und dessen Gleichung also lautet:

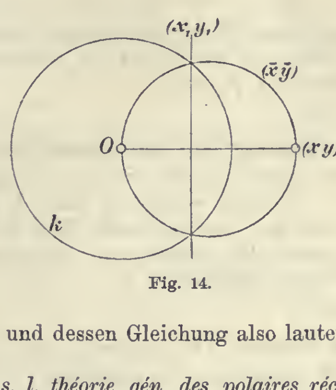

Fig. 14.

*) *Traité des propr. proj.*, 1822, u. *Mém. s. l. théorie gén. des polaires réciproques,* 1824 in d. Pariser Academie vorgelegt, Crelle's Journal Bd. 4, 1829, S. 1.

**) Sie wurde von Quetelet gegeben (*Résumé d'une nouvelle théorie des caustiques*, Nouv. Mémoires de l'Académie de Bruxelles, Bd. 4, 1827, S. 81).

$$\left(\bar{x} - \frac{x}{2}\right)^2 + \left(\bar{y} - \frac{y}{2}\right)^2 - \frac{x^2 + y^2}{4} = 0,$$

geschrieben in den laufenden Coordinaten $\bar{x}$, $\bar{y}$. (Vgl. S. 19.) Führen wir nun nachträglich die Transformation durch reciproke Radien R aus, so geht der allgemeine Punkt ($\bar{x}$, $\bar{y}$) des soeben erhaltenen Kreises über in den Punkt:

$$x_1 = \frac{\bar{x}}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}, \quad y_1 = \frac{\bar{y}}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2},$$

(vgl. S. 6), also der Kreis selbst, wie durch Einführen dieser neuen Coordinaten in seine Gleichung hervorgeht, in die *Gerade*

$$xx_1 + yy_1 - 1 = 0.$$

Die Aufeinanderfolge FR verwandelt also den Punkt (x, y) in seine *Polare* hinsichtlich des Kreises k.

Ferner, liegt eine beliebige Gerade vor:

$$ax + by - 1 = 0,$$

so geht sie durch die Fusspunkt-Transformation F in den Punkt

$$\bar{x} = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \bar{y} = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

über. Die Transformation durch reciproke Radien R nun verwandelt diesen Punkt in den Punkt

$$x_1 = a, \quad y_1 = b,$$

der aber der *Pol* der gegebenen Geraden hinsichtlich des Kreises k ist.

Die Aufeinanderfolge FR ist somit eine Operation, die jeden Punkt in seine Polare und jede Gerade in ihren Pol hinsichtlich des Kreises k verwandelt, mit anderen Worten: *Die Aufeinanderfolge FR ist äquivalent der Transformation durch reciproke Polaren P,* symbolisch ausgedrückt:

(23) $$FR = P.$$

Da die Transformation durch reciproke Radien R und die durch reciproke Polaren P beide involutorisch sind, also

$$RR = 1, \quad PP = 1$$

ist, wenn 1 die identische Transformation, bei der alles in Ruhe bleibt, bezeichnen soll, so können wir unsere symbolische Formel noch anders schreiben. Führen wir nämlich in (23) beiderseits nachträglich R noch einmal aus, so kommt links nur F, also:

(24) $$F = PR,$$

in Worten: *Die Aufeinanderfolge der Transformation durch reciproke Polaren und der durch reciproke Radien ist äquivalent der Fusspunkt-Transformation.*

Ferner, wenn wir nach P einmal F, das andere Mal PR ausführen, so muss das Ergebnis beide Male nach der letzten Formel dasselbe sein. Einerseits kommt PF, andererseits $P(PR)$ oder, was dasselbe ist, $PPR = R$, sodass wir drittens erhalten

(25) $$PF = R,$$

in Worten: *Die Aufeinanderfolge der Transformation durch reciproke Polaren und der Fusspunkt-Transformation ist äquivalent der Transformation durch reciproke Radien.*

Aus der ursprünglichen Formel

(23) $$FR = P$$

hätten wir die beiden anderen auch so ableiten können: Bezeichnet R^{-1} die zur Transformation R inverse Transformation, so können wir in unserer Gleichung beiderseits den symbolischen Factor R^{-1} hinzufügen:

$$FRR^{-1} = PR^{-1}.$$

Die Aufeinanderfolge RR^{-1} ist aber die identische Transformation. Also kommt:

$$F = PR^{-1}.$$

Aber die Transformation durch reciproke Radien R ist zu sich selbst invers, d. h. es ist $R^{-1} = R$. Somit kommt die obige Formel:

$$F = PR. \tag{24}$$

Durch Multiplication mit P^{-1}, der zu P inversen Transformation, leiten wir hieraus ab:

$$P^{-1}F = P^{-1}PR$$

oder:

$$P^{-1}F = R.$$

Da aber auch die Transformation durch reciproke Polaren zu sich selbst invers ist, so ist $P^{-1} = P$, sodass sich ergiebt:

$$PF = R. \tag{25}$$

§ 4. Übergang von Punkt- zu Liniencoordinaten.

Auch der Übergang von Punktcoordinaten zu Liniencoordinaten kann mit den Transformationen der Linienelemente, die Curven im allgemeinen in Curven überführen, in Verbindung gesetzt werden. Indem wir dies hier darlegen, bietet sich zugleich Gelegenheit, die Methode näher zu beleuchten, die Clairaut zur Integration der nach ihm benannten Differentialgleichung angewandt hat.

Ist

$$y - f(x) = 0$$

die Gleichung einer Curve, so lautet die Gleichung ihrer Tangente im Punkte (x, y):

$$\mathfrak{y} - y - y'(\mathfrak{x} - x) = 0,$$

wenn $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ die laufenden Punktcoordinaten darstellen und y' die Tangentialrichtung $f'(x)$ bezeichnet. Allgemein aber stellt

$$u\mathfrak{x} + v\mathfrak{y} + 1 = 0$$

die Gleichung einer Geraden dar, und u, v heissen die *Liniencoordinaten* dieser Geraden*). Demnach sind die Liniencoordinaten der Tangente: Liniencoordinaten.

$$u = \frac{-y'}{xy' - y}, \quad v = \frac{1}{xy' - y}. \tag{26}$$

---

*) Der Begriff Liniencoordinaten wurde von Plücker eingeführt durch seine Abhandlung: *Über eine neue Art, in der analytischen Geometrie Punkte und Curven durch Gleichungen darzustellen.* Crelle's Journal, Bd. 7, 1830, S. 107.

Längs der Curve sind y und y' Functionen $f(x)$ und $f'(x)$ von x, also auch u und v; oder auch: v ist eine Function von u. Die Curve $y = f(x)$ lässt sich daher, sobald sie keine Gerade ist, auch durch eine zwischen u und v bestehende Gleichung darstellen. Wir können nun den Differentialquotienten

$$v' \equiv \frac{dv}{du}$$

bilden. Es ergiebt sich aus (26) durch Differentiation das bemerkenswerte Resultat, dass sich dy' überall forthebt und v' die einfache Form erhält:

$$v' = -\frac{x}{y}. \tag{27}$$

Durch (26) und (27) sind u, v, v' als Functionen von x, y, y' dargestellt. Man verificiert leicht, dass sie die Relation erfüllen:

$$dv - v'du = \varrho(dy - y'dx),$$

in der

$$\varrho \equiv \frac{-1}{y(xy' - y)}$$

ist. Eine ähnliche Relation erhielten wir bekanntlich schon häufig. Ihre Bedeutung soll erst später erörtert werden.

Einf. der Liniencoord. in Diffgl. Nach diesen Vorbereitungen wollen wir annehmen, es liege eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung zwischen x und y vor:

$$\omega(x, y, y') = 0.$$

Sie wird ∞^1 Integralcurven besitzen:

$$\varphi(x, y, a) = 0,$$

wobei a die Integrationsconstante sei. Sind diese Integralcurven bekannt, so kann man y und y' als Functionen von x ausdrücken und also vermöge (26) auch die Integralcurven in Liniencoordinaten darstellen:

$$\Phi(u, v, a) = 0.$$

Indem man nun diese Gleichung nach u differenziert:

$$\Phi_u + \Phi_v v' = 0$$

und a aus den beiden letzten Relationen eliminiert, erhält man die Differentialgleichung der Curvenschar, aber geschrieben in den Liniencoordinaten:

$$\Omega(u, v, v') = 0.$$

Offenbar kann man aber vermöge der Relationen (26) und (27), die gestatten, x, y, y' durch u, v, v' auszudrücken:

$$x = \frac{-v'}{uv' - v}, \quad y = \frac{1}{uv' - v}, \quad y' = -\frac{u}{v}, \tag{28}$$

die Differentialgleichung $\Omega = 0$ direct aus der vorgelegten Differentialgleichung $\omega = 0$ ableiten, auch wenn man die Integralcurven noch garnicht kennt.

Durch diese Transformation gelingt es zuweilen, eine vorgelegte Differentialgleichung erster Ordnung in x, y auf eine integrierbare Form zu bringen. Wir wollen ein Beispiel betrachten, das eine Ausnahmestellung einnimmt und daher besondere Besprechung verlangt.

Wenden wir die Transformation insbesondere auf die *Clairaut'sche Differentialgleichung* an: Clairaut's Diffgl.

(29) $$y - xy' - f(y') = 0.$$

Sie geht, wenn die Werte (28) substituiert werden, über in:

(29′) $$\frac{1}{v} + f\left(-\frac{u}{v}\right) = 0.$$

Dies ist aber gar keine Differentialgleichung mehr, da sie frei von v' ist. Sie stellt also nur eine Curve dar, ausgedrückt in Liniencoordinaten. Es ergiebt sich somit das merkwürdige Resultat, dass hier die Methode der Transformation zunächst versagt. Aber nur scheinbar. Die Sache ist hier die, dass die Grössen $y - xy'$ und y' nach (26) längs einer Geraden constante Werte haben, sodass also die vorgelegte Differentialgleichung als Gleichung zwischen diesen beiden Grössen eine Schar von ∞^1 *Geraden* zu Integralcurven hat*). Aber eine Gerade lässt sich zwar durch eine Gleichung zwischen Punktcoordinaten, nicht aber durch eine Gleichung zwischen Liniencoordinaten darstellen. Diese Integralcurven gehen daher in der analytischen Darstellung (29′) nach der Transformation verloren. Andererseits besitzt die Clairaut'sche Differentialgleichung (29) die Umhüllende der ∞^1 Geraden als singuläre Integralcurve. Diese wird durch (29′) in Liniencoordinaten u, v dargestellt. Es erhellt zugleich, dass die Clairaut'schen Differentialgleichungen die einzigen sind, bei denen die Transformation in Liniencoordinaten zu einer von v' freien Gleichung führt, denn die Clairaut'schen Differentialgleichungen sind die einzigen, die ∞^1 Geraden als Integralcurven haben, und die Geraden sind die einzigen Curven, die nicht durch Gleichungen zwischen den Liniencoordinaten u, v darstellbar sind.

Wir wollen die analytische Operation der Einführung der Liniencoordinaten in anderer Weise geometrisch deuten: Liegt eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen x, y vor, so hat sie ∞^1 Integralcurven. Wenden wir die Andere Auffassung.

*) Die Theorie dieser Differentialgleichung enthält im Grunde den Keim des Begriffes Liniencoordinate, wie Chasles gelegentlich bemerkt.

Transformation durch reciproke Polaren hinsichtlich eines Kegelschnittes k an, so gehen die Integralcurven in ∞^1 neue Curven über, die ebenfalls eine gewisse Differentialgleichung erster Ordnung erfüllen werden. Diese Differentialgleichung kann auch dann aufgestellt werden, wenn die Integralcurven noch nicht bekannt sind. Wählen wir als den Kegelschnitt k diesen:

$$x^2 + y^2 + 1 = 0,$$

so lauten die Gleichungen der Transformation durch reciproke Polaren, wie wir im vorigen Paragraphen (vgl. Formel (18′), S. 24) sahen:

$$x_1 = \frac{-y'}{xy' - y}, \quad y_1 = \frac{1}{xy' - y}, \quad y_1' = -\frac{x}{y}. \tag{30}$$

Die Polarcurven der Integralcurven unserer Clairaut'schen Differentialgleichung

$$y - xy' - f(y') = 0 \tag{29}$$

erfüllen mithin die hieraus vermöge der Formeln (30) hervorgehende Differentialgleichung in x_1, y_1:

$$\frac{1}{y_1} + f\left(-\frac{x_1}{y_1}\right) = 0. \tag{29″}$$

Die Gleichungen (30) aber gehen aus den Gleichungen (26) und (27) hervor, wenn wir in diesen für u, v, v' die Grössen x_1, y_1, y_1' setzen, entsprechend die Gleichung (29″) aus (29′).

Die obige analytische Umformung der Differentialgleichung kommt also bei dieser Deutung darauf hinaus, dass man die Differentialgleichung der Polarcurven der Integralcurven hinsichtlich des Kreises

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

aufstellt. Bei der Transformation durch reciproke Polaren gehen aber die Geraden, also insbesondere die ∞^1 Integralgeraden der Clairaut'schen Gleichung, in Punkte über. (Siehe Fig. 15.) Nur die singuläre Integralcurve geht in eine Curve, den Ort dieser Punkte, über*).

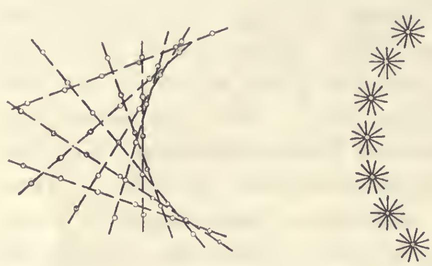

Fig. 15.

Rückwärts findet man aus den Punkten (x_1, y_1) der Curve (29″) die Integralcurven der vorgelegten Clairaut'schen Gleichung, indem man x_1, y_1 in (30) bestimmt wählt, doch so, dass sie (29″) erfüllen, und dann y' und y_1' eliminiert.

Verallg. v. Clairaut's Diffgl.

Betrachten wir die *verallgemeinerte Clairaut'sche Differentialgleichung:*

$$y - x\varphi(y') - f(y') = 0.$$

Wenden wir auf sie die Transformation durch reciproke Polaren hinsichtlich der Parabel

$$x^2 + 2y = 0$$

an, die wir ebenfalls im vorigen Paragraphen (unter (20), S. 24) aufstellten:

$$x_1 = -y', \quad y_1 = xy' - y, \quad y_1' = -x,$$

*) Von vornherein hätte man vielleicht vermutet, dass das Verschwinden der Integralcurven bei der Transformation (30) vielleicht daher rühre, dass diese Transformation gerade für die Integralcurven der Clairaut'schen Differentialgleichung irregulär werde. Dies ist aber nicht der Fall.

so geht die Differentialgleichung hervor:

$$x_1 y_1' - y_1 + y_1' \varphi(-x_1) - f(-x_1) = 0.$$

Dies aber ist eine *lineare* Differentialgleichung, die sich durch zwei Quadraturen integrieren lässt. Aus ihren Integralcurven erhält man die der vorgelegten Differentialgleichung, wenn man ihre Polarcurven hinsichtlich der erwähnten Parabel bestimmt. (Vgl. Monge, Corresp. sur l'école polyt. 1. Bd. (1805), S. 73.)

Kapitel 2.

Definition und Bestimmung der Berührungstransformationen der Ebene.

Im ersten Kapitel wurde erkannt, dass es neben den Punkttransformationen auch andere Operationen giebt, die sich als solche Transformationen der Linienelemente auffassen lassen, die Curven allgemeiner Lage wieder in Curven überführen. Bei diesen Operationen wurden immer gewisse specielle Curven in Punkte verwandelt.

In diesem Kapitel führen wir nun zuerst den Begriff *Elementverein* ein, der die Begriffe Curve und Punkt und zwar nur diese umfasst. An die Einführung dieses Begriffes schliesst sich eine fundamentale allgemeine Auffassung des Integrationsproblems gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung in x, y, die wir kurz entwickeln werden. Alsdann gestattet uns der Begriff Elementverein weiterhin, den Begriff *Berührungstransformation*, zu dem die oben erwähnten Operationen ohne Ausnahme gehören, zugleich analytisch scharf und begrifflich klar zu definieren. Darauf zeigen wir, wie man ohne Integration durch einfache Differentiationen und Eliminationen *alle* Berührungstransformationen der Ebene finden kann. Diese allgemeine Theorie wird durch interessante Beispiele erläutert werden, in denen einige besonders bemerkenswerte Kategorien von Berührungstransformationen aufgestellt werden sollen.

§ 1. Der Begriff: Elementverein.

Eine *Schar von* ∞^1 *Linienelementen* (x, y, y') wird durch zwei von einander unabhängige Gleichungen zwischen den drei Coordinaten x, y, y' definiert: Schar von ∞^1 Linienelem.

(1) $$\varphi(x, y, y') = 0, \quad \psi(x, y, y') = 0.$$

Elimination von y' liefert den Ort der Punkte (x, y) dieser ∞^1 Linienelemente.

Punktort der Elemente.

Entweder sind beide vorgelegte Gleichungen frei von y'; dann bestimmen sich x, y, und der Punktort der Linienelemente reduciert sich auf einen *Punkt*. Oder aber die Elimination von y' liefert nur eine Gleichung zwischen x und y. Dann ist der Punktort der Linienelemente eine *Curve* (siehe Fig. 16) und kann insbesondere eine *Gerade* sein.

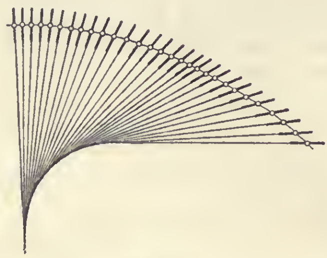

Fig. 16.

Nun wird aber auch durch jedes der ∞^1 Linienelemente eine Gerade gegeben. Sind u, v die Liniencoordinaten der Geraden des Elementes (x, y, y'), so lautet die Gleichung dieser Geraden, geschrieben in den laufenden Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, einerseits

$$u\mathfrak{x} + v\mathfrak{y} + 1 = 0,$$

andererseits

$$y'(\mathfrak{x} - x) - (\mathfrak{y} - y) = 0,$$

sodass (vgl. S. 29)

$$(2) \qquad u = \frac{-y'}{xy' - y}, \quad v = \frac{1}{xy' - y}$$

Geradenort der Elemente.

ist. Eine analytische Definition der Geraden der ∞^1 Linienelemente (1) ergiebt sich demnach durch Elimination von x, y, y' aus den vier Gleichungen (1) und (2). Diese Elimination liefert mindestens eine Gleichung zwischen den Liniencoordinaten u, v allein und höchstens zwei, da die beiden Gleichungen (1) von einander unabhängig sind. Im ersten Falle haben die Linienelemente ∞^1 verschiedene Geraden, die eine *Curve* (vgl. Fig. 16) oder aber einen *Punkt* umhüllen. Im zweiten Falle gehören alle ∞^1 Linienelemente derselben *Geraden* an.

Zusammenfallen v. Pkt.- u. Geradenort.

Eine Schar von ∞^1 Linienelementen besitzt also sowohl einen *Punktort* als auch einen *Geradenort*. Uns interessieren nur solche Scharen, deren Punktort und Geradenort zusammenfallen. Um aber vollständig klar zu sein, müssen wir die verschiedenen Möglichkeiten ins Auge fassen, die hierbei auftreten können.

Ist der gemeinsame Ort ein *Punkt*, so bilden die Linienelemente die Fig. 17.

Fig. 17.

Fig. 18.

Ist der gemeinsame Ort eine *Gerade*, so liegen die Linienelemente wie in Fig. 18.

Ist endlich der gemeinsame Ort eine *krumme Curve*, so wird sie von den Punkten der Elemente erfüllt, während die Geraden der Elemente ihre Tangenten sind. Hier ist zunächst der Fall möglich, dass die Gerade eines Elementes die Curve *nicht* in dem Punkte *desselben* Elementes berührt. Diesen Fall stellt Fig. 19 dar.

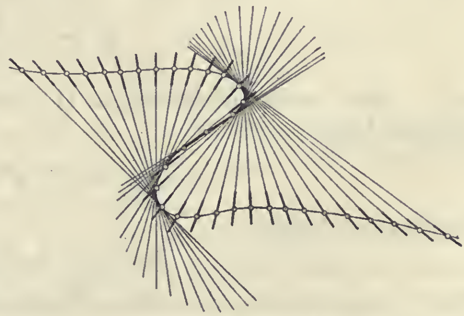

Fig. 19.

Es ist aber auch denkbar, *dass die Gerade eines jeden Elementes die Curve in dem Punkte desselben Elementes berührt*, wie in Fig. 20. Die durch Fig. 17 und 18 dargestellten Fälle gehen aus diesem hervor, wenn die Curve sich auf einen Punkt reduciert oder zur Geraden wird.

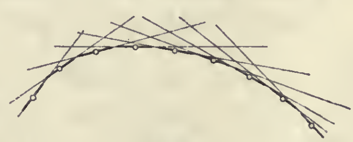

Fig. 20.

Charakteristisch für die Scharen von ∞^1 Linienelementen, die durch die Figuren 17, 18 und 20 dargestellt werden, ist es, dass auch dann noch Punkt- und Geradenort der ∞^1 Linienelemente zusammenfallen, wenn nur diejenigen Elemente der Schar betrachtet werden, die innerhalb eines gewissen Bereiches liegen. Dies ist aber, wie man sieht, mit der Figur 19 nicht der Fall.

Wir wollen im Folgenden nur solche Scharen von ∞^1 Linienelementen betrachten, deren Punktort mit ihrem Geradenort zusammenfällt und zwar auch dann, wenn man nur die Linienelemente innerhalb eines gewissen Bereiches in Betracht zieht.

Wir fragen nun nach der *analytischen* Bedingung dafür, dass der Punktort der ∞^1 Linienelemente (1) in dem soeben angegebenen Sinne mit ihrem Geradenorte zusammenfällt. Analytische Bedingung.

Wenn erstens dieser gemeinsame Ort ein Punkt ist (Fig. 17), so haben x und y bestimmte Werte, sodass infolge von (1) sowohl dx wie dy verschwindet, also

$$dx = 0, \quad dy = 0$$

ist.

Wenn zweitens der gemeinsame Ort kein Punkt ist (wie in Fig. 18 u. 20), so wird er durch eine Gleichung zwischen x und y dargestellt:

$$\omega(x, y) = 0.$$

Ist (x, y) ein beliebiger Punkt der Curve, so muss durch ihn ein Linienelement (x, y, y') der Schar (1) gehen und zwar so, dass die Gerade des Elementes die Curve ebenda berührt, d. h. es muss

$$y' = -\frac{\omega_x}{\omega_y}$$

sein. Die beiden Gleichungen (1) müssen sich also auf die Form bringen lassen:

$$\omega(x, y) = 0, \quad y' = -\frac{\omega_x}{\omega_y}.$$

Da aus der ersten

$$\omega_x dx + \omega_y dy = 0$$

folgt, so sieht man, dass diese Gleichungen und daher auch die ihnen äquivalenten Gleichungen (1) die Relation

$$dy - y' dx = 0$$

nach sich ziehen. Diese Relation besteht offenbar auch im vorigen Fall.

Also sobald der Punktort der ∞^1 Linienelemente (x, y, y')

(1) $$\varphi(x, y, y') = 0, \quad \psi(x, y, y') = 0$$

mit ihrem Geradenorte in dem angegebenen Sinne zusammenfällt, erfüllen die Coordinaten x, y, y' der ∞^1 Linienelemente die Differentialgleichung:

(3) $$dy - y' dx = 0.$$

Die Relation $dy - y' dx = 0$.

Umgekehrt wollen wir jetzt alle Scharen von Linienelementen (x, y, y') der Ebene bestimmen, deren Elemente die Differentialgleichung

(3) $$dy - y' dx = 0$$

erfüllen.

Betrachten wir zunächst eine Schar von ∞^1 Linienelementen. Sie lässt sich so darstellen:

$$x = X(t), \quad y = Y(t), \quad y' = P(t).$$

Hierin bedeutet t einen Parameter. Soll die Schar die Gleichung (3) erfüllen, so muss

(3') $$Y' - PX' \equiv 0$$

sein. Ist zunächst $X' \equiv Y' \equiv 0$, so werden X, Y frei von t, d. h. alle Linienelemente gehen durch einen bestimmten Punkt (x, y) (wie in Fig. 17). Ist $X' \not\equiv 0$, aber $Y' \equiv 0$, so muss $P \equiv 0$ sein, d. h. die ∞^1 Linienelemente erfüllen zwei Gleichungen

$$y = \text{Const.}, \quad y' = 0,$$

sind also die einer Geraden (wie in Fig. 18). Ist endlich $X' \mathrel{\overline{\overline{|}}}\!\!\!\!= 0$ und $Y' \mathrel{\overline{\overline{|}}}\!\!\!\!= 0$, so wird die Elementschar nach (3′):

$$x = X(t), \quad y = Y(t), \quad y' = \frac{Y'(t)}{X'(t)}.$$

Dies aber sind die Linienelemente der Curve (siehe Fig. 20):

$$x = X(t), \quad y = Y(t).$$

Insbesondere kann die Curve irgend eine Gerade sein. Wir gelangen also genau zu den Scharen von ∞^1 Linienelementen, bei denen der Punktort mit dem Geradenort zusammenfällt.

Indem wir nun eine Schar von ∞^2 Linienelementen ins Auge fassen, zeigen wir, dass eine solche Schar nie die Gleichung (3) erfüllt. Dass es eine Schar von ∞^3 Linienelementen auch nicht thut, folgt unmittelbar daraus, dass die Ebene gerade ∞^3 Linienelemente enthält, für die aber durchaus nicht (3) erfüllt ist.

Ist eine Schar von ∞^2 Linienelementen gegeben durch die Gleichungen:

$$x = X(\alpha, \beta), \quad y = Y(\alpha, \beta), \quad y' = P(\alpha, \beta), \tag{4}$$

in denen α, β die Parameter bedeuten, so ziehen sie nur die drei folgenden Gleichungen in dx, dy, dy' nach sich:

$$dx = \frac{\partial X}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial X}{\partial \beta} d\beta,$$

$$dy = \frac{\partial Y}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial Y}{\partial \beta} d\beta,$$

$$dy' = \frac{\partial P}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial P}{\partial \beta} d\beta.$$

Vermöge dieser Relationen sollte also (3) bestehen und zwar für alle Werte von $d\alpha$ und $d\beta$. Diese Forderung liefert die beiden Bedingungen:

$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha} - P\frac{\partial X}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial \beta} - P\frac{\partial X}{\partial \beta} = 0, \tag{5}$$

die also identisch bestehen müssten. Dies würde aussagen, dass die Functionaldeterminante von X, Y hinsichtlich der Grössen α, β verschwände, anders ausgedrückt, dass X, Y von einander abhängig wären. Die Relation, die dann zwischen X und Y bestände, wäre nun sicher nicht frei von Y, da sonst $X \equiv$ Const., also nach den Forderungen (5) entweder $Y \equiv$ Const. wäre, sodass (4) nur die ∞^1 Linienelemente eines Punktes darstellte, oder aber $P \equiv \infty$ wäre, was sich durch andere Wahl des Coordinatensystems vermeiden lässt. Es wäre also $Y \equiv \omega(X)$ zu setzen, und wir dürften dann X selbst als den einen Parameter α benutzen, hätten somit:

$$X \equiv \alpha, \quad Y \equiv \omega(\alpha), \tag{6}$$

während aus (5) noch

(7) $$P \equiv \omega'(\alpha)$$

folgte. Diese drei Gleichungen (6), (7) geben aber nur ∞^1 Linienelemente.

Fassen wir die Ergebnisse zusammen, so erhalten wir den

Deutung d. Relation. **Satz 1:** *Eine Schar von Linienelementen (x, y, y') der (x, y)-Ebene erfüllt dann und nur dann die Differentialrelation*

$$dy - y'dx = 0,$$

wenn sie aus gerade ∞^1 Elementen besteht und zwar entweder aus den Linienelementen einer Curve oder aus denen eines Punktes.

Eine Schar von Linienelementen (x, y, y') der Ebene, welche die Relation

$$dy - y'dx = 0$$

Verein von Linienelementen. erfüllt, nennen wir nun einen *Verein von Linienelementen* oder kurz einen *Elementverein.*

Der Satz 1 kann alsdann so ausgesprochen werden:

Satz 2: *Jeder Verein von Linienelementen der Ebene besteht aus den Linienelementen einer Curve oder aus den Linienelementen eines Punktes.*

Führen wir noch eine andere Ausdrucksweise ein:

Liegt eine Schar von ∞^1 Linienelementen (x, y, y') vor, etwa indem x, y, y' als Functionen eines Parameters t gegeben sind:

$$x = X(t), \quad y = Y(t), \quad y' = P(t),$$

Vereinigte Lage von Elementen. so sagen wir, *dass das Element (x, y, y') der Schar mit dem unendlich benachbarten Elemente $(x + dx, y + dy, y' + dy')$ vereinigt liegt,* wenn der Ausdruck

$$\frac{dy - y'dx}{dt}$$

oder also $Y' - PX'$ verschwindet.

Hiernach können wir einen Elementverein auch so definieren:

Eine Schar von ∞^1 Linienelementen der Ebene bildet einen Elementverein, wenn jedes Element der Schar mit dem infinitesimal benachbarten Elemente der Schar vereinigt liegt.

Geom. Deutung. Um diese Ausdrucksweise begrifflich zu erläutern, wollen wir nun eine ganz beliebige Schar von ∞^1 Linienelementen

$$x = X(t), \quad y = Y(t), \quad y' = P(t),$$

die nicht gerade einen Verein bilden, ins Auge fassen.

Die Gerade des Linienelementes (t) oder (x, y, y') hat in den Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ die Gleichung

$$\mathfrak{y} - Y - P(\mathfrak{x} - X) = 0.$$

Der Punkt des benachbarten Elementes $(t + dt)$ der Schar hat die Coordinaten

$$\mathfrak{x} = X + X'dt, \quad \mathfrak{y} = Y + Y'dt.$$

Seine Entfernung von der Geraden des ersten Elementes beträgt daher

$$\frac{Y' - PX'}{\sqrt{1 + P^2}} dt.$$

Dieser Ausdruck lehrt, dass eine Schar von ∞^1 Linienelementen einen Elementverein bildet, wenn allgemein die Entfernung des Punktes $(x + dx, y + dy)$ des folgenden Elementes von der Geraden des vorhergehenden Elementes (x, y, y') der Schar unendlich klein von mindestens *zweiter* Ordnung ist, vorausgesetzt, dass von den drei Grössen dx, dy, dy' eine als unendlich klein von erster Ordnung gewählt wird*).

Wir werden hin und wieder auch die folgende Redeweise anwenden: *Irgend zwei unendlich benachbarte Linienelemente* (x, y, y') und $(x + dx, y + dy, y' + dy')$ *liegen vereinigt, wenn der Ausdruck*

$$dy - y'dx$$

unendlich klein von höherer Ordnung ist, sobald wenigstens eine der drei Grössen dx, dy, dy' als unendlich klein von erster Ordnung aufgefasst wird.

Schliesslich machen wir darauf aufmerksam, dass alle im ersten Kapitel behandelten *Transformationen der Linienelemente* die Eigenschaft haben, *jeden Elementverein in einen Elementverein zu verwandeln,* da sie

---

*) Schon in seinen ersten Untersuchungen über Berührungstransformationen (in den Verhandlungen d. Gesellsch. d. Wiss. zu Christiania, 1871) betrachtete Lie consequent Flächen, Curven und Punkte im Raume als Orte von ∞^2 *Flächenelementen*, andererseits Curven und Punkte in der Ebene als Orte von ∞^1 *Linienelementen.* Die Bemerkung, dass sich diese Scharen von Flächen- bez. Linienelementen als die allgemeinsten Elementscharen *charakterisieren* lassen, die der Bedingung

$$dz - pdx - qdy = 0$$

bez.

$$dy - y'dx = 0$$

genügen, findet sich *explicite* zuerst in seiner Note: *Zur Theorie partieller Differentialgleichungen*, Götting. Nachr. 1872, S. 480. Daselbst wird ebenfalls die Bezeichnung: *vereinigte* Lage zweier Elemente zuerst eingeführt. Für Scharen von Elementen, unter denen jedes mit allen benachbarten vereint liegt, wurde in seinen älteren Arbeiten die Bezeichnung *Element-Mannigfaltigkeit* benutzt, die doch nicht so ausdrucksvoll ist wie die später von Engel vorgeschlagene Bezeichnung *Elementverein*, die wir daher — wie zuweilen bei früheren Gelegenheiten — in diesem Werke consequent benutzen.

die Curven im allgemeinen in Curven, in speciellen Fällen in Punkte und andererseits die Punkte in Punkte oder Curven überführen.

Wir werden im übernächsten Paragraphen alle Transformationen der Linienelemente betrachten, bei denen jeder Elementverein in einen Elementverein übergeht, und sie unter dem gemeinsamen Namen *Berührungstransformationen* zusammenfassen.

§ 2. Neue Auffassung des Integrationsproblems gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung.

Nachdem wir den Begriff Elementverein eingeführt und gesehen haben, dass er die beiden Begriffe Punkt und Curve in sich fasst und keine anderen, liegt es nahe, eine *neue und allgemeine Auffassung des* Gew. Diffgl. 1. O. in x, y. *Integrationsproblems der gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung in x, y:*

$$F(x, y, y') = 0 \tag{8}$$

zu entwickeln.

Eine derartige Differentialgleichung (8) stellt eine Gleichung zwischen den drei Coordinaten x, y, y' der Linienelemente der Ebene dar, *sie definiert demnach eine Schar von ∞^2 Linienelementen der Ebene.* Unter einer Integralcurve versteht man von jeher bekanntlich eine Curve, die in jedem ihrer Punkte (x, y) die Tangentialrichtung y' hat, die durch (8) gegeben wird. *Eine Integralcurve ist also eine Curve, deren ∞^1 Linienelemente der durch* (8) *definierten Schar von ∞^2 Linienelementen zugehören.*

Beispiel. Liegt z. B. die sehr einfache Differentialgleichung vor:

$$xy' - y = 0, \tag{9}$$

so definiert sie alle ∞^2 Linienelemente, deren Geraden durch den Anfangspunkt gehen (Fig. 21). Ihre Integralcurven sind bekanntlich diese Geraden durch den Anfangspunkt. Jede derselben ist ein Verein, gebildet von ∞^1 der ∞^2 Elemente, die durch die vorgelegte Differentialgleichung (9) definiert werden. Diese ∞^2 Elemente bestimmen jedoch ausser den Geraden durch den Anfang noch einen Elementverein, nämlich den Anfangspunkt, dessen sämtliche Elemente — für die $x = y = 0$, aber y' beliebig ist — die Gleichung (9) erfüllen. Wir wollen daher auch diesen *Punkt* zu den Integralgebilden der vorgelegten Differentialgleichung rechnen.

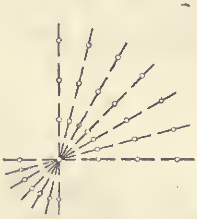

Fig. 21.

Kehren wir zur Betrachtung der allgemeinen Differentialgleichung (8) zurück. Wir sagen, dass ein Elementverein die gegebene Differentialgleichung

$$F(x, y, y') = 0 \tag{8}$$

erfüllt, wenn alle Linienelemente (x, y, y') des Vereines die Gleichung $F = 0$ erfüllen. Alle Elementvereine, welche die Gleichung (8) erfüllen, nennen wir *Integralgebilde der Differentialgleichung* (8). Integralgebilde.

Das Problem, eine gegebene gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung in x, y: Allg. Auffassung des Integrationsproblems.

$$F(x, y, y') = 0$$

*zu integrieren, kommt danach darauf hinaus, alle Elementvereine zu bestimmen, deren Elemente die Gleichung $F = 0$ erfüllen**).

Es giebt ingesamt ∞^2 Linienelemente (x, y, y'), welche die Gleichung (8) erfüllen. Sie ordnen sich in ∞^1 Elementvereinen an, also in ∞^1 Integralgebilden der Differentialgleichung (8). Diese Elementvereine können Curven oder Punkte sein. Ist die vorgelegte Differentialgleichung (8) nicht frei von y', so geht durch *jeden* Punkt (x, y) der Ebene ein Linienelement (x, y, y'), das der Gleichung (8) genügt. Die ∞^1 Integralgebilde können also nicht nur Punkte sein, sie sind vielmehr — da ihre Elemente über die ganze Ebene verbreitet sind — ∞^1 *Curven.* (Vgl. Fig. 22.)

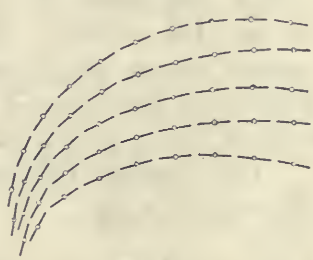

Fig. 22.

Wenn dagegen die vorgelegte Gleichung (8) frei von y' ist, so ist jeder Punkt (x, y) der durch

$$F(x, y) = 0 \tag{10}$$

dargestellten Curve ein Integralgebilde. In diesem Falle sind die allgemeinen Integralgebilde *Punkte.* Es ist aber auch die Curve (10) ein Integralgebilde, und zwar, wie wir sagen, ein *singuläres Integralgebilde.* Sie hat mit jedem der übrigen ∞^1 Integralgebilde ein Linienelement gemein. (Siehe Fig. 23.) Singul. Integralgebilde.

Fig. 23.

Auch in dem vorher besprochenen Falle, dass die Differentialgleichung (8) wirklich y' enthält, kann es Integralgebilde — Curven

*) Die im Texte gegebene allgemeine Auffassung des Problems, eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung $F(x, y, y') = 0$ zu integrieren, rührt von Lie her, der sie in den Göttinger Nachrichten, October 1872, S. 481, sogar für n Dimensionen ausdrücklich formulierte. Wenn einige Verfasser behaupten,

oder Punkte — geben, die nicht zu der Schar der allgemeinen Integralgebilde gehören und somit als *singuläre Integralgebilde* bezeichnet werden. (Vgl. das obige Beispiel.)

Einige weitere Beispiele mögen dies erläutern.

Beispiele. **1. Beispiel:** Vorgelegt sei die Differentialgleichung

$$y - xy' + \sqrt{1 + y'^2} = 0. \tag{11}$$

Die durch sie definierten ∞^2 Linienelemente sind leicht geometrisch zu charakterisieren. Denn der Abstand der Geraden des Linienelementes (x, y, y') vom Anfangspunkt ist gleich

$$\frac{y - xy'}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

also hier gleich Eins. Die ∞^2 Linienelemente, welche die Gleichung (11) erfüllen, sind mithin die Elemente der Tangenten an den Einheitskreis um den Anfangspunkt. Dies zeigt unmittelbar, dass diese Elemente folgende Vereine bilden: erstens die Tangenten und zweitens den Kreis. Mithin sind die Tangenten die ∞^1 allgemeinen Integralgebilde und der Kreis ist eine singuläre Integralcurve.

Die vorgelegte Differentialgleichung (11) geht aus der Differentialgleichung in x_1, y_1:

$$x_1 y_1' - y_1 = 0 \tag{9'}$$

dadurch hervor, dass man auf alle Linienelemente (x_1, y_1, y_1') der letzteren die Dilatation

$$x_1 = x - \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}, \quad y_1 = y + \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}, \quad y_1' = y'$$

rückwärts ausübt (vgl. § 2, 1. Kap., S. 15), durch die jedes Element parallel mit sich um die Strecke 1 verschoben wird. Durch die obige Fig. 21 (S. 40) sind die Linienelemente und Integralgebilde der Differentialgleichung (9′) angedeutet. Die Ausübung der Dilatation um die Strecke 1 führt die Integralgebilde von (9′) in die der vorgelegten Differentialgleichung (11) über. Die Geraden durch den Anfangspunkt gehen in die Tangenten des Einheitskreises, der Anfangspunkt — der bei (9′) ein singuläres Integralgebilde darstellt — in den Kreis über

Clairaut-sche Diffgl. **2. Beispiel:** Die *Clairaut'sche Differentialgleichung:*

$$y - xy' - f(y') = 0, \tag{12}$$

---

dass diese Auffassung des Integrationsproblems und überhaupt der Begriff Elementverein von Clebsch herrührt, so beruht das auf einem Missverständnis, das wahrscheinlich daher stammt, dass Lindemann in den ersten Band seiner Bearbeitung von Clebsch's Vorlesungen diese von Lie herrührenden Ideen aufgenommen hat, wobei er Lie allerdings selbst citiert.

die wir in § 4 des 1. Kap. (S. 31) besprachen, besitzt, wie wir sahen, nur eine krumme (singuläre) Integralcurve, während ihre allgemeinen Integralgebilde die Tangenten dieser krummen Curve sind. Die Transformation durch reciproke Polaren

$$(13) \qquad x_1 = \frac{-y'}{xy'-y}, \quad y_1 = \frac{1}{xy'-y}, \quad y_1' = -\frac{x}{y},$$

die wir auch damals (S. 32) anwandten, führt die Clairaut'sche Differentialgleichung über in diese:

$$(14) \qquad \frac{1}{y_1} + f\left(-\frac{x_1}{y_1}\right) = 0,$$

die frei von y_1' ist, daher als allgemeine Integralgebilde die Punkte der durch (14) dargestellten Curve besitzt, in welche die soeben erwähnten Integralgeraden vermöge der Transformation (13) übergehen, während die krumme Integralcurve von (12) in die singuläre Integralcurve (14) verwandelt wird. (Vgl. Fig. 15, S. 32.)

Die beiden Beispiele erläutern die Zweckmässigkeit der erweiterten Auffassung des Integrationsproblems. Ohne diese erweiterte Auffassung würde z. B. der Einheitskreis, der zu den Integralcurven der Differentialgleichung (11) gehört, vermöge der Dilatation, die wir oben anwandten, nicht wieder ein Integralgebilde der transformierten Differentialgleichung (9′) liefern. Ebenso würde, wie wir schon früher ausführten, durch die Transformation durch reciproke Polaren (13) keine der allgemeinen Integralcurven der Clairaut'schen Gleichung (12) in ein Integralgebilde der Differentialgleichung (14) übergehen. Zweckmässigkeit der erweit. Auffassung.

§ 3. **Der Begriff: Berührungstransformation.**

Schon zum Schlusse des ersten Paragraphen erwähnten wir, dass alle im ersten Kapitel betrachteten Transformationen der Linienelemente — sowohl die zuerst behandelten erweiterten Punkttransformationen als auch die später besprochenen Operationen der Dilatation, Fusspunkt-Transformation und Transformation durch reciproke Polaren — die Eigenschaft haben, jeden Elementverein in einen Elementverein zu verwandeln.

Wir definieren nun allgemein:

Synthet. Definition der Berührg trf.

Eine Transformation in den drei Veränderlichen x, y, y', den Coordinaten der Linienelemente der Ebene,

$$(15) \qquad x_1 = X(x, y, y'), \quad y_1 = Y(x, y, y'), \quad y_1' = P(x, y, y')$$

heisst eine **Berührungstransformation** *der (xy)-Ebene, wenn sie* *jeden Verein von Linienelementen* (x, y, y') *in einen Elementverein überführt**).

Danach sind die im ersten Kapitel betrachteten Transformationen sämtlich Berührungstransformationen.

Nach den Ergebnissen des ersten Paragraphen ist eine Schar von Elementen (x, y, y') nur dann ein Elementverein, wenn sie der Relation

(16) $$dy - y'dx = 0$$

genügt. Demnach wird eine Transformation (15) dann und nur dann eine Berührungstransformation sein, d. h. Elementverein in Elementverein überführen, wenn die Relation

(17) $$dy_1 - y_1'dx_1 = 0$$

vermöge der Gleichungen (15) als Folge von (16) besteht. Nun aber ist nach (15) die linke Seite dieser Gleichung (17) gleich

(18) $$dY - PdX \equiv (Y_x - PX_x)dx + (Y_y - PX_y)dy + (Y_{y'} - PX_{y'})dy'.$$

Dieser Ausdruck muss also verschwinden, sobald die Relation (16) besteht, welche Werte im Übrigen auch x, y, y', dx, dy, dy' haben mögen. Der Ausdruck (18) ist aber wie die linke Seite von (16) linear und homogen in dx, dy, dy'. Mithin verschwindet er dann und nur dann infolge von (16), wenn er sich von $dy - y'dx$ nur um einen von dx, dy, dy' freien Factor ϱ unterscheidet, wenn also eine Relation besteht von der Form

(19) $$dY - PdX \equiv \varrho(dy - y'dx),$$

in der ϱ eine Function von x, y, y' allein ist.

Demnach lässt sich die Definition der Berührungstransformationen analytisch so geben:

Analytische Definition d. Berührgs-trf.

Eine Transformation der Veränderlichen x, y, y':

(15) $$x_1 = X(x, y, y'), \quad y_1 = Y(x, y, y'), \quad y_1' = P(x, y, y')$$

heisst dann und nur dann eine Berührungstransformation, wenn vermöge der Transformation eine Relation von der Form

(20) $$dy_1 - y_1'dx_1 = \varrho(x, y, y') \cdot (dy - y'dx)$$

*besteht***).

Unabhängigkeit der Fctn. X, Y, P.

Wir bemerken nun: Die Relation (19) kann in zweierlei Weise identisch erfüllt sein. Entweder ist $\varrho \equiv 0$, d. h.

*) Hierbei ist — wie in allem Folgenden — stillschweigend die Einschränkung auf solche Bereiche zu machen, innerhalb derer sich die Functionen X, Y, P *regulär* verhalten.

**) Diese wahre Definition des Begriffes Berührungstransformation gab Lie in den Göttinger Nachrichten, Oct. 1872, S. 480. Vgl. auch die Verhandlungen d. Gesellsch. d. Wiss. zu Christiania aus den Jahren 1870—1873.

$$dY \equiv P dX.$$

Da links ein vollständiges Differential steht, muss dies auch rechts der Fall sein. Es muss daher P eine Function von X allein sein. In diesem Falle sind also die drei Gleichungen (15) nicht nach x, y, y' auflösbar, sie stellen keine Transformation dar. Dieser Fall ist mithin von vornherein ausgeschlossen.

Wenn andererseits ϱ nicht identisch gleich Null, also

(21) $$dY - P dX \not\equiv 0$$

ist, so sind die Functionen X, Y, P, die (19) identisch erfüllen, von einander unabhängig. Denn bestände zwischen ihnen eine Relation und nehmen wir zunächst an, sie enthalte P, so wäre etwa

$$P \equiv \Omega(X, Y).$$

Mithin liesse sich eine Function ω von X, Y so bestimmen, dass der Ausdruck $\frac{1}{\omega}(dY - P dX)$ ein vollständiges Differential df einer Function von X und Y oder also von x, y, y' wäre, sodass

(21′) $$dY - P dX \equiv \omega(x, y, y')\, df(x, y, y') \quad (\omega \not\equiv 0)$$

würde. Dasselbe würde sich ergeben, wenn die vorausgesetzte Relation nur X und Y enthielte. Nun kommt durch Einsetzen in (19):

$$\omega(f_x dx + f_y dy + f_{y'} dy') \equiv \varrho(dy - y' dx)$$

oder einzeln:

$$\omega f_x + \varrho y' \equiv 0, \quad \omega f_y - \varrho \equiv 0, \quad \omega f_{y'} \equiv 0,$$

woraus folgt:

$$f_x + y' f_y \equiv 0, \quad f_{y'} \equiv 0,$$

d. h. $f \equiv$ Const., was wegen (21′) mit (21) unvereinbar ist.

Es hat sich also ergeben:

Satz 3: *Erfüllen drei Functionen X, Y, P von x, y, y' identisch eine Bedingung von der Form*

$$dY - P dX = \varrho \cdot (dy - y' dx),$$

so sind X, Y, P dann und nur dann von einander unabhängige Functionen von x, y, y', wenn die Function $\varrho(x, y, y')$ nicht identisch Null ist.

Ferner:

Satz 4: *Die Gleichungen*

$$x_1 = X(x, y, y'), \quad y_1 = Y(x, y, y'), \quad y_1' = P(x, y, y')$$

bestimmen dann und nur dann eine Berührungstransformation der Ebene (x, y, y'), wenn die Functionen X, Y, P einer Bedingung von der Form

$$dY - P dX = \varrho \cdot (dy - y' dx)$$

identisch genügen, in der die Function $\varrho(x, y, y')$ nicht identisch Null ist.

Wir haben im ersten Kapitel bei den damals vorgeführten Beispielen von Transformationen der Linienelemente wiederholt Anlass genommen, das Bestehen der Relation (19) direct zu verificieren. Damit ist also der *analytische* Nachweis dafür erbracht, dass jene Transformationen Berührungstransformationen sind (vgl. S. 43 unten).

Aufeinanderfolge v. Berührtrf.

Es sei

(15) $$x_1 = X(x, y, y'), \quad y_1 = Y(x, y, y'), \quad y_1' = P(x, y, y')$$

eine Berührungstransformation, sodass also vermöge (15)

(20) $$dy_1 - y_1' dx_1 = \varrho(dy - y' dx)$$

wird. Ferner sei

(22) $$x_2 = U(x_1, y_1, y_1'), \quad y_2 = V(x_1, y_1, y_1'), \quad y_2' = W(x_1, y_1, y_1')$$

eine Berührungstransformation der Veränderlichen x_1, y_1, y_1' in x_2, y_2, y_2', sodass vermöge (22) eine Relation besteht:

(23) $$dy_2 - y_2' dx_2 = \sigma(dy_1 - y_1' dx_1).$$

Bildet man nun die Aufeinanderfolge der beiden Berührungstransformationen (15), (22), so wird das Linienelement (x, y, y') in ein Element (x_1, y_1, y_1') und schliesslich in ein Element (x_2, y_2, y_2') übergeführt. Die Coordinaten x_2, y_2, y_2' des neuen Elementes drücken sich durch die des Elementes (x, y, y') aus durch Relationen, die aus (22) durch Elimination von x_1, y_1, y_1' vermöge (15) hervorgehen. Die neuen Gleichungen stellen eine Transformation von x, y, y' in x_2, y_2, y_2' dar; wir behaupten, dass dies auch eine Berührungstransformation ist. Begrifflich leuchtet es ein. Analytisch folgt aus (20) und (23) sofort:

$$dy_2 - y_2' dx_2 = \varrho\sigma(dy - y' dx).$$

Satz 5: *Die Aufeinanderfolge zweier Berührungstransformationen ist wieder eine Berührungstransformation.*

Wie in § 2 ausgeführt wurde, sind die ∞^1 Integralgebilde einer vorgelegten Differentialgleichung erster Ordnung in x, y

$$F(x, y, y') = 0$$

die Elementvereine, in die sich alle ∞^2 durch $F = 0$ definierten Linienelemente anordnen.

Liegt nun eine Berührungstransformation

(15) $$x_1 = X(x, y, y'), \quad y_1 = Y(x, y, y'), \quad y_1' = P(x, y, y')$$

vor, und soll sie auf die gegebene Differentialgleichung ausgeführt werden, so heisst dies, dass die neuen Veränderlichen x_1, y_1, y_1' vermöge (15) in $F=0$ eingeführt werden sollen, wodurch eine Differentialgleichung erster Ordnung in x_1, y_1, y_1' hervorgeht:

$$F_1(x_1, y_1, y_1') = 0.$$

Da bei der Berührungstransformation (15) jeder Elementverein in einen Elementverein übergeht, da sie ferner die ∞^2 durch $F=0$ definierten Linienelemente in die durch $F_1 = 0$ definierten verwandelt, so folgt, dass sie jedes Integralgebilde von $F=0$ in eines von $F_1 = 0$ überführt. Also:

Satz 6: *Führt man die Berührungstransformation*

$$x_1 = X(x, y, y'), \quad y_1 = Y(x, y, y'), \quad y_1' = P(x, y, y')$$

auf eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung in x, y aus:

$$F(x, y, y') = 0,$$

wodurch die neue Differentialgleichung erster Ordnung in x_1, y_1 hervorgeht:

$$F(x_1, y_1, y_1') = 0,$$

so geht jedes Integralgebilde von $F=0$ vermöge der Berührungstransformation in ein Integralgebilde von $F_1 = 0$ über.

Beispiele hierzu haben wir schon in § 2 gegeben.

§ 4. Bestimmung aller Berührungstransformationen der Ebene.

Wir gehen nun dazu über, *Methoden abzuleiten, um alle Berührungstransformationen der Ebene wirklich aufstellen zu können.*

Eine Berührungstransformation führt nach ihrer Definition jeden Elementverein in einen Elementverein über. Jeder Punkt (x, y) allgemeiner Lage also wird in einen Elementverein, d. h. in einen Punkt oder in eine Curve, verwandelt. Wird er in einen *Punkt* (x_1, y_1) verwandelt, so sind die Coordinaten des letzteren Functionen der Coordinaten des ursprünglichen Punktes, d. h. die Transformation hat die Form:

$$x_1 = X(x, y), \quad y_1 = Y(x, y), \quad y_1' = P(x, y, y').$$

Aber in § 1 des ersten Kapitels, Satz 1, S. 13 haben wir erkannt, dass jede derartige Transformation, welche eine Relation von der Form

$$dy_1 - y_1' dx_1 = \varrho\,(dy - y' dx)$$

zur Folge hat, eine erweiterte Punkttransformation ist. *Jede Berührungstransformation also, bei der die Punkte allgemeiner Lage in Punkte übergehen, ist eine erweiterte Punkttransformation.* — Erweiterte Punkttrf.

Ist allgemein

(24) $$x_1 = X(x, y, y'), \quad y_1 = Y(x, y, y'), \quad y_1' = P(x, y, y_1')$$

eine Berührungstransformation, so lassen sich aus ihren drei Gleichungen Relationen frei von y' und y_1' ableiten und zwar entweder eine oder zwei. Sind es zwei, so sind sie, wie die Form von (24) zeigt, nach x_1, y_1 auflösbar. x_1, y_1 sind dann Functionen von x, y allein. Es liegt also der soeben besprochene Fall einer erweiterten Punkttransformation vor.

Sehen wir von diesem schon erledigten Fall ab, so gelangen wir

Eigentl. Berührgstrf.

zu den *eigentlichen Berührungstransformationen*, das soll heissen, zu denen, bei welchen ein Punkt allgemeiner Lage (x, y) in eine *Curve* übergeht. Ist (24) eine eigentliche Berührungstransformation, so ziehen also die Gleichungen (24) eine einzige von y' und y_1' freie Relation nach sich

Gleichg. zw. x, y, x_1, y_1 allein.

$$\Omega(x, y, x_1, y_1) = 0. \tag{25}$$

Man kann nun erkennen, dass unsere Berührungstransformation (24) durch Angabe dieser Gleichung (25) allein vollkommen definiert ist. Denn alle ∞^1 Linienelemente (x, y, y') des Punktes $(x = a,\ y = b)$ gehen bei der Berührungstransformation in ∞^1 Linienelemente (x_1, y_1, y_1') über, deren Punktort nach (25) die Gleichung hat:

$$\Omega(a, b, x_1, y_1) = 0. \tag{26}$$

Da aber Elementverein in Elementverein übergeht, so gehen die Linienelemente des Punktes (a, b) in die einer Curve über, und dies ist die Curve (26). Kennen wir daher die aus (24) abgeleitete Gleichung (25), so kennen wir auch die Curve (26), in die ein beliebiger Punkt (a, b) bei der Berührungstransformation übergeht. *Aber damit ist die Berührungstransformation selbst völlig bekannt.* Denn wählen wir irgend eine Curve c und fragen nach dem Elementverein, in den sie übergeht, so construieren wir zu jedem Punkte p der Curve diejenige Curve p_1, in die p übergeht. Die Umhüllende aller dieser Curven p_1 muss der Elementverein c_1 sein, in den die Curve c transformiert wird. (Siehe Fig. 24.)

Beliebige Annahme dieser Gl. $\Omega = 0$.

Wir wollen nun zeigen, dass, sobald eine *beliebige* Gleichung zwischen x, y, x_1, y_1:

$$\Omega(x, y, x_1, y_1) = 0 \tag{25}$$

vorgelegt ist, die so beschaffen ist, dass die Gleichung

$$\Omega(a, b, x_1, y_1) = 0$$

mit den Parametern a, b wirklich ∞^2 verschiedene Curven darstellt, alsdann durch die Gleichung (25) *stets* eine solche Operation bestimmt wird, die jedem Elementverein der (xy)-Ebene einen Elementverein der $(x_1 y_1)$-Ebene zuordnet, und ferner dass diese Operation eine Berührungstransformation ist.

Zunächst nämlich ordnen wir jedem Punkte $(x = a,\ y = b)$ eine Curve durch die Gleichung:

$$\Omega(a, b, x_1, y_1) = 0$$

zu. Ist nun c eine beliebige Curve der (xy)-Ebene, so umhüllen die Curven p_1, die den Punkten p von c zugeordnet sind, einen Elementverein c_1. So ist jeder Curve c ein Verein c_1 zugeordnet. (Siehe Fig. 24.) Es erübrigt, zu zeigen, dass die so bestimmte Zuordnung durch eine Berührungstransformation vermittelt wird.

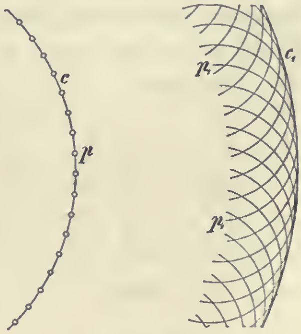

Fig. 24.

Betrachten wir zu diesem Zweck zwei Curven c, k der (xy)-Ebene, die sich an einer Stelle berühren. (Siehe Fig. 25.) Sie haben an dieser Stelle zwei benachbarte Punkte p, $\bar{p}$ gemein. Die den Curven c, k zugeordneten Curven c_1, k_1 der $(x_1 y_1)$-Ebene sind also die Umhüllenden von je ∞^1 Curven, und diese beiden Curvenscharen haben zwei unendlich benachbarte Curven p_1 und $\bar{p}_1$ gemein. Daher berühren c_1 und k_1 einander im Schnittpunkt von p_1 und $\bar{p}_1$.

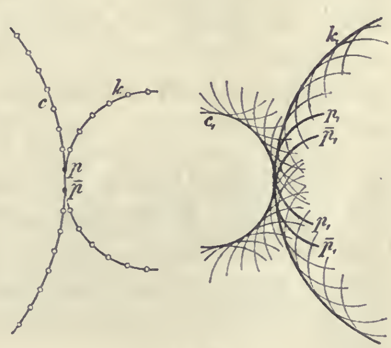

Fig. 25.

Betrachten wir überhaupt alle Curven k der (xy)-Ebene, die c an derselben Stelle berühren, also dort mit c ein Linienelement l gemein haben, so lehrt die soeben gegebene Überlegung, dass die zugeordneten Curven k_1 mit der Curve c_1 sämtlich ein gewisses Linienelement l_1 gemein haben. Unsere Operation bestimmt somit eine Zuordnung der Linienelemente l der (xy)-Ebene zu den Linienelementen l_1 der $(x_1 y_1)$-Ebene. Dabei entsprechen allen Linienelementen l einer Curve c alle Linienelemente l_1 der zugeordneten Curve c_1. Dass auch umgekehrt jedem Linienelement l_1 ein Element l entspricht, liegt darin, dass die erhaltene Operation auch jeder Curve c_1 der $(x_1 y_1)$-Ebene eine Curve c der (xy)-Ebene zuordnet. Denn es giebt ja ∞^1 Curven p_1 oder

$$\Omega(a, b, x_1, y_1) = 0,$$

die eine vorgelegte Curve c_1 der $(x_1 y_1)$-Ebene berühren. Diesen ∞^1 Curven p_1 entsprechen aber in der (xy)-Ebene die Punkte p einer Curve c, die somit die c_1 zugeordnete Curve ist. (Siehe Fig. 24 auf voriger Seite.)

Unsere durch (25) definierte Operation ist also in der That eine Berührungstransformation. Sie verwandelt jeden allgemein gewählten Punkt p in eine Curve p_1 und alle Curven durch p in Curven, die p_1 berühren. (Fig. 26.) Ferner führt sie jede allgemeine Curve in eine Curve über. Nur die Curven

$$\Omega(x, y, \alpha, \beta) = 0$$

gehen in Punkte über. Denn der allgemeine Punkt p oder (a, b) einer solchen Curve, für den also

$$\Omega(a, b, \alpha, \beta) = 0$$

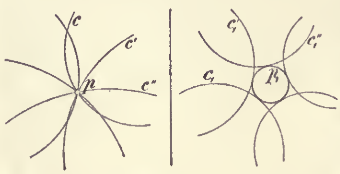

Fig. 26.

ist, geht über in eine Curve p_1:

$$\Omega(a, b, x_1, y_1) = 0. \tag{26}$$

Alle diese Curven p_1 aber gehen durch den Punkt (α, β), da die letzte Gleichung durch $x_1 = \alpha$, $y_1 = \beta$ befriedigt wird. Das Umhüllungsgebilde ist mithin der *Punkt* (α, β).

Dass wir oben ausdrücklich voraussetzten, dass die Gleichung

$$\Omega(a, b, x_1, y_1) = 0$$

∞^2 verschiedene Curven darstellen soll, hat seinen Grund darin, dass dies bei einer Berührungstransformation stets der Fall sein muss. Denn da alle Punkte (x, y) der Ebene alle ∞^3 Linienelemente in ∞^2 Vereine verteilen, so müssen auch die transformierten Elementvereine alle ∞^3 Elemente umfassen, also auch ∞^2 verschiedene Curven vorstellen.

Mit den vorhergehenden Überlegungen ist zunächst auf *synthetischem* Wege der Satz bewiesen worden:

Ergebnis. **Satz 7:** *Jede Berührungstransformation in x, y, y', die nicht bloss eine erweiterte Punkttransformation ist, ordnet den ∞^2 Punkten (x, y) der Ebene ∞^2 verschiedene Curven zu, die durch eine Gleichung von der Form*

$$\Omega(x, y, x_1, y_1) = 0$$

in den laufenden Coordinaten x_1, y_1 definiert werden. Umgekehrt definiert jede solche Gleichung

$$\Omega(x, y, x_1, y_1) = 0,$$

die ∞^2 verschiedene Curven in x_1, y_1 darstellt, sobald x, y als Parameter betrachtet werden, eine bestimmte Berührungstransformation in der vorhergehenden Weise.

Wir bemerkten vorhin, dass den Curven

(27) $$\Omega(x, y, \alpha, \beta) = 0$$

in x, y die ∞^2 Punkte ($x_1 = \alpha$, $y_1 = \beta$) entsprechen. Also muss (27) auch ∞^2 verschiedene Curven darstellen. Daher:

Satz 8: *Ordnet die Gleichung*

$$\Omega(x, y, x_1, y_1) = 0$$

den ∞^2 Punkten (x, y) ∞^2 von einander verschiedene Curven in x_1, y_1 zu, so ordnet sie auch den ∞^2 Punkten (x_1, y_1) ∞^2 von einander verschiedene Curven in x, y zu.

Wir wollen auch auf rein *analytischem* Wege alle Berührungstransformationen der Ebene bestimmen. **Anal. Bestimmung aller Berührgstrf.**

Wenn die Gleichungen

(24) $$x_1 = X(x, y, y'), \quad y_1 = Y(x, y, y'), \quad y_1' = P(x, y, y')$$

eine Berührungstransformation darstellen, so liefert die Elimination von y' und y_1' aus ihnen entweder eine oder zwei Relationen zwischen x, y, x_1, y_1. Ergeben sich zwei Relationen, so müssen sie notwendig nach x_1 und y_1 auflösbar sein, also x_1 und y_1 als Functionen von x, y ergeben, anders ausgedrückt: Die beiden ersten Gleichungen (24) sind frei von y'. Alsdann aber muss die Berührungstransformation, wie wir wissen, eine erweiterte Punkttransformation sein.

Es bleibt somit der Fall der *eigentlichen* Berührungstransformationen übrig, in dem die Elimination von y' und y_1' aus (24) *nur eine Relation zwischen x, y, x_1, y_1 liefert:* **Gleichung $\Omega = 0$.**

(25) $$\Omega(x, y, x_1, y_1) = 0.$$

Zwischen den Incrementen dx, dy, dx_1, dy_1 besteht in diesem Falle nur die eine Relation

(28) $$\Omega_x dx + \Omega_y dy + \Omega_{x_1} dx_1 + \Omega_{y_1} dy_1 = 0.$$

Die Gleichungen (24) stellen nun nach Satz 4 des § 3 (S. 45) dann und nur dann eine Berührungstransformation dar, wenn zwischen diesen Incrementen infolge von (24) eine Relation besteht von der Form

(29) $$dy_1 - y_1' dx_1 = \varrho\,(dy - y' dx),$$

in der ϱ eine nicht verschwindende Function von x, y, y' ist. Der Vergleich mit (28) lehrt also, dass infolge von (24)

$$\frac{\Omega_x}{\varrho y'} = \frac{\Omega_y}{-\varrho} = \frac{\Omega_{x_1}}{-y_1'} = \frac{\Omega_{y_1}}{1}$$

sein muss oder also nach Elimination von ϱ:

(30) $$\Omega_x + y'\Omega_y = 0, \quad \Omega_{x_1} + y_1'\Omega_{y_1} = 0$$

oder endlich

(31) $$y' = -\frac{\Omega_x}{\Omega_y}, \quad y_1' = -\frac{\Omega_{x_1}}{\Omega_{y_1}}.$$

Mithin müssen die drei Relationen (25) und (31) infolge von (24) allein erfüllt sein, oder also sie müssen den drei Gleichungen (24) äquivalent sein, da die Gleichung (25) frei von y' und y_1', die erste Gleichung (31) nur y' und die zweite Gleichung (31) nur y_1' enthält, natürlich abgesehen von x, y, x_1, y_1.

Ergebnis. Satz 9: *Jede Berührungstransformation der Ebene:*

$$x_1 = X(x, y, y'), \quad y_1 = Y(x, y, y'), \quad y_1' = P(x, y, y'),$$

aus deren Gleichungen nur eine Relation zwischen x, y, x_1, y_1 allein folgt:

$$\Omega(x, y, x_1, y_1) = 0,$$

wird bestimmt durch die drei Gleichungen:

$$\Omega = 0, \quad \Omega_x + y'\Omega_y = 0, \quad \Omega_{x_1} + y_1'\Omega_{y_1} = 0.$$

Wenn umgekehrt eine solche Relation $\Omega = 0$ vorgelegt wird, dass die drei Gleichungen:

(32) $$\Omega = 0, \quad \Omega_x + y'\Omega_y = 0, \quad \Omega_{x_1} + y_1'\Omega_{y_1} = 0$$

nach x, y, y' ebensowohl wie nach x_1, y_1, y_1' auflösbar sind, so bestimmen sie zunächst sicher eine Transformation der Linienelemente (x, y, y'). Sie bestimmen aber dann auch gerade eine Berührungstransformation, denn sie ziehen die Relation (28) nach sich, die sich infolge von (32) auf die Form bringen lässt:

$$\Omega_y(dy - y'dx) + \Omega_{y_1}(dy_1 - y_1'dx_1) = 0,$$

sodass eine Relation von der Form (29) besteht, in der

$$\varrho \equiv -\frac{\Omega_y}{\Omega_{y_1}}$$

ist. Die Relation (29) ist aber die Bedingung der Berührungstransformation. Also:

Satz 10: *Ist die Relation*

$$\Omega(x, y, x_1, y_1) = 0$$

so beschaffen, dass die drei Gleichungen

$$\Omega = 0, \quad \Omega_x + y'\Omega_y = 0, \quad \Omega_{x_1} + y_1'\Omega_{y_1} = 0$$

nach x, y, y' *ebensowohl wie nach* x_1, y_1, y_1' *auflösbar sind, so liefert die Auflösung nach* x_1, y_1, y_1' *eine Berührungstransformation. In dieser Weise erhält man alle Berührungstransformationen der Ebene, die nicht bloss erweiterte Punkttransformationen sind.*

Wir untersuchen nun, welche *analytische* Kriterien die Gleichung $\Omega = 0$ erfüllen muss, damit $\Omega = 0$ wirklich eine Berührungstransformation bestimmt. *Einerseits* zeigte die *begriffliche* Betrachtung, dass es notwendig ist und hinreicht, dass $\Omega = 0$ gerade ∞^2 von einander verschiedene Curven in x_1, y_1 darstellt, sobald x, y als Parameter aufgefasst werden. *Andererseits* zeigt die *analytische* Entwickelung, dass es notwendig ist und hinreicht, dass die drei Gleichungen (32) sowohl nach x, y, y' wie nach x_1, y_1, y_1' auflösbar sind. Bedingung für $\Omega = 0$.

Indem wir für beide Forderungen analytische Kriterien suchen, werden wir beide Male zu demselben Ergebnis gelangen, wie von vornherein klar ist.

Fragen wir uns zuerst, wann die drei Gleichungen (32) sowohl nach x, y, y' wie nach x_1, y_1, y_1' auflösbar sind. Die zweite Gleichung (32) bestimmt y', sobald nicht Ω_y infolge von $\Omega = 0$ verschwindet. Die erste und dritte sind nach x, y auflösbar oder, was auf dasselbe hinauskommt, die drei Gleichungen

$$\Omega = 0, \quad -y_1' + \lambda\Omega_{x_1} = 0, \quad 1 + \lambda\Omega_{y_1} = 0 \tag{33}$$

sind nach λ, x, y auflösbar, sobald ihre Functionaldeterminante hinsichtlich λ, x, y, nämlich

$$\begin{vmatrix} 0 & \Omega_x & \Omega_y \\ \Omega_{x_1} & \lambda\Omega_{xx_1} & \lambda\Omega_{yx_1} \\ \Omega_{y_1} & \lambda\Omega_{xy_1} & \lambda\Omega_{yy_1} \end{vmatrix}$$

nicht infolge von (33) verschwindet. Da nach der letzten Gleichung (33) $\lambda \neq 0$ und $\neq \infty$ ist, sobald Ω_{y_1} nicht infolge von $\Omega = 0$ verschwindet, so dürfen wir den Factor λ, mit dem die ganze Determinante behaftet ist, fortlassen, sodass die Determinante

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 0 & \Omega_x & \Omega_y \\ \Omega_{x_1} & \Omega_{xx_1} & \Omega_{yx_1} \\ \Omega_{y_1} & \Omega_{xy_1} & \Omega_{yy_1} \end{vmatrix}$$

bleibt. Die Gleichungen (32) sind mithin nach x, y, y' auflösbar, sobald weder Ω_y noch Ω_{y_1} infolge von $\Omega = 0$ noch endlich die Determinante Δ infolge von (33) verschwindet. Die Determinante Δ ist aber frei von y_1' und λ. Wir brauchen also nur zu verlangen, dass weder Ω_y noch Ω_{y_1} noch Δ infolge von $\Omega = 0$ verschwindet. Wäre $\Omega_y = 0$ infolge von $\Omega = 0$, so wäre offenbar auch $\Delta = 0$, ebenso wenn $\Omega_{y_1} = 0$ wäre infolge von $\Omega = 0$. Es verbleibt daher nur die Bedingung, dass Δ nicht infolge von $\Omega = 0$ verschwinden darf.

Da die Gleichungen (32) und ebenso Δ in x, y, y' und x_1, y_1, y_1' ganz symmetrisch gebaut sind, so ergiebt sich dieselbe Bedingung für die Auflösbarkeit von (32) nach x_1, y_1, y_1'.

Theorem 1: *Jede Berührungstransformation der Ebene, die nicht bloss die Erweiterung einer Punkttransformation ist, wird bestimmt durch ein Gleichungensystem von der Form*

$$\Omega(x, y, x_1, y_1) = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial x} + y' \frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} + y_1' \frac{\partial \Omega}{\partial y_1} = 0.$$

Die Gleichung $\Omega = 0$ ist dabei nur der einen Bedingung unterworfen, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial \Omega}{\partial x} & \frac{\partial \Omega}{\partial y} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial x_1} & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y \partial x_1} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial y_1} & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y_1} & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y \partial y_1} \end{vmatrix}$$

nicht infolge von $\Omega = 0$ verschwinden darf).*

Zweite Ableitg. d. Bedingg. für $\Omega = 0$.

Zu derselben Bedingung $\Delta \neq 0$ müssen wir, wie schon bemerkt, notwendig geführt werden, wenn wir verlangen, dass die Gleichung

$$\Omega(x, y, x_1, y_1) = 0 \tag{25}$$

∞^2 verschiedene Curven in x_1, y_1 darstelle, sobald x, y Parameter sind. Dies wollen wir jetzt verificieren. Soll die Gleichung (25) ∞^2 verschiedene Curven in x_1, y_1 darstellen, so ist dazu notwendig und hinreichend, dass kein dem Wertsystem x, y unendlich benachbartes Wertsystem $x + dx$, $y + dy$ vorhanden ist derart, dass die Curve (25) mit der Curve

$$\Omega(x + dx, y + dy, x_1, y_1) = 0,$$

beide geschrieben in x_1, y_1, übereinstimmt. Es müssen also die beiden Gleichungen

$$\Omega(x, y, x_1, y_1) = 0, \quad \Omega_x dx + \Omega_y dy = 0$$

in x_1, y_1 von einander verschieden sein für jeden Wert des Verhältnisses $\frac{dy}{dx}$. Oder: Es darf keine von x_1, y_1 unabhängige Grössen $\varkappa, \lambda$ geben derart, dass die beiden Gleichungen

$$\Omega(x, y, x_1, y_1) = 0, \quad \lambda \Omega_x + \varkappa \Omega_y = 0 \tag{34}$$

übereinstimmen. Nach bekannter Regel ist das Kriterium hierfür dieses: Es darf die Functionaldeterminante von (34) hinsichtlich x_1, y_1, also

*) Sophus Lie, Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania 1870—1873, Archiv for Math. og Naturvidenskab, Bd. I, Christiania 1876; Math. Annalen Bd. V, VIII und XI, S. 547.

$$\begin{vmatrix} \Omega_{x_1} & \Omega_{y_1} \\ \lambda\Omega_{xx_1} + \varkappa\Omega_{yx_1} & \lambda\Omega_{xy_1} + \varkappa\Omega_{yy_1} \end{vmatrix}$$

nicht infolge von (34) verschwinden. Sie stellt aber gleich Null gesetzt zusammen mit der zweiten Gleichung (34) ein in $\varkappa$, λ homogenes lineares Gleichungenpaar dar. Da es kein System von Lösungen $\varkappa$, λ vermöge der ersten Gleichung (34) haben darf, so folgt: Die Determinante dieses Gleichungenpaares hinsichtlich $\varkappa$, λ, nämlich

$$\begin{vmatrix} \Omega_x & \Omega_y \\ \Omega_{x_1}\Omega_{xy_1} - \Omega_{y_1}\Omega_{xx_1} & \Omega_{x_1}\Omega_{yy_1} - \Omega_{y_1}\Omega_{yx_1} \end{vmatrix},$$

darf nicht infolge von $\Omega = 0$ verschwinden. Diese Determinante ist aber gerade gleich dem negativen Werte der obigen Determinante Δ. Wir kommen also, wie es sein musste, genau zu der im Theorem formulierten Bedingung.

Dass man bei der Anwendnng des Theorems 1 Vorsicht walten lassen muss, lehrt folgendes Beispiel: Setzen wir **Beispiel.**

$$\Omega \equiv (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = 0,$$

so haben wir nach dem Theorem die beiden Gleichungen zu bilden:

$$x - x_1 + y'(y - y_1) = 0,$$
$$x - x_1 + y_1'(y - y_1) = 0.$$

Diese Gleichungen werden befriedigt durch:

$$x_1 = x, \quad y_1 = y, \quad y_1' = y',$$

was eine Berührungstransformation, nämlich die identische darstellt. Trotzdem aber ist im vorliegenden Falle, wie man leicht berechnet, die Determinante

$$\Delta \equiv -8(x - x_1)^2 - 8(y - y_1)^2 \equiv -8\Omega,$$

also gleich Null infolge von $\Omega = 0$. Der Fehler liegt hier einfach darin, dass $x_1 = x$, $y_1 = y$, $y_1' = y'$ gar nicht die Auflösung unserer drei Gleichungen ist. Denn wenn allein $x_1 = x$, $y_1 = y$ gesetzt wird, so werden die obigen drei Gleichungen schon befriedigt, welchen Wert auch y_1' haben mag. Die ganze Schwierigkeit verschwindet, sobald man die Gleichung $\Omega = 0$ in ihre beiden Factoren zerspaltet und für jeden einzelnen

$$x - x_1 \pm i(y - y_1) = 0$$

das Theorem 1 in Anwendung bringt.

In allen bisherigen Entwickelungen haben wir das rechtwinklige Cartesische Coordinatensystem (x, y) zu Grunde gelegt. Wir wollen aber nicht unterlassen, zu bemerken, *dass wir auch jedes andere System von Punktcoordinaten hätten benutzen können.* Liegen z. B. Polarcoordinaten r, φ vor, so bestimmen die drei Grössen r, φ und $\varphi' = \frac{d\varphi}{dr}$ einen Punkt (r, φ) mit hindurchgehender Geraden, also ein Linienelement. ∞^1 Linienelemente (r, φ, φ') bilden einen Elementverein, wenn sie die Linienelemente einer Curve oder eines Punktes sind, d. h. wenn sie die der Relation $dy - y'dx = 0$ ganz analoge Relation **Anderes Coordinatensystem.**

$$d\varphi - \varphi' dr = 0$$

erfüllen. Demgemäss ist eine Transformation von r, φ, φ' in $r_1, \varphi_1, \varphi_1'$ eine Berührungstransformation der Ebene, wenn vermöge ihrer eine Relation von der Form

$$d\varphi_1 - \varphi_1' dr_1 = \varrho(d\varphi - \varphi' dr)$$

besteht, in der ϱ nur von r, φ, φ' abhängt.

Hieraus erhellt, dass die vorherigen Betrachtungen sämtlich richtig bleiben, wenn man statt x, y, y' die Grössen r, φ, φ' und statt x_1, y_1, y_1' die Grössen $r_1, \varphi_1, \varphi_1'$ setzt.

Dasselbe gilt, wie nicht weiter ausgeführt zu werden braucht, welches System von Punktcoordinaten auch angewendet werden mag.

§ 5. Beispiele von Berührungstransformationen.

Schon im ersten Kapitel gaben wir eine Reihe von Beispielen von Berührungstransformationen. Wir wollen hier diese Transformationen mit Hülfe der im vorigen Paragraphen entwickelten Theorie nochmals ableiten und weitere Beispiele bringen.

1. Beispiel. **1. Beispiel:** Wählen wir die Gleichung $\Omega = 0$ in der Form

$$\Omega \equiv xx_1 + y + y_1 = 0,$$

so liefert unser Theorem 1 ausser dieser die beiden Gleichungen:

$$x_1 + y' = 0, \quad x + y_1' = 0,$$

sodass sich ergiebt:

$$x_1 = -y', \quad y_1 = xy' - y, \quad y_1' = -x. \tag{35}$$

Die Determinante Δ ist hier also nicht Null. Die Gleichungen (35) Trf. durch rec. Polaren. stellen *die Transformation durch reciproke Polaren* in bezug auf die Parabel

$$x^2 + 2y = 0$$

dar. (Vgl. § 3 d. 1. Kap., S. 24, Formeln (20).)

Die Annahme:

$$\Omega \equiv xx_1 + yy_1 + 1 = 0$$

führt entsprechend zur Transformation durch reciproke Polaren hinsichtlich des imaginären Kreises:

$$x^2 + y^2 + 1 = 0.$$

(Vgl. ebenda, Formeln (18').)

Wir fügen hier hinzu: Legen wir als Gleichung $\Omega = 0$ eine in x, y wie in x_1, y_1 lineare Gleichung zu Grunde:

$$\Omega \equiv (a_1x + b_1y + c_1)\, x_1 + (a_2x + b_2y + c_2)\, y_1 + (a_3x + b_3y + c_3) = 0, \tag{36}$$

so liefert unser Theorem 1 ausserdem die beiden Gleichungen:

$$a_1 x_1 + a_2 y_1 + a_3 + (b_1 x_1 + b_2 y_1 + b_3)\, y' = 0,$$
$$a_1 x + b_1 y + c_1 + (a_2 x + b_2 y + c_2)\, y_1' = 0.$$

Auflösung nach x_1, y_1, y_1' liefert, sobald man die Unterdeterminanten der Determinante

$$\Sigma \pm a_1 b_2 c_3$$

hinsichtlich a_i, b_i, c_i mit A_i, B_i, C_i bezeichnet:

$$(37)\qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{A_1 y' - B_1 + C_1 (y - xy')}{A_3 y' - B_3 + C_3 (y - xy')}, \\[2ex] y_1 = \dfrac{A_2 y' - B_2 + C_2 (y - xy')}{A_3 y' - B_3 + C_3 (y - xy')}, \\[2ex] y_1' = -\dfrac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}. \end{cases}$$

Hier ist die Determinante:

$$\varDelta \equiv \begin{vmatrix} 0 & a_1 x_1 + a_2 y_1 + a_3 & b_1 x_1 + b_2 y_1 + b_3 \\ a_1 x + b_1 y + c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 & a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Sie reduciert sich infolge von (36) auf die Determinante

$$\Sigma \pm a_1 b_2 c_3.$$

Es ist demnach vorauszusetzen:

$$\Sigma \pm a_1 b_2 c_3 \neq 0.$$

Unter dieser Voraussetzung ist (37) eine Berührungstransformation. Wie (36) lehrt, ordnet sie jedem Punkt eine Gerade und jeder Geraden einen Punkt zu. Sie ist eben die allgemeine *Dualität**). Inbesondere kann sie sich auf die Transformation durch reciproke Polaren vermöge eines Kegelschnittes reducieren. Dies tritt, wie sich leicht beweisen lässt, dann ein, wenn die Gleichung (36) symmetrisch in den Veränderlichenpaaren x, y und x_1, y_1 ist, und zwar lässt sich dann Dualität.

---

*) Im Jahre 1822 hatte Poncelet in dem Werke *Traité des propr. proj.* die Theorie der reciproken Polaren entwickelt. Ausführlicher stellte er sie in dem oben (S. 27) genannten *Mémoire* dar. Alsdann deutete Gergonne in den Annales de Mathém., Bd. 16, 1825—26, S. 209, das allgemeine Princip der Dualität an. Dass der Übergang von der Transformation durch reciproke Polaren zur allgemeinen Dualität immerhin ein gewisser Fortschritt war, gab Poncelet nie zu. Allerdings waren Gergonne's Entwickelungen, wie Poncelet mit vollem Recht hervorhob, vag und nicht frei von wesentlichen Fehlern. Eine richtige Würdigung beider Transformationen findet sich alsdann bei Möbius in seinem *barycentrischen Calcul* (1827) und später bei Plücker.

die Gleichung des zu Grunde liegenden Kegelschnitts auf die Form bringen:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & x \\ A_2 & B_2 & C_2 & y \\ A_3 & B_3 & C_3 & 1 \\ x & y & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

2. Beispiel.

2. Beispiel: Wählen wir $\Omega = 0$ in der Form:

$$\Omega \equiv (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - n^2 = 0,$$

so liefert das Theorem 1 noch die beiden Relationen

$$x - x_1 + (y - y_1)\, y' = 0, \quad x - x_1 + (y - y_1)\, y_1' = 0,$$

sodass aus allen dreien folgt:

$$(38) \qquad x_1 = x - \frac{n y'}{\sqrt{1 + y'^2}}, \quad y_1 = y + \frac{n}{\sqrt{1 + y'^2}}, \quad y_1' = y'.$$

Dilatation. Diese Gleichungen stellen die *Dilatation* um die Strecke n dar. (Vgl. § 2 des 1. Kap., Formeln (11'), S. 15.) Die Determinante Δ verschwindet hier nicht vermöge $\Omega = 0$, solange, wie wir voraussetzen, n von Null verschieden ist.

Aus der geometrischen Bedeutung der Dilatation erhellt unmittelbar, dass, wenn man zunächst die Dilatation D_n um die Strecke n, alsdann die Dilatation D_m um die Strecke m ausübt, das Endergebnis dasselbe ist, als ob man nur die Dilatation D_{n+m} um die Strecke $n + m$ ausgeführt hätte. Dies muss sich auch in den Formeln zeigen. In der That, die Dilatation D_n wird durch (38) dargestellt. Sie führt die Linienelemente (x, y, y') in neue Elemente (x_1, y_1, y_1') über. Die nun auszuübende Dilatation D_m um die Strecke m wird diese neuen Elemente in andere (x_2, y_2, y_2') verwandeln vermöge der Gleichungen:

$$(39) \qquad x_2 = x_1 - \frac{m y_1'}{\sqrt{1 + y_1'^2}}, \quad y_2 = y_1 + \frac{m}{\sqrt{1 + y_1'^2}}, \quad y_2' = y_1'.$$

Eliminieren wir hieraus vermöge (38) die Zwischenwerte x_1, y_1, y_1', so ergiebt sich

$$x_2 = x - \frac{(n + m)\, y'}{\sqrt{1 + y'^2}}, \quad y_2 = y + \frac{n + m}{\sqrt{1 + y'^2}}, \quad y_2' = y',$$

d. h. die Dilatation der ursprünglichen Elemente (x, y, y') um die Strecke $n + m$. Damit ist die Richtigkeit der symbolischen Gleichung:

$$D_n D_m = D_{n+m}$$

analytisch dargethan.

Es giebt insgesamt ∞^1 Dilatationen, da in den Gleichungen (38) ein Parameter n auftritt. Wir können nun also sagen: Die Schar aller ∞^1 Dilatationen hat die Eigenschaft, dass die Aufeinanderfolge zweier Dilatationen stets einer Dilatation äquivalent ist. Wir drücken dies dadurch aus, dass wir sagen: *Alle Dilatationen bilden eine Gruppe, und zwar eine Gruppe mit einem Parameter, also* — wie wir sagen wollen — *eine eingliedrige Gruppe von Berührungstransformationen.* **Eingl. Gruppe v. Dilatat.**

Wir werden im 6. Beispiele durch eine besondere Fragestellung abermals auf die Dilatationen gefürt werden.

Nunmehr wollen wir besondere Kategorien von Berührungstransformationen aufstellen, die dadurch definiert sind, dass sie mit gewissen einfachen Punkttransformationen *vertauschbar* sein sollen. Sind S und T zwei Transformationen, so sagen wir, dass sie vertauschbar sind, wenn die Aufeinanderfolge ST dasselbe giebt wie die Aufeinanderfolge TS, symbolisch ausgedrückt, wenn **Vertauschbarkt. von Trf.**

$$ST = TS$$

ist.

Es seien S, T zwei vertauschbare Berührungstransformationen und zwar T eine erweiterte Punkttransformation. Wenn der Punkt p vermöge T in den Punkt p_1 übergeht, so drücken wir dies durch die symbolische Gleichung aus:

$$(p)\,T = (p_1).$$

Entsprechend, wenn S den Punkt p in die Curve k überführt, so schreiben wir:

$$(p)\,S = (k).$$

Nun soll

$$(p)\,TS = (p)\,ST$$

sein, d. h.

$$(p_1)\,S = (k)\,T.$$

Weiss man also, dass der Punkt p vermöge S in die Curve k übergeht, und verwandelt T den Punkt p in den Punkt p_1, so geht letzterer vermöge S in die Curve über, die aus der Curve k durch T hervorgeht.

3. Beispiel: *Gesucht wird die allgemeinste Berührungstransformation, die mit allen Translationen vertauschbar ist.* **3. Beispiel.**

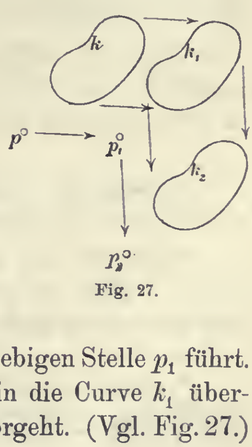

Fig. 27.

Ist S eine mit allen Translationen T vertauschbare Berührungstransformation und führt S einen bestimmten Punkt p in die Curve k über, so wissen wir auch, in welche Curven alle anderen Punkte bei S übergehen. Denn es giebt ja stets eine Translation, die p nach einer beliebigen Stelle p_1 führt. Nach dem Vorhergehenden wird S den Punkt p_1 in die Curve k_1 überführen, die aus k durch eben diese Translation hervorgeht. (Vgl. Fig. 27.)

Mithin gehen alle Punkte (x, y) bei S in congruente und gleichgestellte Curven k über. Die Gleichung $\Omega = 0$ hat infolgedessen hier die besondere Form:

$$\Omega(x - x_1, y - y_1) = 0. \tag{40}$$

Theorem 1 liefert

$$\frac{\partial \Omega}{\partial (x - x_1)} + \frac{\partial \Omega}{\partial (y - y_1)} y' = 0,$$
$$\frac{\partial \Omega}{\partial (x - x_1)} + \frac{\partial \Omega}{\partial (y - y_1)} y_1' = 0,$$

also $y_1' = y'$. Also wird jedes Element parallel mit sich verschoben. Durch Auflösung ergiebt sich etwa:

$$x - x_1 = \varphi(y'), \quad y - y_1 = \psi(y'),$$

sodass die gesuchte Berührungstransformation die Form hat:

$$x_1 = x - \varphi(y'), \quad y_1 = y - \psi(y'), \quad y_1' = y'.$$

Umgekehrt stellen drei solche Gleichungen eine Berührungstransformation dar, wenn sie eine Bedingung von der Form

$$dy_1 - y_1' dx_1 = \varrho (dy - y' dx)$$

erfüllen, die hier so lautet:

$$dy - y' dx - (\psi' - y' \varphi')\, dy' = \varrho (dy - y' dx),$$

d. h. es muss $\varrho \equiv 1$ und

$$\psi' - y' \varphi' \equiv 0$$

sein. Diese Relation wird in allgemeinster Weise durch die Annahme

$$\varphi \equiv - \frac{d\omega(y')}{dy'}, \quad \psi = \omega(y') - y' \frac{d\omega(y')}{dy'}$$

erfüllt. Also folgt:

Satz 11: *Die allgemeinste mit allen Translationen vertauschbare Berührungstransformation der Ebene hat die Form:*

$$x_1 = x + \frac{d\omega(y')}{dy'}, \quad y_1 = y - \omega(y') + y' \frac{d\omega(y')}{dy'}, \quad y_1' = y',$$

in der $\omega(y')$ eine beliebige Function von y' vorstellt).*

4. Beispiel. **4. Beispiel:** *Gesucht wird die allgemeinste Berührungstransformation, die mit allen Translationen längs der y-Axe vertauschbar ist.*

Geht bei der gesuchten Transformation S der Punkt p in die Curve k über, so geht jeder Punkt p_1, der durch Translation längs der y-Axe aus p hervorgeht, vermöge S in die Curve k_1 über, die

*) Beiläufig bemerken wir, dass der Inbegriff aller Berührungstransformationen, die mit allen Translationen vertauschbar sind, die Gruppeneigenschaft besitzt. Alle diese Transformationen bilden nach unsrer Terminologie eine *unendliche* Gruppe.

durch ebendiese Translation aus k hervorgeht. Mithin gehen alle Punkte einer zur y-Axe parallelen Geraden bei S in congruente und gleichgestellte Curven über, d. h. $\Omega = 0$ hat die Form:

$$\Omega(x, x_1, y - y_1) = 0. \tag{41}$$

Hieraus leitet man nach Theorem 1 die gesuchte Berührungstransformation ab.

5. Beispiel: *Gesucht wird die allgemeinste Berührungstransformation, die mit allen Rotationen um den Anfangspunkt vertauschbar ist.* 5. Beispiel.

Wir legen hierbei Polarcoordinaten r, φ zu Grunde, indem wir auf die Schlussbemerkungen des vorigen Paragraphen verweisen. Geht der Punkt p bei der gesuchten Berührungstransformation in die Curve k über, so gehen diese Gebilde durch Rotation um den Anfangspunkt in Punkte p_1 und Curven k_1 über derart, dass die gesuchte Berührungstransformation die p_1 in die k_1 verwandelt. Also hat $\Omega = 0$ hier die Form:

$$\Omega(r, r_1, \varphi - \varphi_1) = 0. \tag{42}$$

Setzt man x, x_1, y, y_1 statt $r, r_1, \varphi, \varphi_1$, so kommt die Gleichung (41) des vorigen Paragraphen. Der innere Grund hierfür liegt darin, dass die Rotationen um den Anfangspunkt in Polarcoordinaten:

$$r_1 = r, \quad \varphi_1 = \varphi + \text{Const.}$$

dieselben Gleichungsformen wie die Translationen längs der y-Axe in Cartesischen Coordinaten:

$$x_1 = x, \quad y_1 = y + \text{Const.}$$

haben.

6. Beispiel: *Gesucht wird die allgemeinste Berührungstransformation, die mit allen Rotationen um den Anfangspunkt und mit allen Translationen vertauschbar ist.* Sie wird mit allen *Bewegungen* der Ebene überhaupt vertauschbar sein, da sich jede solche aus einer Rotation um den Anfangspunkt und einer Translation zusammensetzen lässt. Die Gleichung $\Omega = 0$ muss in Cartesischen Coordinaten die Form (40) und in Polarcoordinaten die Form (42) haben. Nun hat die Gleichung 6. Beispiel.

$$\Omega(x - x_1, y - y_1) = 0$$

in Polarcoordinaten die Form (42) nur dann, wenn sie $x - x_1$ und $y - y_1$ in der Verbindung

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$$

enthält, sodass die Gleichung $\Omega = 0$ in der Form angenommen werden kann:

$$\Omega \equiv (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - n^2 = 0.$$

Diese Gleichung aber trat schon im 2. Beispiel auf. Also folgt:

Dilatation. **Satz 12:** *Die einzigen mit allen Bewegungen der Ebene vertauschbaren Berührungstransformationen sind die Dilatationen.*

7. Beispiel. **7. Beispiel:** *Gesucht wird die allgemeinste Berührungstransformation, die mit allen Rotationen um den Anfangspunkt und mit allen Streckungen vom Anfangspunkt aus vertauschbar ist.*

Unter Streckung vom Anfangspunkt aus ist die Ähnlichkeitstransformation

$$x_1 = n \cdot x, \quad y_1 = n \cdot y$$

zu verstehen. Die Gleichung $\Omega = 0$ der gesuchten Berührungstransformation muss zunächst nach dem Ergebnis des 5. Beispiels in Polarcoordinaten die Form (42) haben:

$$\Omega(r,\, r_1,\, \varphi - \varphi_1) = 0.$$

Sie muss nun ungeändert bleiben, wenn die Punkte (r, φ) und (r_1, φ_1) gleichzeitig der Streckung vom Anfang aus unterworfen, d. h. r und r_1 mit demselben Factor multipliciert werden. Sie hat deshalb die Form:

$$\Omega\left(\frac{r_1}{r},\, \varphi - \varphi_1\right) = 0.$$

Setzen wir

$$\lg r = \varrho, \quad \lg r_1 = \varrho_1,$$

so nimmt sie, geschrieben in den neuen Coordinaten ϱ, φ, die Form an:

$$F(\varrho - \varrho_1,\, \varphi - \varphi_1) = 0.$$

Vergleich mit der Gleichung (40) des 3. Beispiels zeigt, dass wir den damaligen Satz 11 unmittelbar übertragen können.

Jetzt sind ϱ, φ und die Grösse $\frac{d\varphi}{d\varrho}$, die wir mit $\overline{\varphi}$ bezeichnen wollen, die Linienelements-Coordinaten, die an die Stelle von x, y, y' treten. Wir finden daher als die Form der gesuchten Berührungstransformation diese:

$$\varrho_1 = \varrho + \frac{d\omega(\overline{\varphi})}{d\overline{\varphi}}, \quad \varphi_1 = \varphi - \omega(\overline{\varphi}) + \overline{\varphi}\,\frac{d\omega(\overline{\varphi})}{d\overline{\varphi}}, \quad \overline{\varphi}_1 = \overline{\varphi}.$$

Wir führen nun wieder Polarcoordinaten ein, indem wir setzen:

$$r = e^{\varrho}, \quad r_1 = e^{\varrho_1},$$

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dr} = \frac{d\varphi}{d\varrho} \cdot \frac{1}{r} = \frac{\overline{\varphi}}{r}, \quad \varphi_1' = \frac{\overline{\varphi}_1}{r_1},$$

sodass sich ergiebt:

$$(43) \qquad \begin{cases} r_1 = r e^{\frac{d\omega(r\varphi')}{d(r\varphi')}}, \\ \varphi_1 = \varphi - \omega(r\varphi') + r\varphi'\,\dfrac{d\omega(r\varphi')}{d(r\varphi')}, \\ \varphi_1' = \varphi' e^{-\frac{d\omega(r\varphi')}{d(r\varphi')}}. \end{cases}$$

Es wird vorzuziehen sein, als dritte Coordinate des Linienelements (r, φ, φ') statt φ' den Winkel τ zu benutzen, den das Element mit dem Radiusvector r bildet. (Vgl. Fig. 28.) Es ist

$$\operatorname{tg} \tau = r \frac{d\varphi}{dr} = r\varphi',$$

also das obige $\overline{\varphi}$, und analog

$$\operatorname{tg} \tau_1 = r_1 \varphi_1'.$$

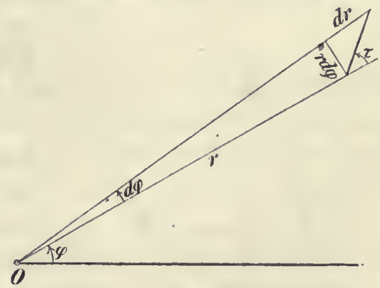

Fig. 28.

Eliminieren wir hiernach φ' und φ_1' durch Einführung von τ und τ_1 aus (43), so lauten die Gleichungen der Transformation:

$$(44)\qquad \begin{cases} r_1 = r e^{\frac{d\omega(\operatorname{tg}\tau)}{d\operatorname{tg}\tau}}, \\ \varphi_1 = \varphi - \omega(\operatorname{tg}\tau) + \operatorname{tg}\tau \dfrac{d\omega(\operatorname{tg}\tau)}{d\operatorname{tg}\tau}, \\ \tau_1 = \tau. \end{cases}$$

Satz 13: *Die allgemeinste Berührungstransformation, die mit allen Rotationen um den Anfangspunkt und allen Streckungen vom Anfangspunkt aus vertauschbar ist, hat die Gestalt:*

$$r_1 = r e^{\frac{d\omega(\operatorname{tg}\tau)}{d\operatorname{tg}\tau}},$$
$$\varphi_1 = \varphi - \omega(\operatorname{tg}\tau) + \operatorname{tg}\tau \frac{d\omega(\operatorname{tg}\tau)}{d\operatorname{tg}\tau},$$
$$\tau_1 = \tau,$$

wenn r, φ Polarcoordinaten sind und τ den Winkel des Linienelements (r, φ, τ) mit dem Radiusvector r bezeichnet.

Setzen wir z. B. in (44) für ω die Function:

$$\omega \equiv \operatorname{tg}\tau \lg \sin\tau - \tau + \frac{\pi}{2},$$

die ja eine Function von $\operatorname{tg}\tau$ ist, so ergiebt sich, da dann

$$\frac{d\omega}{d\operatorname{tg}\tau} = \lg \sin\tau$$

ist:

$$(45)\qquad r_1 = r\sin\tau, \quad \varphi_1 = \varphi + \tau - \frac{\pi}{2}, \quad \tau_1 = \tau.$$

Dies aber ist die *Fusspunkt-Transformation mit dem Anfangspunkt O als Pol.* Denn man erhält das Element (r_1, φ_1, τ_1) aus dem Element Fusspunkt-Trf.

(r, φ, τ), wenn man von O auf die Gerade des letzteren das Lot fällt (vgl. Fig. 29) und im Fusspunkt das neue Element so anbringt, dass es mit dem Radiusvector den Winkel τ bildet. Man vergleiche hierzu die in Fig. 9, S. 17, gegebene Construction.

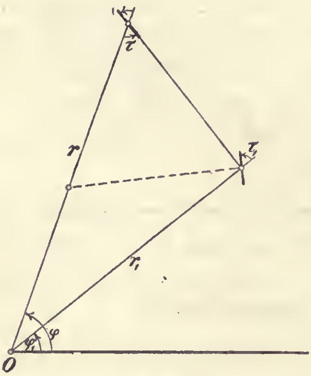

Fig. 29.

Wiederholg. der Fusspkt.-Trf.

Es ist klar, dass auch alle *Wiederholungen* $FF = F^2$, $FFF = F^3$ u. s. w. der Fusspunkt-Transformation F, die durch (45) dargestellt wird, mit allen Rotationen um O und Streckungen von O aus vertauschbar sind. Mithin müssen die Formeln (44) bei passender Wahl der Function $\omega(\operatorname{tg} \tau)$ diese Wiederholungen der Fusspunkt-Transformation F darstellen.

Führen wir nach (45) nochmals diese Fusspunkt-Transformation aus, so geht das Linienelement (r_2, φ_2, τ_2) hervor, für welches

$$r_2 = r_1 \sin \tau_1, \quad \varphi_2 = \varphi_1 + \tau_1 - \frac{\pi}{2}, \qquad \tau_2 = \tau_1,$$

also nach (45)

$$r_2 = r \sin^2 \tau, \quad \varphi_2 = \varphi + 2\tau - \pi, \qquad \tau_2 = \tau$$

ist. Dies ist daher F^2. Nochmalige Wiederholung von F giebt F^3:

$$r_3 = r \sin^3 \tau, \quad \varphi_3 = \varphi + 3\tau - \frac{3}{2}\pi, \quad \tau_3 = \tau$$

u. s. w. Endlich F^n wird dargestellt durch

$$r_n = r \sin^n \tau, \quad \varphi_n = \varphi + n\tau - \frac{n}{2}\pi, \quad \tau_n = \tau. \tag{46}$$

In der That geht diese Transformation aus (44) hervor bei der besonderen Annahme:

$$\omega = n \left\{ \operatorname{tg} \tau \lg \sin \tau - \tau + \frac{\pi}{2} \right\}, \tag{47}$$

d. h. wenn man für ω das n-fache der Function setzt, die zu wählen ist, wenn sie die Fusspunkt-Transformation F selbst geben soll.

Besonders interessant ist es nun, zu sehen, dass die Gleichungen (46) auch dann eine Berührungstransformation der Elemente (r, φ, τ) in die Elemente (r_n, φ_n, τ_n) darstellen, wenn n nicht gerade eine ganze positive Zahl, sondern eine beliebige Constante ist. Denn die Gleichungen (44) stellen ja stets eine Berührungstransformation dar, also auch bei der Annahme (47), wodurch eben (46) hervorgeht. So giebt die Annahme $n = -1$ die zur Fusspunkttransformation F inverse Berührungstransformation F^{-1}:

$$r_{-1} = \frac{r}{\sin \tau}, \quad \varphi_{-1} = \varphi - \tau + \frac{\pi}{2}, \quad \tau_{-1} = \tau.$$

Es liegt also eine continuierliche Schar von ∞^1 Berührungstransformationen (46) vor, die insbesondere die Fusspunkttransformation, ihre inverse und die Wiederholungen dieser beiden enthält. Die Schar hat die *Gruppeneigenschaft:* In der That, wenn wir nach der Transformation (46) diejenige ausführen, in der statt n eine Grösse m steht, so ergiebt sich als der Aufeinanderfolge beider äquivalent diejenige, bei der statt n die Grösse $n + m$ steht. Die Aufeinanderfolge zweier Transformationen der Schar (46) ist also stets wieder einer Transformation der Schar äquivalent. Die Gleichungen (46) stellen, wie wir sagen, *eine eingliedrige Gruppe von Berührungstransformationen* dar.

8. Beispiel: Die Transformation durch reciproke Polaren ist einer Verallgemeinerung fähig, die sich ergiebt, wenn man statt des Kegelschnittes eine algebraische Curve höherer Ordnung zugrunde legt. Wir erinnern zu dem Zweck an einige Betrachtungen der analytischen Geometrie der ebenen Curven: Polaren einer algebr. Curve.

Nehmen wir an, gegeben sei eine Curve k von n^{ter} Ordnung und es sei

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

ihre Gleichung geschrieben in den *homogenen* Punktcoordinaten x, y, z. Verstehen wir unter Uf die Operation

$$Uf \equiv x_1 \frac{\partial f}{\partial x} + y_1 \frac{\partial f}{\partial y} + z_1 \frac{\partial f}{\partial z},$$

ausgeführt auf eine Function f von x, y, z, so ist

$$U\varphi = 0$$

eine in x, y, z vom $(n-1)^{\text{ten}}$, in x_1, y_1, z_1 vom ersten Grade homogene Gleichung. Werden x_1, y_1, z_1 gegeben, so stellt $U\varphi = 0$ eine Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, geschrieben in x, y, z, dar, die sogenannte *erste Polare des Punktes* (x_1, y_1, z_1) hinsichtlich der gegebenen Curve k. Die Gleichung

$$U(U\varphi) = 0,$$

oder symbolisch kürzer

$$U^2\varphi = 0$$

geschrieben, ist in x, y, z homogen von $(n-2)^{\text{ter}}$, in x_1, y_1, z_1 homogen von zweiter Ordnung. Bei gegebenen x_1, y_1, z_1 stellt sie *die zweite Polarcurve des Punktes* (x_1, y_1, z_1) hinsichtlich der gegebenen Curve k dar. Allgemein ist

$$U^m\varphi = 0$$

eine in x, y, z vom $(n-m)^{\text{ten}}$, in x_1, y_1, z_1 vom m^{ten} Grade homogene Gleichung. Bei gegebenem Punkte (x_1, y_1, z_1) stellt sie eine Curve $(n-m)^{\text{ter}}$ Ordnung in x, y, z, *die* m^{te} *Polarcurve des Punktes* (x_1, y_1, z_1) *hinsichtlich* k, dar.

Man kann nun eine dieser Gleichungen als Gleichung $\Omega = 0$ einer Berührungstransformation benutzen, nachdem man in sie etwa vorher nicht-homogene Punktcoordinaten eingeführt hat, um Theorem 1 anwenden zu können. Wir wollen hier die homogene Schreibweise beibehalten, da wir nur einige Eigenschaften der betreffenden Berührungstransformation besprechen. Benutzen wir die Gleichung

$$U\varphi = 0,$$

die in x, y, z vom $(n-1)^{\text{ten}}$, in x_1, y_1, z_1 vom ersten Grade ist. Wir bemerken, dass sie bei gegebenen x, y, z auch die $(n-1)^{\text{te}}$ Polare des Punktes (x, y, z) darstellt, geschrieben in den laufenden Coordinaten x_1, y_1, z_1. Diese $(n-1)^{\text{te}}$ Polare ist von erster Ordnung, also eine gerade Linie. Wenn nun $U\varphi = 0$ als Gleichung $\Omega = 0$ benutzt wird, so erkennen wir: *Die dadurch definierte Berührungstransformation ordnet jedem Punkte* (x, y, z) *eine Gerade, nämlich seine* $(n-1)^{\text{te}}$ *Polare hinsichtlich* k, *zu. Dabei wird jeder ersten Polarcurve ein Punkt, nämlich ihr Pol, zugeordnet.*

Gehen wir allgemein von

$$U^m \varphi = 0$$

aus. Diese Gleichung stellt bei festen x, y, z die $(n-m)^{\text{te}}$ Polare des Punktes (x, y, z), bei festen x_1, y_1, z_1 die m^{te} Polare des Punktes (x_1, y_1, z_1) dar. Sie definiert mithin eine *Berührungstransformation, bei der jeder Punkt in seine* $(n-m)^{\text{te}}$ *Polarcurve und jede* m^{te} *Polarcurve in einen Punkt, ihren Pol, verwandelt wird.*

Berührgstrf. erzeugt aus ∞^1 Pktrf.

Wir wollen noch ganz kurz auf eine Erzeugungsart von Berührungstransformationen aus Scharen von Punkttransformationen*), die allerdings Interesse darbietet, *aber in diesem Werke nicht gebraucht wird*, aufmerksam machen.

Es liege eine Schar von ∞^1 Punkttransformationen vor:

$$(48) \qquad x_1 = \varphi(x, y, a), \quad y_1 = \psi(x, y, a),$$

in deren Gleichungen also a die Rolle eines Parameters spielt. Wir wollen die zum Parameterwert a gehörige Punkttransformation mit T_a bezeichnen. Wenn man nun auf ein und denselben Punkt (x, y) alle Punkttransformationen T_a ausübt, so geht er in ∞^1 durch (48) definierte Punkte (x_1, y_1) über. Die von ihnen gebildete Curve wird dargestellt durch die Gleichung, die aus (48) durch Elimination von a folgt. Es sei dies die Gleichung

$$(49) \qquad \Omega(x, y, x_1, y_1) = 0.$$

Erfüllt diese Gleichung (49) die in Theorem 1 ausgesprochene Bedingung, so definiert sie eine Berührungstransformation. Bei dieser Berührungstransformation geht also jeder Punkt (x, y) in die Curve c_1 der Punkte über, in die er durch alle ∞^1 Punkttransformationen T_a verwandelt wird. Liegt nun irgend eine Curve k vor, so erhält man (vgl. S. 48) die Curve k_1, in die sie übergeführt wird, als die Umhüllende der Curven c_1, in welche die Punkte von k verwandelt werden. Man kann nun beweisen, dass diese Curve k_1 auch die Umhüllende einer zweiten Curvenschar ist: Führt man auf die Curve k nach und nach alle Punkttransformationen T_a aus, so gelangt sie in ∞^1 verschiedene Lagen γ_a. Die Umhüllende dieser Curven γ_a ist dann ebenfalls k_1.

Anwendg. auf Rollcurven.

Ein Beispiel hierzu liefert die Theorie der *Rollcurven:* Liegen nämlich zwei einander berührende als starr gedachte Curven r und s vor, und rollt man r

---

*) Die Ableitung von Berührungstransformationen aus ∞^1 Punkttransformationen wurde gelegentlich von Bäcklund angedeutet. Engel hat sie in seiner Dissertation (*Zur Theorie der Berührungstransformationen*, Math. Ann. Bd. 27, S. 1, 1883) eingehend dargestellt. Man kann die im Text gegebene Entwickelung insbesondere für die Theorie der Zahnräder verwerten. Klein setzte die Construction der Zahnräder mit Berührungstransformationen in Verbindung.

auf s ab, so kommt r nach einander in verschiedene Lagen und jeder mit r starr verbundene Punkt p ebenfalls. Die mit r starr verbunden gedachten Punkte p der Ebene sind also gewissen ∞^1 Punkttransformationen T_a unterworfen, die hier Bewegungen sind. Bei allen T_a beschreibt ein Punkt p eine Curve, seine Rollcurve c_1. Indem man jedem Punkt p seine Rollcurve c_1 zuordnet, erhält man eine Berührungstransformation. Wählen wir irgend eine mit r starr verbundene Curve k, so erhält man die Curve k_1, in die sie durch die Berührungstransformation übergeht, auf zweierlei Weise: Einmal ist sie die Umhüllende der Rollcurven c_1 der Punkte p von k. Andererseits ist sie die Umhüllende aller Lagen γ_a, in welche die Curve k beim Abrollen successive übergeht.

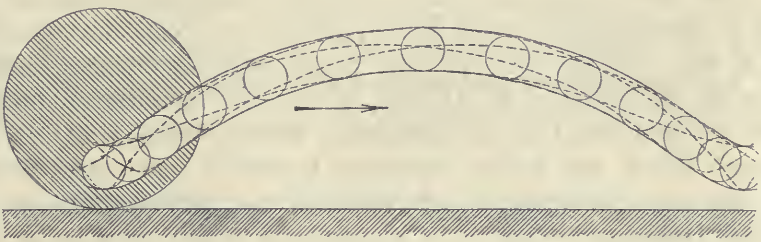

Fig. 30.

Dies erläutert Fig. 30, in der s eine Gerade, r ein auf ihr abrollender Kreis ist. Die Rollcurven c_1 der Punkte p sind dann Cykloiden. Als mit r starr verbundene Curve k ist ein Kreis gewählt. Die von den Punkten p von k ausgehenden Cykloiden c_1 haben dieselbe Umhüllende k_1 wie die Kreise γ_a, in die der Kreis k successive übergeht.

Kapitel 3.

Definition der Berührungstransformationen durch Differentialgleichungen.

Die Methode, die wir im vorigen Kapitel zur Aufstellung *aller* Berührungstransformationen entwickelt haben, verlangt nur die Ausführung von Differentiationen und Eliminationen, also das, was wir *ausführbare* Operationen nennen. Diese Methode gestattete uns, unter Anderem eine Anzahl Kategorien von Berührungstransformationen mit gewissen besonderen Eigenschaften ohne Mühe aufzustellen.

Es giebt nun aber noch eine zweite Methode zur Auffindung aller Berührungstransformationen, die allerdings die Integration von Differentialgleichungen verlangt. Wenn auch diese neue Methode deshalb einen weniger elementaren Charakter hat, so ist sie doch äusserst wichtig, ja *invariantentheoretisch* sogar wichtiger als die frühere.

Die neue Methode beruht darauf, dass *die Functionen X, Y, P in den Gleichungen einer Berührungstransformation*

$$x_1 = X(x, y, y'), \quad y_1 = Y(x, y, y'), \quad y_1' = P(x, y, y')$$

durch gewisse Differentialrelationen verknüpft sind, die notwendige und hinreichende Kriterien für die Berührungstransformation ergeben. Diese Relationen lehren, dass man z. B. die Function X völlig willkürlich — nur nicht constant — wählen darf, während dann Y eine beliebige von X unabhängige Lösung einer gewissen linearen partiellen Differentialgleichung ist. Die zugehörige Function P endlich ergiebt sich hinterher ohne weiteres.

Die soeben genannte lineare partielle Differentialgleichung lässt sich in durchsichtiger Weise deuten; sie sagt aus, dass die Functionen X, Y dann und nur dann zu einer Berührungstransformation gehören, wenn die Gleichungen $X =$ Const., $Y =$ Const. intermediäre Integrale einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung in x, y sind. Hieraus ziehen wir weitere Schlüsse, besonders auch über die Ausführung von Berührungstransformationen auf Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Endlich besprechen wir einige Entwickelungen, die von Lagrange und Plücker herrühren, welche unter den Vorläufern der allgemeinen Theorie der Berührungstransformationen der *Ebene* einen hervorragenden Platz einnehmen.

§ 1. Relationen zwischen den Functionen X, Y, P.

Vorausgeschickt sei, dass wir von jetzt an häufig statt des Zeichens y' das bequemere p, also entsprechend statt y_1' auch p_1 benutzen werden. —

Liegen nun drei Gleichungen von der Form

$$(1) \qquad x_1 = X(x, y, p), \quad y_1 = Y(x, y, p), \quad p_1 = P(x, y, p)$$

vor, so wissen wir, dass sie eine *Transformation* in den Veränderlichen x, y, p darstellen, wenn X, Y, P von einander unabhängig sind; wir wissen ferner, dass diese Transformation eine *Berührungstransformation* ist, sobald infolge von (1) eine Bedingung von der Form

$$(2) \qquad dY - P dX = \varrho \cdot (dy - p\, dx)$$

besteht. Die Function ϱ darf nicht identisch verschwinden, weil sonst die Functionen X, Y, P nicht von einander unabhängig sind. (Vgl. Satz 3, § 3 des vorigen Kapitels, S. 45.)

Die Bedingung (2) liefert die drei einzelnen:

$$(3) \qquad \begin{cases} Y_x - X_x P + p\varrho = 0, \\ Y_y - X_y P - \varrho = 0, \\ Y_p - X_p P = 0. \end{cases}$$

Dies sind drei in ϱ, $-P$ und 1 lineare homogene Gleichungen, deren Determinante also Null sein muss. Diese Determinante lautet:

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} Y_x & X_x & p \\ Y_y & X_y & -1 \\ Y_p & X_p & 0 \end{vmatrix}$$

oder ausmultipliciert:

$$(4') \qquad X_p(Y_x + pY_y) - Y_p(X_x + pX_y).$$

Wenn wir wollen, können wir diesen Ausdruck auch so schreiben:

$$(4'') \qquad (X_pY_x - X_xY_p) + p(X_pY_y - X_yY_p),$$

sodass die erste Klammer die Functionaldeterminante von X, Y hinsichtlich p, x, die zweite die Functionaldeterminante von X, Y hinsichtlich p, y enthält. Diese Determinante muss nun verschwinden, d. h. es ist:

Relation zwischen X und Y.

$$(5) \qquad X_p(Y_x + pY_y) - Y_p(X_x + pX_y) = 0.$$

Da Ausdrücke von der Form (4′) im Folgenden eine bedeutende Rolle spielen, so ist es zweckmässig, sie durch ein besonderes Zeichen darzustellen. Wir benutzen das seit Lagrange und Poisson gebräuchliche *Klammersymbol:*

Klammersymbol.

$$[XY].$$

Ehe wir weitergehen, halten wir es für angebracht, einige Eigenschaften des Klammerausdruckes und insbesondere Rechenregeln zu seiner Benutzung anzugeben. Der Ausdruck

$$(6) \qquad [XY] \equiv X_p(Y_x + pY_y) - Y_p(X_x + pX_y)$$

zeigt unmittelbar, dass

$$[YX] \equiv -[XY]$$

ist. Der Klammerausdruck ist also identisch Null, wenn die beiden Functionen X, Y übereinstimmen. Er ist auch dann Null, wenn Y eine Function von X oder eine der Functionen X, Y eine Constante ist. Da $[XY]$ in den partiellen Differentialquotienten von X und Y bilinear ist, so ergeben sich sofort noch folgende Regeln für das Rechnen mit diesem Symbole. Es ist allgemein:

$$[\varphi, \psi + \chi] \equiv [\varphi\psi] + [\varphi\chi],$$
$$[\varphi, \psi \cdot \chi] \equiv \psi[\varphi\chi] + \chi[\varphi\psi].$$

Endlich ergiebt sich noch die Regel:

$$[\varphi, \omega(\psi)] \equiv \omega'(\psi) \cdot [\varphi\psi].$$

Mit Benutzung des Symbols $[XY]$ lässt sich nun die Bedingung (5) auch so schreiben:

$$(5') \qquad [XY] = 0.$$

Wir haben hiermit eine Bedingung, die zwei von einander unabhängige Functionen X, Y von x, y, p erfüllen müssen, damit zwei Functionen P und ϱ von x, y, p vorhanden sein können, für die identisch die Gleichung (2) erfüllt ist. Wir werden nun sehen, dass diese Bedingung auch *hinreichend* für die Existenz dieser Functionen P und ϱ ist.

Bed. $[XY]=0$ ist hinreichend.

Wenn nämlich X, Y von einander unabhängig sind, so sind nicht alle zweireihigen Unterdeterminanten der Determinante (4), die den Wert $[XY]\equiv 0$ hat, ebenfalls identisch Null. Mithin reducieren sich die drei Gleichungen (3), die ja (2) ersetzen, auf gerade zwei von einander unabhängige, die P und ϱ *eindeutig* bestimmen. Sie geben für P die beiden infolge von $[XY]\equiv 0$ übereinstimmenden Werte:

$$P=\frac{Y_p}{X_p}=\frac{Y_x+pY_y}{X_x+pX_y}, \tag{7}$$

von denen sicher einer einen nicht identisch verschwindenden Nenner hat, denn sonst wäre X entgegen der Voraussetzung eine Constante. Für ϱ ergeben sich die beiden ebenfalls infolge von $[XY]\equiv 0$ übereinstimmenden Werte:

$$\varrho=\frac{X_xY_y-X_yY_x}{X_x+pX_y}=\frac{X_pY_y-X_yY_p}{X_p}. \tag{8}$$

ϱ ist von Null verschieden, denn wären beide Zähler Null, so wären X, Y nicht unabhängig von einander.

Hiermit ist bewiesen:

Satz 1: *Sind X, Y zwei von einander unabhängige Functionen von x, y, p, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass es zwei Functionen P und ϱ von x, y, p giebt, die identisch die Relation*

$$dY-PdX=\varrho\cdot(dy-pdx)$$

erfüllen, gegeben durch die Gleichung:

$$X_p(Y_x+pY_y)-Y_p(X_x+pX_y)=0,$$

die mit Benutzung des Klammersymbols auch so geschrieben werden kann:

$$[XY]=0.$$

Ist diese Bedingung identisch erfüllt, so ergeben sich für P und ϱ eindeutige Werte und zwar ist der Wert von ϱ nicht identisch Null.

Relation zw. X und P.

Zwischen den drei Functionen X, Y, P bestehen noch einige wichtige Beziehungen. Um sie abzuleiten, differenzieren wir die erste Gleichung (3) partiell nach p, die letzte Gleichung (3) partiell nach x und subtrahieren sie von einander. Dann kommt:

$$P_pX_x-P_xX_p=\varrho+p\varrho_p. \tag{9}$$

Differenzieren wir die zweite Gleichung (3) partiell nach p, die dritte partiell nach y, so giebt ihre Subtraction von einander:

(10) $$P_p X_y - P_y X_p = -\varrho_p.$$

Also ist nach (9) und (10):

(11) $$(P_p X_x - P_x X_p) + p(P_p X_y - P_y X_p) = \varrho.$$

Diese Gleichung lässt sich mit Benutzung des oben eingeführten Klammersymbols auch so schreiben:

(11′) $$[PX] = \varrho.$$

Um eine dritte Relation aufzustellen, schreiben wir die Bedingung (2), indem wir die Identität Relation zw. Y und P.

$$dY - PdX \equiv d(Y - PX) + XdP$$

verwerten, in der Form:

(12) $$d(Y - PX) + XdP = \varrho(dy - p\,dx).$$

Diese Relation hat wieder die Form der Relation:

$$dY - PdX = \varrho(dy - p\,dx).$$

Nur steht statt X, Y, P jetzt $P, Y - PX, -X$. Wie wir oben fanden, dass $[XY] = 0$ sein muss, so folgt daher auch hier:

$$[P,\ Y - PX] = 0.$$

Dies lässt sich so schreiben:

$$[PY] - P[PX] - X[PP] = 0,$$

oder, da $[PP] \equiv 0$ ist, so:

(13) $$[PY] - P[PX] = 0,$$

Hieraus folgt nach (11′) die Relation:

(14) $$[PY] - P\varrho = 0,$$

oder:

(14′) $$[PY] = \varrho P.$$

Es hat sich also ergeben:

Satz 2: *Sind X, Y von einander unabhängige Functionen von x, y, p und sind P, ϱ solche Functionen von x, y, p, für die*

$$dY - PdX \equiv \varrho(dy - pdx)$$

ist, so ist

$$[XY] \equiv 0, \quad [PX] \equiv \varrho \not\equiv 0, \quad [PY] \equiv \varrho P.$$

Die drei erhaltenen Relationen

$$(15) \qquad [XY] \equiv 0, \quad [PX] \equiv \varrho \not\equiv 0, \quad [PY] \equiv \varrho P$$

wird man nun naturgemäss zerlegen in die beiden:

$$(16) \qquad [XY] \equiv 0, \quad [PY] - P[PX] \equiv 0$$

und in diese:

$$(17) \qquad [PX] \equiv \varrho \not\equiv 0.$$

Denn die beiden Gleichungen (16) stellen Relationen zwischen den in der Berührungstransformation

$$(18) \qquad x_1 = X(x,y,p), \quad y_1 = Y(x,y,p), \quad p_1 = P(x,y,p)$$

auftretenden Functionen dar, während die Formel (17) nur ϱ bestimmt.

Die Bedingg. für P.

Wenn nun die Voraussetzungen des letzten Satzes erfüllt sind, so ist zunächst Eines auffallend: Wir wissen, dass eine Berührungstransformation (18) völlig eindeutig bestimmt ist, sobald man nur ihre beiden ersten Gleichungen, also die Functionen X, Y gegeben hat (vgl. § 4 des 2. Kap., S. 48—52), dass also dann auch P völlig eindeutig bestimmt ist, während doch auf der anderen Seite die zweite Gleichung (16) eine *Differentialgleichung* für P ist.

Aber diese zweite Gleichung (16) ist nur scheinbar eine Differentialgleichung für P. Sie lässt sich ja so schreiben:

$$P = \frac{[PY]}{[PX]} = \frac{P_p(Y_x + pY_y) - (P_x + pP_y)\,Y_p}{P_p(X_x + pX_y) - (P_x + pP_y)\,X_p}.$$

Infolge der ersten Gleichung (16) ist nun aber

$$\frac{Y_p}{X_p} = \frac{Y_x + pY_y}{X_x + pX_y},$$

sodass factisch rechts die Differentialquotienten von P nur scheinbar auftreten. Die zweite Gleichung (16) reduciert sich daher infolge der ersten Gleichung (16) auf die schon früher aufgestellte Relation:

$$(19) \qquad P \equiv \frac{Y_p}{X_p} \equiv \frac{Y_x + pY_y}{X_x + pX_y}.$$

Also können wir unserem früheren Satz 1 die folgende Gestalt geben:

Satz 3: *Sind X, Y von einander unabhängige Functionen von x, y, p, für welche die Relation $[XY] \equiv 0$ besteht, und erfüllt die Function P von x, y, p die Bedingung*

$$[PY] - P[PX] \equiv 0,$$

so besteht auch eine Gleichung von der Form:

$$dY - PdX \equiv \varrho(dy - pdx),$$

in der

$$\varrho \equiv [PX] \not\equiv 0$$

ist, und X, Y, P sind alsdann von einander unabhängig.

Setzen wir nun voraus, es seien X, Y, P solche Functionen von x, y, p, die den Gleichungen (15) identisch genügen, so sind X und Y von einander unabhängig. Denn es ist dann zunächst X keine Constante, weil sonst $[PX] \equiv 0$ und also die zweite Formel (15) nicht erfüllt wäre. Es ist aber auch Y keine Function von X allein, denn wenn: Umkehrung.

$$Y \equiv \varphi(X)$$

wäre, so käme nach (15)

$$\varrho P \equiv [PY] \equiv \varphi'(X)\,[PX] \equiv \varphi'(X)\,\varrho,$$

also

$$P = \varphi'(X),$$

mithin $[PX] \equiv 0$, was wieder der zweiten Gleichung (15) widerspricht.

Folglich hat sich, da nun die Voraussetzungen des Satzes 3 erfüllt sind, ergeben:

Satz 4: *Sind X, Y, P solche Functionen von x, y, p, die den Gleichungen genügen:*

$$[XY] \equiv 0, \quad [PX] \equiv \varrho, \quad [PY] \equiv \varrho P,$$

in denen ϱ eine von Null verschiedene Function von x, y, p bedeute, so sind X, Y, P von einander unabhängige Functionen und erfüllen die Gleichung:

$$dY - PdX \equiv \varrho(dy - pdx),$$

mit anderen Worten: dann stellen die Gleichungen:

$$x_1 = X(x, y, p), \quad y_1 = Y(x, y, p), \quad p_1 = P(x, y, p)$$

eine Berührungstransformation vor.

Zusammengefasst hat sich also das folgende Theorem ergeben:

Theorem 2: *Die Gleichungen* Notw. u. hinreich. Bedinggn. f. eine Bertrf.

$$x_1 = X(x, y, y'), \quad y_1 = Y(x, y, y'), \quad y_1' = P(x, y, y')$$

stellen dann und nur dann eine Berührungstransformation dar, wenn

$$[XY] \equiv 0, \quad [PX] \equiv \varrho, \quad [PY] \equiv \varrho P$$

ist, wobei ϱ *irgend eine von Null verschiedene Function von* x, y, y' *sein darf. Insbesondere ist dann:*

$$dY - PdX \equiv \varrho(dy - y'\,dx).\text{*)}$$

Auch wollen wir noch besonders notieren:

Satz 5: *Die beiden ersten Functionen* X, Y *in den Gleichungen einer Berührungstransformation*

$$x_1 = X(x, y, p), \quad y_1 = Y(x, y, p), \quad p_1 = P(x, y, p)$$

sind nur den beiden folgenden Bedingungen unterworfen: Erstens müssen sie von einander unabhängig sein und zweitens müssen sie die Relation

$$[XY] \equiv 0$$

erfüllen. Es giebt alsdann stets eine und nur eine zugehörige Berührungstransformation.

Dieser Satz ist nur eine andere Ausdrucksweise des Satzes 1.

§ 2. Deutung der Involutionsbeziehung.

Wenn zwei Functionen X, Y von x, y, p in der Beziehung zu einander stehen, dass ihr Klammerausdruck

$$[XY] \equiv 0$$

Involution. ist, so sagen wir: *die beiden Functionen* X, Y *liegen in Involution.*

Nun haben wir im vorigen Paragraphen erkannt (vgl. Satz 5, oben), dass man zu zwei von einander unabhängigen Functionen X und Y von x, y, p dann und nur dann eine dritte Function P von x, y, p so hinzufinden kann, dass die Gleichungen:

$$(20) \qquad x_1 = X(x, y, p), \quad y_1 = Y(x, y, p), \quad p_1 = P(x, y, p)$$

eine Berührungstransformation darstellen, wenn die Functionen X, Y in Involution liegen.

Diese Bemerkung führt zu einer einfachen begrifflichen Auffassung der Involutionsbeziehung.

Sollen nämlich die Gleichungen

$$x_1 = X(x, y, p), \quad y_1 = Y(x, y, p)$$

zusammen mit einer passenden Gleichung

$$p_1 = P(x, y, p)$$

eine Berührungstransformation, also eine Zuordnung der (xy)- und $(x_1\,y_1)$-Ebene bestimmen, bei der jedem Elementverein ein Element-

*) Sophus Lie, Verhandlungen der Gesellschaft der Wissensch. zu Christiania 1872—73, sowie Mathem. Annalen Bd. 8, 1874.

verein zugeordnet ist, so müssen sich bei dieser Berührungstransformation die ∞^1 Linienelemente der $(x_1 y_1)$-Ebene, die durch den Punkt

$$x_1 = a, \quad y_1 = b$$

gehen, in der (xy)-Ebene als ∞^1 Linienelemente eines Vereines abbilden. Es müssen also die Gleichungen

$$X(x, y, p) = a, \quad Y(x, y, p) = b, \tag{21}$$

welche Werte auch die Constanten a, b haben mögen, stets einen Verein von ∞^1 Linienelementen (x, y, p) darstellen. Dass dies nur für $[XY] \equiv 0$ der Fall ist, beweisen wir so: Infolge von (21) bestehen zwischen dx, dy, dp für diese ∞^1 Linienelemente (x, y, p) die beiden Relationen

$$\begin{cases} X_x\,dx + X_y\,dy + X_p\,dp = 0, \\ Y_x\,dx + Y_y\,dy + Y_p\,dp = 0. \end{cases} \tag{22}$$

Sie sollen, verlangen wir, zusammen mit (21) die Gleichung

$$dy - p\,dx = 0$$

nach sich ziehen. Oder also, da die Constanten a, b in (21) beliebig sind, es soll die letzte Gleichung infolge von (22) allein identisch bestehen, d. h. es soll

$$\begin{vmatrix} X_x & X_y & X_p \\ Y_x & Y_y & Y_p \\ -p & 1 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0$$

oder also

$$[XY] \equiv 0$$

sein. Hiermit ist der Beweis erbracht und gleichzeitig folgende wichtige Deutung der Involutionsbeziehung gefunden:

Satz 6: *Zwei von einander unabhängige Functionen X, Y von x, y, p liegen dann und nur dann in Involution, wenn die beiden Gleichungen* Erste Deutung d. Involution.

$$X(x, y, p) = a, \quad Y(x, y, p) = b,$$

welche Werte auch die Constanten a, b haben mögen, stets ∞^1 Linienelemente (x, y, p) bestimmen, die einen Elementverein bilden.

Wir wollen dies Ergebnis in neuer Weise formulieren und gleichzeitig einen neuen Beweis liefern.

Liegen zwei gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung in x, y vor:

$$u(x, y, y') = 0, \quad v(x, y, y') = 0,$$

so besitzt jede ∞^1 Integralgebilde. Dabei ist es natürlich die Regel, dass es kein Integralgebilde giebt, das beiden Gleichungen gemeinsam ist. Ausnahmsweise kann dies aber eintreten.

Liegt nun eine Differentialgleichung erster Ordnung mit einer willkürlichen Constanten a vor:

$$X(x, y, y') = a, \tag{23}$$

so besitzt sie für jeden Wert der Constanten a ∞^1 Integralgebilde. Alle durch vorliegende Gleichung dargestellten ∞^1 Differentialgleichungen erster Ordnung bestimmen mithin ∞^2 Integralgebilde, die in Scharen von je ∞^1 angeordnet sind, indem jede Schar zu einem bestimmten Wert von a gehört.

Sehen wir von dem Fall ab, dass die vorgelegte Gleichung frei von y' ist, d. h. nehmen wir nach § 2 des 2. Kap. (S. 41) an, dass die betrachteten ∞^2 Integralgebilde ∞^2 Integral*curven* sind, so giebt es natürlich eine gewöhnliche Differentialgleichung *zweiter* Ordnung in x, y, deren Integralcurven gerade diese ∞^2 Curven sind. Es ist dies die durch Differentiation von (23) hervorgehende Gleichung:

$$X_x + X_y y' + X_{y'} y'' = 0, \tag{24}$$

die, weil sie frei von a ist, von den Integralcurven aller ∞^1 Gleichungen (23) erfüllt wird. Man sagt, dass $X = 0$ ein *intermediäres Integral dieser Differentialgleichung zweiter Ordnung ist.*

Intermediäres Integral.

Liegt umgekehrt eine beliebige gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung in x, y vor, so lassen sich ihre ∞^2 Integralcurven in beliebig vielen Weisen in ∞^1 Scharen von je ∞^1 Curven anordnen. Jede Anordnung liefert ein intermediäres Integral $X = a$. Eine Differentialgleichung zweiter Ordnung in x, y hat also unendlich viele intermediäre Integrale.

Fordern wir nun, dass die beiden von einander unabhängigen Functionen $X(x, y, y')$ und $Y(x, y, y')$ intermediäre Integrale ein und derselben Differentialgleichung zweiter Ordnung sein sollen, so haben wir zu verlangen, dass die beiden Gleichungen

$$X_x + X_y y' + X_{y'} y'' = 0,$$
$$Y_x + Y_y y' + Y_{y'} y'' = 0$$

dieselbe Differentialgleichung zweiter Ordnung darstellen, d. h., dass

$$\frac{X_x + X_y y'}{Y_x + Y_y y'} = \frac{X_{y'}}{Y_{y'}}$$

sei. Dies ist aber nichts anderes als die Gleichung

$$[XY] \equiv 0.$$

Also sehen wir:

Zweite Deutung d. Involution.

Satz 7: *Die beiden von einander unabhängigen Gleichungen*

$$X(x, y, y') = \text{Const.}, \quad Y(x, y, y') = \text{Const.}$$

stellen dann und nur dann intermediäre Integrale derselben Differentialgleichung zweiter Ordnung in x, y vor, wenn die Functionen X, Y in Involution liegen.

Wie schon gesagt, ist dieser Satz im Grunde genommen nur eine andere Form des Satzes 6.

Wir wollen noch darauf aufmerksam machen, dass die Gleichung

$$(25) \qquad [Xf] = 0$$

bei gegebenem X eine homogene lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung für die Function f von x, y, y' ist. Sie besitzt bekanntlich zwei von einander unabhängige Lösungen. Eine Lösung ist offenbar $f = X$ selbst. Daraus folgt: Ist Y eine von X unabhängige Lösung dieser Differentialgleichung, so ist eine beliebige Function von X und Y die allgemeinste.

Wir können daher aus Satz 7 den Satz ableiten:

Satz 8: *Sind $X(x, y, y')$ und $Y(x, y, y')$ zwei von einander unabhängige intermediäre Integrale einer Differentialgleichung zweiter Ordnung in x, y, so ist das allgemeinste intermediäre Integral dieser Differentialgleichung eine beliebige Function von X und Y.*

Nehmen wir nunmehr an, es liege eine Differentialgleichung erster Ordnung in x, y mit einer willkürlichen Constanten a vor:

$$(23) \qquad X(x, y, y') = a,$$

also factisch eine Schar von ∞^1 Differentialgleichungen erster Ordnung. Kennt man alsdann eine von X unabhängige Function Y, die mit X in Involution liegt, so lassen sich nach dem Satze 7 alle Integralcurven einer jeden unter diesen ∞^1 Differentialgleichungen ohne Mühe bestimmen. Denn da alsdann X und Y intermediäre Integrale ein und derselben Differentialgleichung zweiter Ordnung sind, so besitzen die ∞^1 Differentialgleichungen $X = \text{Const.}$ dieselben ∞^2 Integralcurven wie die ∞^1 Differentialgleichungen $Y = \text{Const.}$, d. h. jede Differentialgleichung $X = a_0$ hat mit jeder Differentialgleichung $Y = b_0$ eine Integralcurve gemein. Eliminieren wir zwischen

$$X(x, y, y') = a_0, \quad Y(x, y, y') = b_0$$

die Grösse y', so liefert die hervorgehende Gleichung

$$\omega(x, y, a_0, b_0) = 0$$

diejenige Curve, welche die beiden vorliegenden ganz bestimmt gegebenen Differentialgleichungen $X = a_0$, $Y = b_0$ erfüllt.

Um nun *alle* Integralcurven der bestimmt ausgewählten Gleichung

$$X(x, y, y') = a_0$$

zu bestimmen, fügt man hierzu die Gleichung

$$Y(x, y, y') = b$$

mit willkürlicher Constanten b. Beide zusammen stellen alsdann ∞^1 Elementvereine dar, die Integralgebilde von $X = a_0$ sind. Die endliche Gleichung dieser ∞^1 Curven ist offenbar

$$\omega(x, y, a_0, b) = 0.$$

Integration d. Diffgl. $X = \text{Const.}$

Satz 9: *Die Integration einer vorgelegten Differentialgleichung erster Ordnung in x, y:*

$$X(x, y, y') = \text{Const.}$$

ist durch Elimination zu leisten, sobald man eine von X unabhängige Function Y von x, y, y' kennt, die mit X in Involution liegt.

Integr. einer Schar von Diffgln. 1. O.

Sind, wie bisher, X und Y zwei von einander unabhängige Functionen von x, y, y', die in Involution liegen, so können wir sogar unendlich viele Differentialgleichungen erster Ordnung angeben, die durch Elimination integrierbar sind. Bilden wir nämlich eine beliebige Differentialgleichung von der Form:

$$Y - \varphi(X) = 0, \tag{26}$$

so ist infolge von $[XY] \equiv 0$ auch

$$[Y - \varphi(X), X] \equiv 0,$$

sodass aus Satz 9 unmittelbar die Integrierbarkeit von (26) folgt. Begrifflich klar ist dies deshalb, weil $Y - \varphi(X)$ nach Satz 8 mit X und Y intermediäres Integral ein und derselben Differentialgleichung zweiter Ordnung ist. Diese Differentialgleichung zweiter Ordnung ist unter den gemachten Voraussetzungen integriert, denn ihre ∞^2 Integralcurven sind die durch

$$X = a, \quad Y = b$$

dargestellten ∞^2 Elementvereine. Wenn wir aber alle ∞^2 Integralcurven einer Differentialgleichung zweiter Ordnung kennen, so kennen wir natürlich auch die darunter enthaltenen ∞^1 Integralcurven jeder Differentialgleichung erster Ordnung, die durch ein intermediäres Integral dargestellt wird.

Das Letztere soll durch Fig. 31 veranschaulicht werden. Dabei ist angenommen, dass die ∞^2 Integralcurven der Differentialgleichung zweiter Ordnung Kreise sind. Die Integralcurven von $X = a$ werden durch eine Schar von ∞^1 dieser Kreise dargestellt werden, die von

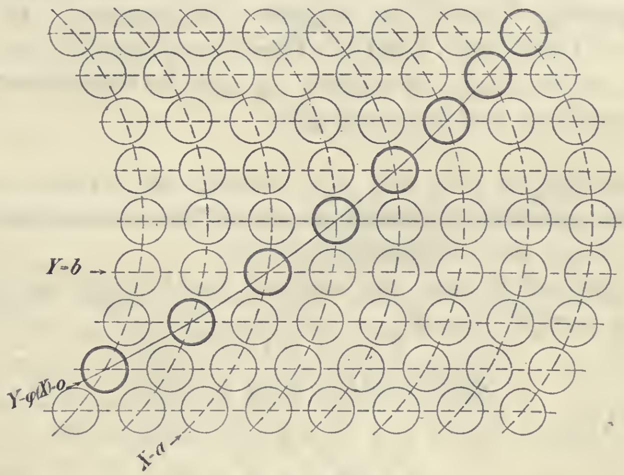

Fig. 31.

$Y = b$ durch eine andere Schar von ∞^1 Kreisen. Ist insbesondere $b = \varphi(a)$, so schneiden sich beide Scharen gerade in dem Kreise, der eine gemeinsame Integralcurve von

$$X = a, \quad Y = \varphi(a),$$

also auch eine Integralcurve von (26) ist.

Satz 10: *Kennt man zwei von einander unabhängige Functionen X, Y von x, y, y', die in Involution liegen, so ist jede Differentialgleichung erster Ordnung in x, y von der Form* Integr. durch Elimination.

$$Y - \varphi(X) = 0$$

durch Elimination integrierbar.

Zu jedem Wertepaare der Constanten a, b gehört eine bestimmte unter den ∞^2 Integralcurven der Differentialgleichung zweiter Ordnung (24), nämlich die, deren Gleichung durch Elimination von y' aus

$$X = a, \quad Y = b$$

hervorgeht. Es sind daher a, b oder also X, Y als *Coordinaten der ∞^2 Integralcurven* aufzufassen. Coord. der Integralcurven.

Zur Vermeidung von Irrtümern sei hervorgehoben, dass zwar die allgemeinen Integralcurven von (26) zu den Integralcurven der Differentialgleichung zweiter Ordnung (24) gehören, *dass aber eine singu-*

Singuläre Integralcurve. *läre Integralcurve von (26) im Allgemeinen nicht zu den Integralcurven von (24) gehört.* Denn man kann ja aus den ∞^2 Integralcurven von (24) solche ∞^1 auswählen, die eine beliebig gegebene Curve c umhüllen. Sie werden alsdann die Integralcurven einer Differentialgleichung (26) sein, und diese letztere Differentialgleichung besitzt die *beliebig gewählte* Curve c als singuläre Integralcurve. Da man die singulären Integralcurven durch ein Eliminationsverfahren aus den nichtsingulären ableiten kann, so leuchtet ein, dass der Satz 10 dennoch auch für die singulären Integralcurven gilt.

Dritte Deutung d. Involution. Schliesslich sei noch auf eine Deutung der Involutionsbeziehung aufmerksam gemacht, die allerdings schon früher, wenn auch nicht in expliciter Form, hervorgetreten ist:

Sind X und Y zwei von einander unabhängige Functionen von x, y, y', so wird der Bruch

$$\frac{dY}{dX} = \frac{Y_x dx + Y_y dy + Y_{y'} dy'}{X_x dx + X_y dy + X_{y'} dy'}$$

oder also:

$$\frac{Y_x + Y_y y' + Y_{y'} y''}{X_x + X_y y' + X_{y'} y''}$$

im Allgemeinen nicht frei von y'' sein. Dies ist er vielmehr dann und nur dann, wenn

$$\frac{Y_x + Y_y y'}{X_x + X_y y'} = \frac{Y_{y'}}{X_{y'}}$$

ist. Aber diese Gleichung ist nur eine andere Form der Involutionsbeziehung

$$[XY] = 0.$$

Man vergleiche hierzu die Formel (7) des vorigen Paragraphen (S. 70). Weil X, Y in Involution liegen, kann also der damalige Ausdruck für P auch so geschrieben werden:

$$P = \frac{dY}{dX}. \tag{27}$$

Satz 11: *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass der Bruch*

$$\frac{dY}{dX}$$

aus den Differentialen zweier von einander unabhängiger Functionen X, Y von x, y, y' frei von dy' oder also der Bruch

$$\frac{\frac{dY}{dx}}{\frac{dX}{dx}}$$

frei von y'' ist, ist die, dass X und Y in Involution liegen.

Nach Satz 1 des vorigen Paragraphen (S. 70) können wir ausserdem wegen (27) noch den Satz formulieren:

Satz 12: *Liegen zwei von einander unabhängige Functionen X und Y von x, y, y' in Involution, so giebt es eine und nur eine Berührungstransformation von der Form:*

$$x_1 = X(x, y, y'), \quad y_1 = Y(x, y, y'), \quad y_1' = P(x, y, y').$$

In ihr hat P die Form

$$P \equiv \frac{dY}{dX}.$$

§ 3. Transformation der gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Nunmehr zeigen wir, dass Differentialgleichungen zweiter Ordnung in x, y keine individuellen Eigenschaften haben, die bei Berührungstransformation bewahrt werden; anders ausgedrückt: wir werden zeigen, dass jede Differentialgleichung zweiter Ordnung in x, y durch eine passende Berührungstransformation in jede andere derartige Gleichung übergeführt werden kann.

Zunächst ist zu erläutern, was es heisst, *auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung*

$$y'' - \omega(x, y, y') = 0 \tag{28}$$

eine Berührungstransformation

$$x_1 = X(x, y, y'), \quad y_1 = Y(x, y, y'), \quad y_1' = P(x, y, y') \tag{29}$$

ausüben.

Bei dieser Berührungstransformation (29) wird

$$y_1'' \equiv \frac{dy_1'}{dx_1} = \frac{dP}{dX} \equiv \frac{P_x dx + P_y dy + P_{y'} dy'}{X_x dx + X_y dy + X_{y'} dy'},$$

oder, wenn y'' für $\frac{dy'}{dx}$ gesetzt wird:

$$y_1'' = \frac{P_x + P_y y' + P_{y'} y''}{X_x + X_y y' + X_{y'} y''} \equiv Q(x, y, y', y''). \tag{30}$$

Diese Gleichung (30) ist auch nach y'' auflösbar, denn ihre rechte Seite Q wäre nur dann frei von y'', wenn die Functionen P und X in Involution lägen (vgl. Satz 11 des vorigen Paragraphen). Es ist jedoch $[PX] \mathrel{\not\equiv} 0$, wie z. B. in der Formel (17) des vorigen Paragraphen (S. 72) ausdrücklich notiert wurde.

Mithin sind die vier Gleichungen (29) und (30) nach x, y, y', y'' auflösbar und stellen daher eine Transformation von x, y, y', y'' in

Erweiterg. einer Berührtrf. x_1, y_1, y_1', y_1'' dar, die wir *die (einmalige) Erweiterung der Berührungstransformation* (29) oder auch *die erweiterte Berührungstransformation* nennen.

Berührtrf. ausgeführt auf Diffgl. 2. O. Wollen wir nun die Berührungstransformation (29) auf die *Differential*gleichung zweiter Ordnung

$$(28)\qquad y'' - \omega(x, y, y') = 0$$

ausführen, so führen wir einfach die erweiterte Transformation

$$(31)\qquad x_1 = X, \quad y_1 = Y, \quad y_1' = P, \quad y_1'' = Q$$

auf die *Gleichung* (28) aus.

Nebenbei sei bemerkt: Die Aufeinanderfolge zweier Berührungstransformationen ist nach Satz 5 des § 3 des 2. Kap. (S. 46) einer einzigen äquivalent, und man könnte beweisen, dass der entsprechende Satz auch für die Erweiterungen gilt. Doch wollen wir darauf nicht näher eingehen; begrifflich ist es einleuchtend.

Es mögen nun irgend zwei gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die eine in x, y, die andere in x_1, y_1, vorgelegt sein:

$$(28)\qquad y'' - \omega(x, y, y') = 0,$$

$$(32)\qquad y_1'' - \Omega(x_1, y_1, y_1') = 0.$$

Ferner seien $u(x, y, y')$ und $v(x, y, y')$ zwei von einander unabhängige intermediäre Integrale der ersteren und $U(x_1, y_1, y_1')$ sowie $V(x_1, y_1, y_1')$ zwei von einander unabhängige intermediäre Integrale der letzteren.

Nach Satz 7 des vorigen Paragraphen (S. 77) liegen u, v in Involution und ebenso U, V. Nach Satz 12 des § 2 (S. 81) giebt es folglich eine Berührungstransformation von x, y, y' in neue Veränderliche $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}'$, bei der $\mathfrak{x} = u$, $\mathfrak{y} = v$ ist, und eine Berührungstransformation von x_1, y_1, y_1' in neue Veränderliche $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}'$, bei der $\mathfrak{x} = U$, $\mathfrak{y} = V$ ist, und zwar haben diese Berührungstransformationen die Gleichungen:

$$(33)\qquad \begin{cases} \mathfrak{x} = u(x, y, y'), & \mathfrak{y} = v(x, y, y'), & \mathfrak{y}' = \dfrac{dv}{du}; \\ \mathfrak{x} = U(x_1, y_1, y_1'), & \mathfrak{y} = V(x_1, y_1, y_1'), & \mathfrak{y}' = \dfrac{dV}{dU}. \end{cases}$$

Elimination von $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}'$ aus den Gleichungen (33) liefert nun nach Satz 5, § 3 des 2. Kap. (S. 46) eine Berührungstransformation von x, y, y' in x_1, y_1, y_1', die analytisch durch die Gleichungen

$$(34)\qquad U = u, \quad V = v, \quad \frac{dV}{dU} = \frac{dv}{du}$$

definiert wird, die man nach x_1, y_1, y_1' auflösen könnte. Diese Transformation führt u in U, v in V über. Es geht also bei ihr du in dU über. Aber $du = 0$ ist die Differentialgleichung (28) und $dU = 0$ die Differentialgleichung (32), da u und U intermediäre Integrale von (28) bez. (32) sind. Mithin führt die Berührungstransformation (34) die Differentialgleichung (28) in die Differentialgleichung (32) über.

Überführung e. Diffgl. 2. O. in eine andere.

Satz 13: *Jede gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung in x, y lässt sich durch Berührungstransformation in jede andere derartige Gleichung überführen.*

Begriffliche Ausführungen.

Unsere Betrachtung zeigt noch mehr, sie lehrt, dass es unendlich viele Berührungstransformationen giebt, welche die Differentialgleichung (28) in (32) überführen, und dass ferner die allgemeinste von willkürlichen Functionen abhängt, und schliesslich liefert sie zugleich *alle* Berührungstransformationen, die (28) in (32) verwandeln.

Denn es seien u, v zwei bestimmte von einander unabhängige intermediäre Integrale der Differentialgleichung (28) und entsprechend U, V zwei bestimmte intermediäre Integrale von (32). Eine jede Berührungstransformation, die (28) in (32) überführt, also die Integralcurven von (28) in die von (32) transformiert, muss offenbar jedes intermediäre Integral von (28) in ein intermediäres Integral von (32) verwandeln. Aber das allgemeinste intermediäre Integral von (28) ist eine beliebige Function von u, v (Satz 8 des § 2, S. 77). Es muss daher jede derartige Berührungstransformation zwei Gleichungen von der Form

$$U = \varphi(u, v), \quad V = \psi(u, v) \tag{35}$$

umfassen.

Fassen wir nun — wie im vorigen Paragraphen angegeben wurde (S. 79) — u, v als Coordinaten der ∞^2 Integralcurven von (28) und U, V als *Coordinaten der ∞^2 Integralcurven* von (32) auf, so ordnen die Gleichungen (35) nach einem willkürlichen Gesetz jeder Integralcurve von (28) eine von (32) zu. Es leuchtet nun ein, dass bei dieser Zuordnung jeder Curve — als Umhüllender von ∞^1 Integralcurven von (28) — eine ganz bestimmte Curve — als Umhüllende der ∞^1 zugeordneten Integralcurven von (32) — entspricht, d. h. dass die Berührungstransformation durch (35) vollkommen definiert ist. (Vgl. S. 48.) Wir können also den Satz aussprechen:

Satz 14: *Es giebt stets eine und nur eine Berührungstransformation, die ∞^2 gegebene Curven in ∞^2 andere gegebene Curven derart überführt, dass die Zuordnung der Curven nach einem willkürlich vorgelegten Gesetz geschieht.*

Unsere Berührungstransformation hat nun nach den Formeln (34), da jetzt nur φ, ψ an stelle von u, v getreten sind, die Gleichungen:

$$U = \varphi(u, v), \quad V = \psi(u, v), \quad \frac{dV}{dU} = \frac{d\psi}{d\varphi} \equiv \frac{\psi_u du + \psi_v dv}{\varphi_u du + \varphi_v dv}.$$

Sie führt jede Integralcurve von (28) in eine von (32) über, also auch die Differentialgleichung (28) in die Differentialgleichung (32).

Insbesondere können wir als die eine Differentialgleichung die aller Geraden der Ebene wählen:

$$y'' = 0.$$

Also folgt:

Satz 15: *Es giebt unendlich viele Berührungstransformationen der (xy)-Ebene, die eine vorgelegte gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung in x, y in eine andere gegebene Differentialgleichung zweiter Ordnung in x, y, z. B. in die Differentialgleichung*

$$y'' = 0$$

überführen.

Trf. einer Diffgl. 2. O. in sich.

Treten wir insbesondere noch der Frage nach *der allgemeinsten Berührungstransformation näher, die eine vorgelegte Differentialgleichung zweiter Ordnung in sich überführt.*

Sind u, v von einander unabhängige intermediäre Integrale der vorgelegten Differentialgleichung:

$$(28) \qquad y'' - \omega(x, y, y') = 0,$$

so wird die allgemeinste Berührungstransformation, welche diese Differentialgleichung invariant lässt, nach dem Vorhergehenden gegeben durch die Gleichungen:

$$u(x_1, y_1, y_1') = \varphi(u, v),$$
$$v(x_1, y_1, y_1') = \psi(u, v),$$
$$\frac{dv(x_1, y_1, y_1')}{du(x_1, y_1, y_1')} = \frac{d\psi}{d\varphi}.$$

Hierin sind rechts unter u, v die intermediären Integrale, geschrieben in x, y, y', zu verstehen. φ, ψ bedeuten von einander unabhängige, im Übrigen aber ganz willkürliche Functionen von u, v.

Soll z. B. die Differentialgleichung aller Geraden

$$y'' = 0$$

in sich transformiert werden, so kann

$$u \equiv y', \quad v \equiv y - xy'$$

gewählt werden, sodass $\frac{dv}{du} = -x$ wird. Die allgemeinste Berührungstransformation der Differentialgleichung $y'' = 0$ lautet somit:

$$y_1' = \varphi(y', y - xy'),$$
$$y_1 - x_1 y_1' = \psi(y', y - xy'),$$
$$-x_1 = \frac{d\psi}{d\varphi},$$

oder in aufgelöster Form:

$$(36) \qquad \begin{cases} x_1 = -\dfrac{d\psi(y', y - xy')}{d\varphi(y', y - xy')}, \\ y_1 = \psi(y', y - xy') - \varphi(y', y - xy')\dfrac{d\psi(y', y - xy')}{d\varphi(y', y - xy')}, \\ y_1' = \varphi(y', y - xy'). \end{cases}$$

Die Gleichungen (36) *stellen also die allgemeinste Berührungstransformation dar, die jede Gerade in eine Gerade verwandelt.* Geradentransformation.

Wenn man nach Satz 13 jede Differentialgleichung zweiter Ordnung in x, y in jede andere durch Berührungstransformation überführen kann, so liegt darin, *dass eine Differentialgleichung 2. O. in x, y keine gegenüber allen Berührungstransformationen invariante Eigenschaft besitzen kann.* Ganz anders liegt natürlich die Sache, sobald man sich auf solche Berührungstransformationen beschränkt, die einer gegebenen Kategorie von Berührungstransformationen angehören, z. B. auf solche Berührungstransformationen, die erweiterte Punkttransformationen sind. Hier ist die Aufstellung von kanonischen Formen, auf die sich gegebene Differentialgleichungen zweiter Ordnung durch die in betracht gezogenen Berührungstransformationen reducieren lassen, ein neues und unter Umständen wichtiges Problem*). Andeutung anderer Probleme über Diffgl. 2. O.

Sind zwei gewöhnliche Differentialgleichungen *dritter* Ordnung in x, y vorgelegt, so ist es im allgemeinen unmöglich, die eine durch eine Berührungstransformation in die andere überzuführen. Um dies zu zeigen, genügt ein Beispiel: Fragen wir nach den Differentialgleichungen, die in Diffgln. 3. O.

$$y_1''' = 0$$

transformierbar sind.

Bei der Berührungstransformation

$$x_1 = X(x, y, y'), \quad y_1 = Y(x, y, y'), \quad y_1' = P(x, y, y')$$

wird

$$y_1'' = \frac{dy_1'}{dx_1} = \frac{P_x + P_y y' + P_{y'} y''}{X_x + X_y y' + X_{y'} y''}$$

---

*) In den *Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bek. inf. Transf.* werden hierhergehörige Probleme im 16.—20., sowie im 24. Kapitel behandelt.

und also

$$y_1''' = \frac{dy_1''}{dx_1} = \frac{P_{y'}(X_x + X_y y' + X_{y'} y'') - X_{y'}(P_x + P_y y' + P_{y'} y'')}{(X_x + X_y y' + X_{y'} y'')^3} y''' + \frac{U(x, y, y', y'')}{(X_x + X_y y' + X_{y'} y'')^3}$$

oder:

$$y_1''' = \frac{[PX]}{(X_x + X_y y' + X_{y'} y'')^3} y''' + \frac{U(x, y, y', y'')}{(X_x + X_y y' + X_{y'} y'')^3},$$

wo U eine von y''' freie, aber noch x, y, y' enthaltende ganze Function dritten Grades von y'' bedeutet. Also folgt, dass die Differentialgleichung $y_1''' = 0$ durch Berührungstransformation nur aus einer solchen von der Form

$$y''' + Ay''^3 + By''^2 + Cy'' + D = 0$$

wird hervorgehen können, in der A, B, C, D gewisse Functionen von x, y, y' allein sind. Sie ist daher *nicht* aus jeder beliebigen Differentialgleichung dritter Ordnung durch Anwendung einer passenden Berührungstransformation zu erhalten.

Mit diesem negativen Ergebnis steht die Thatsache in Einklang, *dass es Differentialgleichungen dritter Ordnung giebt, die keine Berührungstransformation gestatten.* Es ist daher eine interessante Frage, ob eine vorgelegte Differentialgleichung dritter Ordnung Berührungstransformationen in sich gestattet oder nicht. Man kann z. B. alle Differentialgleichungen dritter Ordnung, die eine continuierliche Schar von Berührungstransformationen gestatten, auf gewisse typische Formen bringen. Es liegt uns aber fern, diese Dinge hier auszuführen. Ebenso wollen wir ein anderes wichtiges Problem nur erwähnen: Wenn eine bekannte Differentialgleichung eine bekannte Schar von Berührungstransformationen gestattet, so kann man sich die Frage vorlegen, ob und welche *Vorteile* man daraus *für die Integration der Differentialgleichungen* ziehen kann*).

§ 4. Über einige Untersuchungen von Lagrange und Plücker.

Wie wir schon öfters bemerkten, ist die allgemeine Theorie der Berührungstransformationen durch viele specielle Untersuchungen vorbereitet worden. Einige unter diesen Untersuchungen von specieller Beschaffenheit, die einfach in der Aufstellung und Verwertung gewisser einzelner Berührungstransformationen bestehen, haben wir im ersten Kapitel besprochen. Indem wir uns vorbehalten, bei einer späteren Gelegenheit, im zweiten Teile, ausführlicher über alle wichtigen Vorläufer in dieser Theorie zu referieren, gehen wir hier kurz auf einige Betrachtungen von Lagrange und Plücker ein, die an dieser Stelle besondere Beachtung verdienen**).

---

*) Kann eine Differentialgleichung dritter Ordnung auf die Form $y''' = 0$ zurückgeführt werden, so lässt sich ihr Integrationsproblem auf die Erledigung einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung vierter Ordnung reducieren, die überdies einen speciellen Charakter hat. (Lie, Verhandlungen der Gesellsch. d. Wiss. zu Christiania 1883.)

**) Ausser den Genannten, deren hierher gehörige Untersuchungen sich nur auf die Ebene beziehen, kommen noch Euler, Monge, Legendre und ganz besonders Ampère, Poisson und Jacobi in Betracht, deren Arbeiten sich aber auf den drei- bez. n-dimensionalen Raum beziehen.

Lagrange*) führt für gewöhnliche Differentialgleichungen in x, y den Begriff: intermediäres Integral ein. Liegt insbesondere eine Differentialgleichung zweiter Ordnung vor: Lagrange.

$$(37) \qquad y'' - \omega(x, y, y') = 0,$$

so zeigt Lagrange, dass es unendlich viele Differentialgleichungen erster Ordnung mit je einer willkürlichen Constanten a giebt:

$$u(x, y, y') = a,$$

durch deren Integration die allgemeine Integralgleichung

$$(38) \qquad \Phi(x, y, a, b) = 0$$

der vorgelegten Differentialgleichung zweiter Ordnung $y'' = \omega$ hervorgeht. Er zeigt, wie man aus $\Phi = 0$ durch Differentiation:

$$(39) \qquad \Phi_x + \Phi_y y' = 0$$

und Elimination einmal von a und einmal von b und nachherige Auflösung nach der verbleibenden Constanten aus (38) und (39) zwei intermediäre Integrale

$$X(x, y, y') = a, \quad Y(x, y, y') = b$$

der Differentialgleichung (37) findet. Er fügt hinzu, dass eine beliebige Function von X, Y das allgemeine intermediäre Integral liefert.

Er zeigt ferner, dass zwei intermediäre Integrale X, Y stets in der Beziehung

$$[XY] \equiv 0$$

stehen, und beweist, dass zwei Functionen $u(x, y, y')$ und $v(x, y, y')$, sobald sie in der Beziehung

$$[uv] \equiv 0$$

stehen, intermediäre Integrale einer gewissen Differentialgleichung zweiter Ordnung sind.

Überdies hebt Lagrange hervor, dass der Ausdruck

$$\frac{dY(x, y, y')}{dX(x, y, y')} = \frac{Y_x + Y_y y' + Y_{y'} y''}{X_x + X_y y' + X_{y'} y''}$$

dann und nur dann von y'' frei ist, wenn die Gleichung

$$[XY] \equiv 0$$

besteht.

Diese Entwickelungen Lagrange's stehen, wie man sieht, in engem Zusammenhang mit der Theorie der Berührungstransformationen.

---

*) *Leçons sur le calcul des fonctions* (1806), Oeuvres Bd. 10. Letztere Vorlesungen wurden zum grössten Teil, insbesondere die hier in Frage kommende, 1799 zum ersten Mal gehalten. Man vgl. namentlich die 16. Leçon. Auch in Lagrange's *Théorie des fonctions analytiques* (1813), *seconde partie*, Oeuvres Bd. 9 finden sich hierhergehörige Stellen, insbes. im 2. u. 3. Kapitel.

Lagrange betrachtet jedoch nicht die Gleichungen

$$x_1 = X(x, y, y'), \quad y_1 = Y(x, y, y'), \quad y_1' = \frac{dY}{dX}$$

als eine Transformation in den drei Veränderlichen x, y, y'. Der Begriff Berührungstransformation kommt daher jedenfalls an den citierten Stellen bei Lagrange nicht vor.

Plücker. Bei Plücker*) finden sich mehrere Stellen, die zeigen, dass ihm der allgemeine Begriff Berührungstransformation in der Ebene vorschwebt. Eine wirkliche Entwickelung dieses Begriffes bei ihm zu finden, ist uns aber nicht gelungen.

Plücker betrachtet die Gleichung:

$$\Omega(x, y, x_1, y_1) = 0$$

und zeigt, wie sie — falls sie *bilinear* ist — auf die allgemeine Dualität führt. Er legt sodann die allgemeine Gleichung $\Omega = 0$ zugrunde und sagt, dass sie jedem Punkt $x_1 = a_1$, $y_1 = b_1$ eine Curve c:

$$\Omega(x, y, a_1, b_1) = 0$$

und ebenfalls jedem Punkte $x = a$, $y = b$ eine Curve c_1:

$$\Omega(a, b, x_1, y_1) = 0$$

zuordnet. Er fügt hinzu, dass wenn der Punkt (x, y) eine Curve c durchläuft, die zugeordneten Curven c_1 sämtlich durch einen Punkt gehen.

Dass aber durch die Gleichung $\Omega = 0$ *jeder* allgemein gewählten Curve der (xy)-Ebene eine Curve der $(x_1 y_1)$-Ebene zugeordnet wird und umgekehrt, das findet sich bei Plücker nicht explicite ausgesprochen, noch weniger, dass Curven, die einander berühren, in ebensolche übergehen, auch nicht, dass $\Omega = 0$ eine Transformation der Grössen x, y, y' in die Grössen x_1, y_1, y_1' bestimmt.

Nichtsdestoweniger dürfte der Begriff Berührungstransformation der Ebene sowie ihre allgemeine Anwendung als Übertragungsprincipe Plücker vorgeschwebt haben, und es ist wohl denkbar, dass Plücker infolge der äusseren Umstände, die ihn zum Übergang zur Physik veranlassten, seine Ideen in dieser Richtung nicht weiter hat entwickeln können.

---

*) Namentlich in den *Analytisch-geometrischen Entwickelungen* (1828—31), insbes. S. 251 u. f., sowie im *System der analytischen Geometrie, auf neue Betrachtungen gegründet, und insbesondere eine ausführliche Theorie der Curven dritter Ordnung enthaltend* (1835), S. 48 u. f.

Kapitel 4.

Die infinitesimalen Berührungstransformationen der Ebene.

Nunmehr kommen wir zur Betrachtung und insbesondere zur Bestimmung der *infinitesimalen* Berührungstransformationen, derjenigen also, bei denen die Linienelemente nur unendlich kleine Änderungen erfahren. Wir werden zu dem Ergebnis geführt, dass es möglich ist, *die allgemeine Form der infinitesimalen Berührungstransformationen explicite anzugeben. Diese allgemeine Form enthält eine willkürliche Function der drei Coordinaten x, y, p der Linienelemente, sowie die Ableitungen erster Ordnung dieser Function nach x, y, p.* Dies Ergebnis ist überraschend, denn es ist ja keineswegs möglich, eine allgemeine explicite Form für die *endlichen* Berührungstransformationen anzugeben, sondern nur möglich, Methoden zur Bestimmung aller zu entwickeln.

Mit dem Begriff: infinitesimale Berührungstransformation steht in engstem Zusammenhang der Begriff: *eingliedrige Gruppe von Berührungstransformationen.* Wir bestimmen ferner die allgemeinen Formen der gewöhnlichen Differentialgleichungen in x, y, die eine vorgelegte infinitesimale Berührungstransformation gestatten, und zeigen sodann, wie man zum Zwecke der Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung eine bekannte infinitesimale Berührungstransformation derselben verwerten kann.

Rechnungen mit infinitesimalen Berührungstransformationen gestalten sich äusserst einfach. *Die infinitesimalen Berührungstransformationen sind überhaupt ein mächtiges Werkzeug in der Theorie der Berührungstransformationen und ihren Anwendungen.* In diesem Kapitel beschränken wir uns auf einige besonders wichtige und gleichzeitig sehr einfache Anwendungen*).

§ 1. Eingliedrige Gruppen von Berührungstransformationen.

Es liege eine continuierliche Schar von ∞^1 Transformationen in drei Veränderlichen x, y, z vor: **Schar von ∞^1 Trf.**

$$(1) \quad x_1 = X(x, y, z, a), \quad y_1 = Y(x, y, z, a), \quad z_1 = Z(x, y, z, a),$$

*) Den fundamentalen Begriff: infinitesimale Berührungstransformation führte Lie in den Verhandlgn. d. Gesellsch. d. Wiss. zu Christiania 1872, S. 25, ein. Vgl. auch Math. Annalen Bd. 8, S. 239, und Bd. 11, S. 534, sowie Archiv for Math. og. Naturv., Christiania, Bd. 1 (1876), S. 181 ff. Verschiedenartige Anwendungen dieses Begriffes auf die Geometrie, auf die Differentialgleichungen und auf die Gruppentheorie finden sich in Lie's Arbeiten aus den Jahren 1876—1884 in den beiden genannten norwegischen Publicationen.

arbitrary

sodass also X, Y, Z Functionen von x, y, z und einer willkürlichen Constanten a sind, und diese Schar enthalte insbesondere die identische Transformation, d. h. es gebe einen Wert von a, etwa $a = 0$, für den sich (1) auf

$$x_1 = x, \quad y_1 = y, \quad z_1 = z$$

reduciert. Alsdann werden die Gleichungen (1) für einen unendlich wenig von Null verschiedenen Wert δt von a eine unendlich kleine Transformation ergeben. Unter der Voraussetzung, dass die Functionen X, Y, Z nach ganzen positiven Potenzen von a entwickelbar sind, hat die Transformation (1) nämlich für $a = \delta t$ die Form:

$$(2) \qquad \begin{cases} x_1 = x + \xi(x, y, z)\,\delta t + \cdots, \\ y_1 = y + \eta(x, y, z)\,\delta t + \cdots, \\ z_1 = z + \zeta(x, y, z)\,\delta t + \cdots, \end{cases}$$

wobei die Glieder höheren Grades in δt nur durch Punkte angedeutet sind. Bei dieser unendlich kleinen Transformation (2) erhalten x, y, z unendlich kleine Incremente:

$$(3) \qquad \delta x = \xi \delta t + \cdots, \quad \delta y = \eta \delta t + \cdots, \quad \delta z = \zeta \delta t + \cdots .$$

Infinit. Trf. Eine solche Transformation heisse eine *infinitesimale*.

Gehen wir von einer specielleren Voraussetzung aus: Eine vorgelegte Schar von Transformationen (1) kann eine *Gruppe* sein, d. h. es kann vorkommen, *dass die Aufeinanderfolge zweier beliebiger unter diesen Transformationen stets einer solchen Transformation äquivalent ist, die derselben Schar* (1) *angehört.* Wir nennen alsdann die Schar (1) eine *continuierliche Gruppe von* ∞^1 *Transformationen* *).

Gruppe v. Trf.

Es liege eine continuierliche Gruppe (1) vor. Dabei können wir, wie wir hier nicht weiter ausführen wollen, ohne wesentliche Beschränkung der Betrachtung überdies annehmen, *dass sie zu jeder ihrer Transformationen auch die inverse enthält*, d. h. also, dass die Auflösung von (1) nach x, y, z wieder die Form hat:

$$x = X(x_1, y_1, z_1, b), \quad y = Y(x_1, y_1, z_1, b), \quad z = Z(x_1, y_1, z_1, b),$$

in der b eine Constante ist, die nur von a abhängt. Wenn T_a die zum Parameterwerte a gehörige Transformation der Gruppe (1) bedeutet, so ist also ihre inverse T_a^{-1} ebenfalls in (1) enthalten. Ferner wird $T_{a+\delta a}$ die zum Parameterwerte $a + \delta a$ gehörige, also die von T_a nur unendlich wenig verschiedene Transformation der Gruppe (1)

*) Ausführlicheres hierüber findet man in den *Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen*, Kap. 2 und 11.

sein. Die Aufeinanderfolge $T_{a+\delta a} T_a^{-1}$, die wegen der vorausgesetzten Eigenschaften der Gruppe angehört, wird mithin nur unendlich wenig von $T_a T_a^{-1}$, d. h. von der identischen Transformation verschieden sein und demnach eine infinitesimale Transformation sein, die der Schar (1) angehört. *Die Gruppe enthält also eine infinitesimale Transformation.*

Liegt andererseits eine beliebige infinitesimale Transformation vor, so giebt es immer eine gewisse ganz bestimmte Gruppe von Transformationen, in der sie enthalten ist. Wir wollen eine allgemeine Betrachtung anstellen, die verbunden mit einem *Grenzübergang* die Richtigkeit dieser Behauptung zeigt.

Sei S eine ganz beliebige Transformation in x, y, z. Betrachten wir alsdann ausser S auch die Transformationen, die der ein-, zwei-..., allgemein der n-maligen Wiederholung von S äquivalent sind, ebenso die zu S inverse S^{-1} und die ihrer ein-, zwei-..., allgemein n-maligen Wiederholung äquivalenten, so liegt eine im allgemeinen unendliche Schar von Transformationen vor: Wiederhol. einer Trf.

$$\ldots S^{-n} \ldots S^{-2},\ S^{-1},\ S^0,\ S,\ S^2 \ldots S^n \ldots,$$

in der S^0 natürlich die identische Transformation sein soll, während n jede beliebige ganze positive Zahl darstelle. Diese unendliche Schar ist eine *discontinuierliche Gruppe*. Denn sind p, q zwei ganze positive oder negative Zahlen, so ist die Aufeinanderfolge von S^p und S^q der Transformation S^{p+q} äquivalent.

In dieser Weise kann man sich, ausgehend von beliebigen Transformationen S, beliebig viele discontinuierliche und unendliche Gruppen von Transformationen in x, y, z bilden. Ist nun insbesondere S eine *infinitesimale* Transformation, so sind S^n und S^{n+1} nur unendlich wenig von einander verschieden, und man erhält also eine *continuierliche Gruppe*, die die betreffende infinitesimale Transformation S enthält. Grenzübergang. Gruppe erzeugt v. einer inf. Trf.

Rechnerisch gestaltet sich dieser Grenzübergang so: Sind

$$(4)\quad \delta x = \xi(x,y,z)\,\delta t + \cdots,\quad \delta y = \eta(x,y,z)\,\delta t + \cdots,\quad \delta z = \zeta(x,y,z)\,\delta t + \cdots$$

die Incremente, die den Veränderlichen x, y, z durch eine infinitesimale Transformation S erteilt werden, so fassen wir t als die Zeit auf, δt als einen Zeitzuwachs und δx, δy, δz als die Zuwüchse von x, y, z im Zeitelement δt. Alsdann bestimmen die Gleichungen (4), wenn man will, eine *stationäre Strömung* im Raume mit drei Dimensionen, dessen Punkte die Coordinaten x, y, z haben. Nach Verlauf der Zeit t hat der Punkt (x, y, z) die neue Lage (x_1, y_1, z_1) erhalten. Sie wird durch Integration des simultanen Systems

$$(5) \qquad \frac{dx_1}{\xi(x_1, y_1, z_1)} = \frac{dy_1}{\eta(x_1, y_1, z_1)} = \frac{dz_1}{\zeta(x_1, y_1, z_1)} = dt$$

mit den Werten x, y, z von x_1, y_1, z_1 für $t = 0$ gefunden. Die drei Integralgleichungen können offenbar in der Form angenommen werden:

$$(6) \qquad \begin{cases} U(x_1, y_1, z_1) = U(x, y, z), \\ V(x_1, y_1, z_1) = V(x, y, z), \\ W(x_1, y_1, z_1) = W(x, y, z) + t. \end{cases}$$

Die Form dieser Gleichungen zeigt unmittelbar, dass diese Gleichungen, nach x_1, y_1, z_1 aufgelöst, eine Gruppe von Transformationen mit dem Parameter t vorstellen.

Eingl. Gruppe v. Trf.

So erzeugt jede infinitesimale Transformation in x, y, z eine continuierliche Gruppe von ∞^1 Transformationen, die wir eine eingliedrige Gruppe nennen.

Speciali-sierung auf Bertrf.

Alle unsere Betrachtungen gelten nun insbesondere, wenn wir x, y, p statt x, y, z schreiben und überdies annehmen, dass die betreffenden Transformationen *Berührungstransformationen* sind. Enthält eine continuierliche Gruppe von ∞^1 Berührungstransformationen eine infinitesimale Transformation, so ist dies ebenfalls eine Berührungstransformation, die wir also *eine infinitesimale Berührungstransformation* nennen. Umgekehrt, jede infinitesimale Berührungstransformation, bei der x, y, p gewisse Incremente

Infin. Berührtrf.

$$(7) \qquad \delta x = \xi(x, y, p)\, \delta t + \cdots, \qquad \delta y = \eta(x, y, p)\, \delta t + \cdots,$$
$$\delta p = \pi(x, y, z)\, \delta t + \cdots$$

erhalten, erzeugt wie oben die infinitesimale Transformation S eine eingliedrige Gruppe von Transformationen in x, y, p. Dass sie wieder Berührungstransformationen sind, lässt sich voraussehen und kann analytisch dadurch bestätigt werden, dass man zeigt, dass sie eine Gleichung von der Form

$$dy_1 - p_1\, dx_1 = \varrho(dy - p\, dx)$$

nach sich ziehen*).

Wir begnügen uns mit dieser Formulierung des Thatbestands:

Jede continuierliche Gruppe von Berührungstransformationen enthält auch eine infinitesimale Berührungstransformation, und umgekehrt erzeugt jede infinitesimale Berührungstransformation eine ganz bestimmte eingliedrige Gruppe von Berührungstransformationen.

---

*) Ausführlicher hierüber in dem Werke: Sophus Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*, bearbeitet unter Mitwirkung von Engel, Bd. II (1890), S. 255, Satz 2 daselbst.

Im nächsten Paragraphen werden diese Bemerkungen, nachdem wir die allgemeine Form einer infinitesimalen Berührungstransformation aufgestellt haben, durch Beispiele erläutert werden.

§ 2. Bestimmung aller infinitesimaler Berührungstransformationen.

Die Gleichungen

$$x_1 = x + \xi(x, y, p)\,\delta t + \cdots, \quad y_1 = y + \eta(x, y, p)\,\delta t + \cdots, \quad p_1 = p + \pi(x, y, z)\,\delta t + \cdots, \tag{7}$$

durch die den Coordinaten x, y, z die Incremente

$$\delta x = \xi\,\delta t + \cdots, \quad \delta y = \eta\,\delta t + \cdots, \quad \delta p = \pi\,\delta t + \cdots$$

erteilt werden, stellen dann und nur dann eine infinitesimale Berührungstransformation dar, wenn vermöge derselben eine Relation von der Form

$$dy_1 - p_1\,dx_1 = \varrho(dy - p\,dx)$$

besteht, in der ϱ eine von Null verschiedene Function von x, y, p ist. Diese Bedingung liefert durch Einsetzen der Werte (7): Bedingg. f. inf. Berühgstrf.

$$dy + d\eta\,\delta t + \cdots - (p + \pi\,\delta t + \cdots)(dx + d\xi\,\delta t + \cdots) = \\ = \varrho(dy - p\,dx).$$

Hier ist die linke Seite eine unendliche Reihe nach ganzen positiven Potenzen von δt. Entsprechend muss also auch rechts die Grösse ϱ eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von δt vorstellen. Es müssen alsdann in beiden Reihen die gleichhohen Potenzen von δt dieselben Factoren haben. Da nun links die von δt freien Glieder diese sind: $dy - p\,dx$, so muss folglich ϱ die Form haben:

$$\varrho = 1 + \sigma\,\delta t + \cdots.$$

Setzen wir die Glieder erster Ordnung in δt rechts und links einander gleich, so kommt nun:

$$d\eta - p\,d\xi - \pi\,dx = \sigma(dy - p\,dx), \tag{8}$$

oder, wie wir schreiben können:

$$d(\eta - p\xi) + \xi\,dp - \pi\,dx = \sigma(dy - p\,dx).$$

Diese Bedingung muss für alle Werte von dx, dy, dp bestehen, in denen sie linear und homogen ist. Sie zerfällt demnach in drei einzelne. Diese lassen sich, wenn man

$$\eta - p\xi = -W(x, y, p) \tag{9}$$

setzt, offenbar so schreiben:

$$\begin{aligned} W_x + \pi &= \sigma p, \\ W_y &= -\sigma, \\ W_p - \xi &= 0. \end{aligned}$$

Elimination der für uns unwesentlichen Grösse $\sigma = - W_y$ liefert:

$$\xi = W_p, \quad \pi = - W_x - p W_y,$$

sodass (9) noch giebt:

$$\eta = p W_p - W.$$

Die so gefundenen Werte:

$$(10) \qquad \xi = W_p, \quad \eta = p W_p - W, \quad \pi = - W_x - p W_y$$

erfüllen die Gleichung (8) stets, wie auch die Function W von x, y, p gewählt sein mag. Sie stellen also, wenn man sie mit δt multipliciert, die Incremente von x, y, p bei einer infinitesimalen Berührungstransformation dar, sobald man, wie wir im Allgemeinen thun, die Glieder höherer Ordnung in δt unberücksichtigt lässt. Die Incremente sind also:

Incremente von x, y, p.

$$(11) \quad \delta x = W_p \delta t, \quad \delta y = (p W_p - W) \delta t, \quad \delta p = - (W_x + p W_y) \delta t.$$

Eine beliebige Function f von x, y, p erfährt bei dieser infinitesimalen Berührungstransformation ebenfalls einen unendlich kleinen Zuwachs, nämlich diesen:

$$\delta f \equiv \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial p} \delta p$$

oder:

$$\delta f = \left\{ W_p \frac{\partial f}{\partial x} + (p W_p - W) \frac{\partial f}{\partial y} - (W_x + p W_y) \frac{\partial f}{\partial p} \right\} \delta t.$$

Dieser lässt sich mit Hülfe des im § 1 des vorigen Kapitels (S. 69) eingeführten Klammersymbols [ ] bequemer schreiben. Es ist ja nach der damaligen Formel (6):

$$[Wf] \equiv W_p (f_x + p f_y) - f_p (W_x + p W_y)$$

und daher:

$$(12) \qquad \delta f = \{ [Wf] - W f_y \} \delta t.$$

Kennt man das Increment δf einer beliebigen Function f von x, y, p bei einer infinitesimalen Berührungstransformation, so kennt man insbesondere auch die Incremente, die x, y, p bei der infinitesimalen Transformation erfahren. Denn sie ergeben sich aus δf, wenn man darin f durch x, y, p ersetzt. Diese Bemerkung legt es nahe, den Ausdruck

$$\frac{\delta f}{\delta t} = [Wf] - W \frac{\partial f}{\partial y}$$

Symbol d. inf. Berührgstrf.

als *Symbol der infinitesimalen Berührungstransformation* (11) zu benutzen. Hin und wieder werden wir dies Symbol einer infinitesimalen Berührungstransformation auch mit Bf bezeichnen.

Unsere Ergebnisse sind diese:

Theorem 3: *Jede infinitesimale Berührungstransformation der Ebene ist durch eine einzige Function $W(x, y, p)$ vollständig bestimmt, die keinerlei Beschränkung unterworfen ist. Bei dieser infinitesimalen Berührungstransformation erhalten x, y, p die Incremente:*

$$\delta x = W_p \delta t, \quad \delta y = (p W_p - W)\, \delta t, \quad \delta p = -\,(W_x + p W_y)\, \delta t,$$

und das Symbol der Transformation ist:

$$[Wf] - W \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Die Function W nennen wir *die charakteristische Function der infinitesimalen Berührungstransformation.* Char. Fct. d. inf. Berührtrf.

Sie besitzt eine beachtenswerte *geometrische Bedeutung.* Betrachten wir nämlich irgend ein Linienelement $l(x, y, p)$, das bei der infinitesimalen Berührungstransformation in das unendlich benachbarte Element l_1 übergeht (Fig. 32). Die Gerade des Elementes l hat in den laufenden Punktcoordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ die Gleichung: Geom. Deutg. d. char. Function.

$$p(\mathfrak{x} - x) - (\mathfrak{y} - y) = 0,$$

sodass ein beliebiger Punkt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ von dieser Geraden den Abstand hat:

$$\frac{p(\mathfrak{x} - x) - (\mathfrak{y} - y)}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

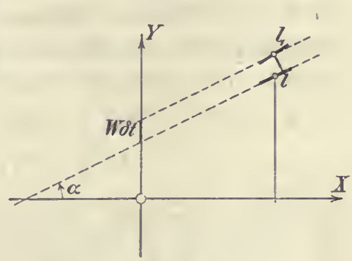

Fig. 32.

Insbesondere hat der Punkt des neuen Elementes l_1 die Coordinaten:

$$\mathfrak{x} = x + \delta x, \quad \mathfrak{y} = y + \delta y.$$

Er hat also von jener Geraden den Abstand

$$\frac{p\, \delta x - \delta y}{\sqrt{1 + p^2}},$$

oder nach (11) den Abstand

$$\frac{W}{\sqrt{1 + p^2}}\, \delta t.$$

Bildet die Gerade des Elementes l mit der x-Axe den Winkel α, so ist

$$p = \operatorname{tg} \alpha,$$

sodass der besprochene Abstand gleich

$$W \cos \alpha \cdot \delta t$$

ist. Dieses Lot bildet wieder mit der y-Axe den Winkel α. Also ist

$$W \delta t$$

gleich der Strecke, die auf der y-Axe von der Geraden des Elementes l und von der Parallelen dazu durch den Punkt des Elementes l_1 abgeschnitten wird.

Gruppe von Dilatationen.

1. Beispiel: Setzt man die charakteristische Function

$$W = \sqrt{1+p^2},$$

so lehrt die soeben angegebene Construction, dass der Punkt des neuen Elementes l_1 einen constanten Abstand δt vom ursprünglichen Element hat. Ferner giebt Theorem 3:

$$\delta x = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\delta t, \quad \delta y = \frac{-1}{\sqrt{1+p^2}}\delta t, \quad \delta p = 0,$$

oder also

$$x_1 = x + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\delta t, \quad y_1 = y - \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\delta t, \quad p_1 = p.$$

Diese Gleichungen zeigen, dass wir es hier mit der *infinitesimalen Dilatation* um die Strecke δt zu thun haben. (Vgl. § 5 des 2. Kap., S. 58.) Geht man von einer endlichen Dilatation D aus, so erhält man in bekannter Weise unendlich viele Dilatationen:

$$\ldots D^{-m} \ldots D^{-1}, \; D^0, \; D^1, \; D^2 \ldots D^m \ldots,$$

die eine unendliche, aber nicht-continuierliche Gruppe bilden. Wird die Dilatation D infinitesimal gewählt, so kommt man entsprechend zu einer nunmehr continuierlichen eingliedrigen Gruppe, die aus lauter Dilatationen und zwar aus allen Dilatationen besteht.

Analytisch ergiebt sich diese eingliedrige Gruppe durch Integration des simultanen Systems, das wir im vorigen Paragraphen unter (5) anführten (S. 92), und das hier so lautet:

$$\frac{\sqrt{1+p_1^2}\,dx_1}{p_1} = \frac{\sqrt{1+p_1^2}\,dy_1}{-1} = \frac{dp_1}{0} = \frac{dt}{1}.$$

x_1, y_1, p_1 sollen sich dabei für $t=0$ auf x, y, p reducieren. Die Integration liefert $p_1 = p$ und also:

$$x_1 = x + \frac{pt}{\sqrt{1+p^2}}, \quad y_1 = y - \frac{t}{\sqrt{1+p^2}}, \quad p_1 = p. \tag{13}$$

Dies aber ist die Dilatation um die Strecke t.

Wellenbewegg. im isotropen elast. Medium.

Mit der eingliedrigen Gruppe von Dilatationen steht in genauestem Zusammenhange das, was man in der Physik unter *Wellenbewegung in einem isotropen elastischen Medium* versteht. Bei der von einem einzigen Erregungscentrum p_0 ausgehenden Wellenbewegung (vgl. Fig. 33) wird die Bewegung innerhalb eines Zeitabschnittes bis zu allen Punkten p eines Kreises um den Mittelpunkt p_0 etwa mit dem Radius t fortgepflanzt, genau so also, wie bei der Dilatation (13) der Punkt p_0 in diesen Kreis übergeht. Man kann nun einen jeden Punkt p dieses Kreises als Mittelpunkt einer neuen Elementarwelle auffassen, die sich nach einem zweiten Zeitabschnitt bis zu Kreisen mit gleichen Radien t_1 um diese Punkte p fortpflanzen. Alle diese Elementarwellen haben eine Umhüllende, und diese ist nach dem *Huygens'schen Principe* die Welle, die nach der Gesamtzeit aus dem Erregungscentrum p_0 fortgepflanzt worden ist. (Es kommt hierbei nur der äussere umhüllende Kreis in betracht, da die Wellen in einem bestimmten Sinne fortschreiten.) Genau ebenso aber geht bei der Dilatation

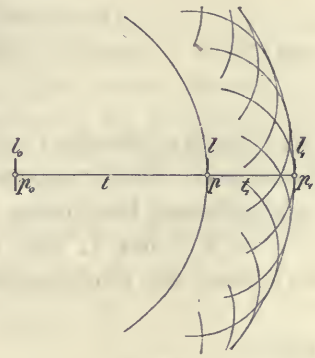

Fig. 33.

$$(14) \qquad x_1 = x + \frac{pt_1}{\sqrt{1+p^2}}, \quad y_1 = y - \frac{t_1}{\sqrt{1+p^2}}, \quad p_1 = p$$

jeder Punkt p des Kreises um p_0 in einen Kreis um p mit dem Radius t_1 über, sodass der Kreis um p bei der Dilatation (14) in den Kreis um p mit den Radius $t + t_1$ verwandelt wird, also in den Kreis, in den der Punkt p bei successiver Ausführung der Dilatationen (13) und (14) übergeht.

Das Huygens'sche Princip deckt sich also damit, dass alle Dilatationen eine eingliedrige Gruppe bilden. Huygens-sches Princip.

2. Beispiel: Es liege eine infinitesimale *Punkt*transformation vor, bei der x, y die Zuwüchse erhalten: Erweiterte inf. Pkttrf.

$$\delta x = \xi(x, y)\,\delta t, \quad \delta y = \eta(x, y)\,\delta t,$$

die also nur von x, y, nicht von p abhängen. Wir fragen, ob es eine infinitesimale Berührungstransformation giebt, bei der x, y gerade diese Incremente erfahren. Ist W die charakteristische Function der fraglichen Berührungstransformation, so muss nach Theorem 3

$$\xi(x, y) = W_p, \quad \eta(x, y) = p\,W_p - W$$

sein. Dies würde also liefern:

$$W = \xi(x, y)\,p - \eta(x, y).$$

W wäre also linear in p. Setzen wir andererseits $W \equiv \xi p - \eta$, so ergiebt das Theorem 3 für x, y, p die Incremente:

$$
(15) \qquad
\begin{aligned}
\delta x &= W_p \delta t = \xi \delta t, \\
\delta y &= (p W_p - W) \delta t = \eta \delta t, \\
\delta p &= -(W_x + p W_y) \delta t = \\
&= \{\eta_x + (\eta_y - \xi_x) p - \xi_y p^2\} \delta t.
\end{aligned}
$$

Die charakteristische Function $p\xi - \eta$ liefert also wirklich eine infinitesimale Berührungstransformation, die x und y gerade die vorgeschriebenen Incremente $\xi \delta t$, $\eta \delta t$ erteilt.

In § 1 des 1. Kap. (S. 13) haben wir aber gefunden, dass das Erweitern der Punkttransformation

$$x_1 = X(x, y), \quad y_1 = Y(x, y)$$

liefert:

$$(16) \qquad p_1 = \frac{Y_x + Y_y p}{X_x + X_y p}.$$

Wenn nun hier

$$X = x + \xi(x, y) \delta t, \quad Y = y + \eta(x, y) \delta t$$

ist, so liegt eine *infinitesimale* Punkttransformation vor, und es kommt nach (16):

$$p_1 = \frac{p + (\eta_x + \eta_y p) \delta t}{1 + (\xi_x + \xi_y p) \delta t},$$

oder, da statt der Division mit $1 + (\xi_x + \xi_y p) \delta t$ die Multiplication mit $1 - (\xi_x + \xi_y p) \delta t$ vorgenommen werden darf, bei Nichtberücksichtigung der höheren Potenzen von δt:

$$p_1 = p + \{\eta_x + (\eta_y - \xi_x) p - \xi_y p^2\} \delta t.$$

Vergleichen wir diese Formel mit (15), so gelangen wir zu dem folgenden wichtigen Resultat:

Es ergiebt sich die Erweiterung der infinitesimalen Punkttransformation $\delta x = \xi(x, y) \delta t$, $\delta y = \eta(x, y) \delta t$, wenn man der charakteristischen Function einer infinitesimalen Berührungstransformation den in p linearen Wert $\xi p - \eta$ erteilt.

Anderes Coordinatensystem.

3. Beispiel: Wir haben zum Schluss des § 4 des zweiten Kapitels (S. 55) darauf hingewiesen, dass die analytische Form unserer Theorie der Berührungstransformationen vom Coordinatensystem unabhängig ist. Wenn wir z. B. Polarcoordinaten r, φ benutzen, so wird jedes Linienelement durch seine Coordinaten

$$r, \varphi \text{ und } \varphi' = \frac{d\varphi}{dr}$$

gegeben. Alle Berührungstransformationen lassen sich bei dieser Wahl der Veränderlichen als Transformationen in r, φ und φ' definieren, die eine Bedingungsgleichung von der Form

$$d\varphi_1 - \varphi_1' dr_1 = \varrho(d\varphi - \varphi' dr)$$

erfüllen. Daher werden die Incremente, die r, φ, φ' bei einer infinitesimalen Berührungstransformation erfahren, genau so durch eine charakteristische Function $W(r, \varphi, \varphi')$ und ihre ersten Ableitungen nach r, φ, φ' ausgedrückt, wie es in Theorem 3 bei Benutzung gewöhnlicher Coordinaten x, y, y' der Fall war. Nach Theorem 3 haben wir also zu setzen:

$$(17) \quad \delta r = W_{\varphi'} \delta t, \quad \delta \varphi = (\varphi' W_{\varphi'} - W) \delta t, \quad \delta \varphi' = -(W_r + \varphi' W_\varphi) \delta t.$$

Setzen wir z. B. für W die Function

Inf. Fusspunkt-Trf.

$$(18) \qquad W \equiv r\varphi' \lg \frac{r\varphi'}{\sqrt{1 + r^2\varphi'^2}} - \operatorname{arc\,tg} r\varphi' + \frac{\pi}{2},$$

so ergiebt sich

$$(19) \qquad \begin{cases} \delta r = r \lg \dfrac{r\varphi'}{\sqrt{1+r^2\varphi'^2}} \delta t, \\ \delta \varphi = \left(\operatorname{arc\,tg} r\varphi' - \dfrac{\pi}{2}\right) \delta t, \\ \delta \varphi' = - \varphi' \lg \dfrac{r\varphi'}{\sqrt{1 + r^2\varphi'^2}} \delta t. \end{cases}$$

Um die geometrische Bedeutung dieser infinitesimalen Berührungstransformation zu finden, wollen wir, wie früher einmal gelegentlich, in Beispiel 7 des § 5, 2. Kap. (S. 63), anstelle von φ' als dritte Coordinate des Linienelementes (r, φ, φ') den Winkel τ einführen, den das Element mit dem Radiusvector r bildet, sodass

$$\varphi' = \frac{\operatorname{tg} \tau}{r}$$

ist. (Vgl. die dortige Fig. 28.) Es ist nach (19):

$$\delta \tau = 0;$$

wir können daher die infinitesimale Berührungstransformation auch so schreiben:

$$(20) \qquad \delta r = r \lg \sin \tau \cdot \delta t, \quad \delta \varphi = \left(\tau - \frac{\pi}{2}\right) \delta t, \quad \delta \tau = 0,$$

oder

$$(20') \qquad r_1 = r(1 + \lg \sin \tau \cdot \delta t), \quad \varphi_1 = \varphi + \left(\tau - \frac{\pi}{2}\right) \delta t, \quad \tau_1 = \tau.$$

Wir erinnern nun daran, dass wir in dem oben erwähnten Beispiele diejenige Berührungstransformation F^n, die durch n-malige successive Ausübung der Fusspunkt-Transformation mit dem Anfangspunkt O als Pol hervorgeht, in der Form dargestellt haben (vgl. die dortige Formel (46), S. 64):

$$(21) \qquad r_n = r \sin^n \tau, \quad \varphi_n = \varphi + n\tau - \frac{n}{2}\pi, \quad \tau_n = \tau.$$

Man sieht, dass diese insbesondere die Form (20′) annimmt, sobald für n die unendlich kleine Grösse δt gesetzt wird. Wir bemerkten schon damals, dass die Grösse n nicht notwendig eine ganze positive Zahl ist, sondern vielmehr eine beliebige Constante sein kann. Lässt man n in (21) variieren, so liegt eine continuierliche Gruppe von Berührungstransformationen vor, die insbesondere die infinitesimale Transformation (20) oder (20′) enthält. Dass sie umgekehrt von dieser erzeugt wird, verificieren wir durch Integration des zu (20) gehörigen Systems von simultanen Differentialgleichungen:

$$\frac{dr_1}{r_1 \lg \sin \tau_1} = \frac{d\varphi_1}{\tau_1 - \frac{\pi}{2}} = \frac{d\tau_1}{0} = dt$$

mit den Anfangswerten r, φ, τ von r_1, φ_1, τ_1 für $t = 0$. Es kommt zunächst $\tau_1 = \tau$, darauf

$$\varphi_1 = \varphi + \left(\tau - \frac{\pi}{2}\right) t$$

und schliesslich noch

$$\frac{d \lg r_1}{dt} = \lg \sin \tau,$$

d. h.

$$r_1 = r \sin^t \tau.$$

Also ergeben sich die Werte (21), nur steht statt n die Grösse t. Wir haben also *die eingliedrige Gruppe von Berührungstransformationen vor uns, die insbesondere die Fusspunkt-Transformation mit dem Pol O und alle ihre Wiederholungen sowie die dazu inversen Transformationen enthält.*

Verallgemein. d. inf. Dilatation.

4. Beispiel: Wir sahen (im 1. Beispiel), dass die Wellenbewegung im isotropen elastischen Medium in der eingliedrigen Gruppe aller Dilatationen ihren analytischen Ausdruck findet. Es giebt eine umfassendere Kategorie von eingliedrigen Gruppen von Berührungstransformationen, die in einer ähnlichen Beziehung zur allgemeinsten Wellenbewegung im nicht isotropen Medium stehen:

Inf. Berührtrf. der Optik.

Wir wählen eine infinitesimale Berührungstransformation, *deren charakteristische Function W von p allein abhängt,* aber sonst beliebig ist:

$$W = \Pi(p).$$

Dann ergiebt sich nach Theorem 3:

$$\delta x = \Pi' \delta t, \quad \delta y = (p\Pi' - \Pi) \delta t, \quad \delta p = 0.$$

Die letzte Formel sagt aus, *dass jedes Linienelement parallel mit sich selbst verschoben wird.* Durch Integration des Systems:

$$\frac{dx_1}{\Pi'(p_1)} = \frac{dy_1}{p_1 \Pi'(p_1) - \Pi(p_1)} = \frac{dp_1}{0} = dt$$

ergiebt sich die zugehörige eingliedrige Gruppe von Berührungstransformationen:

$$(22) \qquad \begin{cases} x_1 = x + \Pi'(p)\, t, \\ y_1 = y + (p\Pi' - \Pi)\, t, \\ p_1 = p. \end{cases}$$

Betrachten wir einen beliebigen Punkt (x, y). Er geht bei der durch (22) für ein bestimmt gewähltes t dargestellten Berührungstransformation in eine Curve über, deren Gleichung, geschrieben in den laufenden Coordinaten x_1, y_1, durch Elimination von p aus den beiden ersten Gleichungen (22) hervorgeht. Man findet dadurch eine Gleichung von der Form:

$$(23) \qquad \Omega\left(\frac{x_1 - x}{t}, \quad \frac{y_1 - y}{t}\right) = 0.$$

Die eingliedrige Gruppe (22) besteht somit aus Berührungstransformationen, die mit allen Translationen vertauschbar sind (vgl. das 3. Beispiel des § 5, 2. Kap., S. 59).

Bei jeder einzelnen Berührungstransformation dieser Gruppe gehen alle Punkte in congruente und gleichgestellte Curven über. Variieren wir t, so sehen wir aus der Form der Gleichung (23), dass die Curven, in welche ein beliebiger Punkt (x, y) nach und nach bei allen Transformationen der vorliegenden eingliedrigen Gruppe übergeht, einander ähnlich und ähnlich gelegen sind, indem ihr Ähnlichkeitsmassstab direct durch die verschiedenen Werte von t gegeben wird.

Wenn wir z. B. die charakteristische Function W oder $\Pi(p)$ in der besonderen Form

$$W \equiv \Pi \equiv \sqrt{a^2 p^2 + b^2} \tag{24}$$

wählen, in der a, b Constanten bedeuten, so ergiebt sich, dass der Punkt (x, y) bei der Berührungstransformation (22) in die *Ellipse:*

$$\frac{(x_1 - x)^2}{(at)^2} + \frac{(y_1 - y)^2}{(bt)^2} = 1$$

übergeht, geschrieben in den laufenden Coordinaten x_1, y_1. Diese besondere Annahme erläutert die Fig. 34. Der Punkt p_0 geht bei der zum Werte t gehörigen

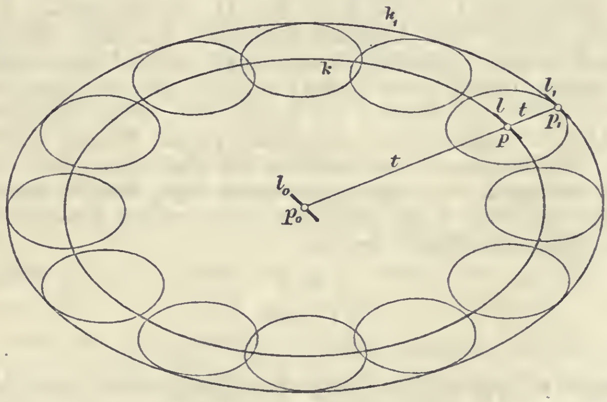

Fig. 34.

Transformation der eingliedrigen Gruppe in eine Ellipse k über. Führt man nachher auf alle Punkte p dieser Ellipse die zum Werte t_1 gehörige Transformation der Gruppe aus, so gehen diese Punkte p in Ellipsen über, die einander congruent und mit k ähnlich und ähnlich gelegen sind. Sie besitzen als äussere Umhüllende eine gewisse Curve k_1, in welche die Ellipse k bei der zweiten Transformation übergeht. Der Aufeinanderfolge beider Transformationen ist die Transformation der eingliedrigen Gruppe äquivalent, die zum Parameterwert $t + t_1$ gehört. Sie führt den Punkt p direct in die neue Curve k_1 über, und diese muss daher eine zu k ähnliche, ähnlich gelegene und concentrische Ellipse sein.

Hätten wir der Function W, die nur von p abhängen soll, irgend eine andere Form erteilt, so wären anstelle aller dieser Ellipsen andere einander ähnliche und ähnlich gelegene Curven getreten.

Allgemeine Wellenbeweg. im elastischen Medium.

Bei der successiven Ausführung der Transformationen unserer eingliedrigen Gruppe geht also jeder Punkt p_0 in eine Reihe einander ähnlicher und ähnlich gelegener Curven über. Dies erinnert an die in der Theorie der elastischen Medien auftretende Erscheinung: Ist die ganze Ebene von einem elastischen Medium erfüllt, in dem sich Bewegungen, die von einem Punkte ausgehen, mit verschiedenen Geschwindigkeiten nach den verschiedenen Richtungen hin fortpflanzen, doch so, dass die Geschwindigkeit nur von der Richtung abhängt, so verursacht ein Erregungscentrum p_0 nach und nach eine Reihe von *Wellen*, die einander ähnlich und ähnlich gelegen sind mit dem gemeinsamen Ähnlichkeitspunkt p_0. Unsere obige Betrachtung ist eben nichts anderes, als die rein mathematische Auffassung des *Huygens'schen Princips*, angewandt auf elastische Medien der genannten Art. *Sie zeigt, dass dieses Princip sich damit deckt, dass die betrachteten* ∞^1 *Berührungstransformationen eine eingliedrige Gruppe bilden.* Der durch die Annahme (24) bewirkte Specialfall tritt in der Optik bei den doppelt brechenden Krystallen auf.

Huygens-sches Princip.

Wellen bei belieb. eingl. Gruppe v. Bertrf.

Liegt *irgend eine infinitesimale Berührungstransformation* mit der charakteristischen Function $W(x, y, p)$ vor, sowie die von ihr erzeugte eingliedrige Gruppe, so führen alle ∞^1 Berührungstransformationen dieser Gruppe eine beliebige Curve successive in eine Schar von ∞^1 Curven über, deren jede folgende aus der unmittelbar vorhergehenden durch Ausübung der infinitesimalen Berührungstransformation

$$\delta x = W_p \delta t, \quad \delta y = (p W_p - W)\,\delta t, \quad \delta p = -(W_x + p W_y)\,\delta t$$

hervorgeht. Deutet man t als die Zeit, also δt als Zeitelement, *so kann man dies Phänomen als eine Wellenbewegung auffassen.* Man kann alsdann von der Geschwindigkeit sprechen, mit der sich der Punkt p eines Linienelementes l einer der Wellen bewegt. Geht l in der Zeit δt in l_1 über, so wird diese Geschwindigkeit gemessen durch den Abstand der Punkte der beiden Elemente l und l_1, dividiert durch δt. Projiciert man den Abstand auf die Normale des Elementes l, d. h. auf die Wellennormale, und dividiert die Projection durch δt, so erhält man, können wir sagen, die *Normalgeschwindigkeit der Welle* an der betreffenden Stelle. Infolge der oben (S. 95) gegebenen geometrischen Deutung (vgl. Fig. 32) ist diese Normalgeschwindigkeit gleich

Normalgeschwindigkt. d. Welle.

$$\frac{W}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Inf. Berührtrf. der Mechanik.

5. **Beispiel:** Wir suchen jetzt die allgemeinste infinitesimale Berührungstransformation der Ebene, bei der jedes Linienelement (x, y, p) eine solche neue Lage $(x + \delta x,\ y + \delta y,\ p + \delta p)$ erhält, dass die Verschiebungsrichtung $\delta y : \delta x$ des Punktes des Elementes (x, y, p) und die Gerade dieses Elementes auf einander senkrecht stehen. Da die soeben erwähnte Gerade in den laufenden Coordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ die Gleichung hat:

$$p(\mathfrak{x} - x) - (\mathfrak{y} - y) = 0,$$

so soll also sein:

$$\delta x + p\,\delta y = 0.$$

Wir suchen mithin alle infinitesimalen Berührungstransformationen, bei denen

(25) $$\delta x + p\,\delta y = 0$$

ist. Nach Theorem 3 müssen ihre charakteristischen Functionen W der Relation genügen:

(26) $$W_p + p(p W_p - W) = 0,$$

oder

$$\frac{\partial \lg W}{\partial p} = \frac{1}{2} \frac{\partial \lg (1+p^2)}{\partial p},$$

woraus sich ihre allgemeine Form ergiebt:

$$W = \Omega(x, y) \sqrt{1+p^2}. \tag{27}$$

Hierin bedeutet $\Omega(x, y)$ eine willkürliche Function von x, y. Nach Theorem 3 kommt

$$\delta x = \frac{p\Omega}{\sqrt{1+p^2}} \delta t, \quad \delta y = \frac{-\Omega}{\sqrt{1+p^2}} \delta t, \quad \delta p = -(\Omega_x + p\Omega_y)\sqrt{1+p^2}\, \delta t. \tag{27'}$$

Zu denselben infinitesimalen Berührungstransformationen der Ebene wird man geführt, wenn man alle die sucht, *bei denen jeder Punkt in einen unendlich kleinen Kreis übergeht, der den Punkt zum Mittelpunkt hat*; hierbei sind die erweiterten Punkttransformationen von vornherein ausgeschlossen. Diese Forderung drücken wir nämlich so aus, dass wir verlangen, dass $\delta x^2 + \delta y^2$ von p unabhängig sei, obgleich δx und δy nicht beide frei von p sein sollen. Wir fordern also, dass der Ausdruck

$$W_p^2 + (pW_p - W)^2$$

frei von p sei. Dies giebt die Bedingung:

$$W_{pp}\{(1+p^2)W_p - pW\} = 0.$$

Da δx und δy nicht beide frei von p sein sollen, so ist W_{pp} sicher verschieden von Null. Es bleibt also gerade die Bedingung (26).

Üben wir eine der gefundenen infinitesimalen Berührungstransformationen (27') fortwährend aus, so ergiebt sich eine eingliedrige Gruppe. Eine beliebige Curve c geht bei dieser Gruppe in eine Schar von ∞^1 Curven c_1 über. Dabei liegen die Punkte der Linienelemente, in welche irgend ein Linienelement l von c nach und nach übergeht, auf einer *Orthogonalcurve* dieser Schar. Es wird also von den Curven c_1 und den Punktorten der aus den Linienelementen von c hervorgehenden Linienelemente ein *Orthogonalsystem* erzeugt.

Die eingliedrige Gruppe von Dilatationen gehört als Specialfall hierher. In diesem speciellen Falle bestehen die zugehörigen Orthogonalsysteme aus ∞^1 parallelen Curven zusammen mit ihren gemeinsamen Normalen.

Die in diesem Beispiele betrachteten Berührungstransformationen spielen in der Mechanik eine wichtige Rolle, worauf wir später zurückkommen*).

---

*) Siehe Lie, *Die infinitesimalen Berührungstransformationen der Mechanik.* Leipziger Berichte 1889, S. 145—153. Daselbst ist die Betrachtung für den Fall eines Raumes von n Dimensionen angestellt.

Diffgl. 1. O., die eine Berührtrf. gestattet.

Jetzt gehen wir dazu über, *die gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung in x, y zu betrachten, die eine Berührungstransformation und insbesondere eine infinitesimale Berührungstransformation gestatten.*

Indem wir auf Satz 6 des § 3 des 2. Kap. (S. 47) verweisen, erinnern wir an Folgendes: Die vorgelegte Differentialgleichung

$$y' - \omega(x, y) = 0 \tag{28}$$

gestattet die gegebene Berührungstransformation

$$x_1 = X(x, y, y'), \quad y_1 = Y(x, y, y'), \quad y_1' = P(x, y, y'), \tag{29}$$

oder — wie wir auch sagen — sie bleibt bei ihr invariant, wenn die aus (28) vermöge (29) hervorgehende Gleichung genau die Form (28) hat, nur geschrieben in x_1, y_1, y_1', also die Form:

$$y_1' - \omega(x_1, y_1) = 0.$$

Alsdann führt unsere Berührungstransformation (29) jede Integralcurve der Differentialgleichung (28) wieder in eine Integralcurve derselben Differentialgleichung über. Die Berührungstransformation (29) ordnet dabei jedem Linienelement $(x, y, y' = \omega)$ einer Integralcurve von (28) ein Linienelement der neuen Integralcurve zu, also auch jedem Punkt einer Integralcurve einen Punkt einer anderen Integralcurve derart, dass allen Punkten einer Integralcurve alle Punkte einer anderen Integralcurve entsprechen. Hierdurch erhalten wir also eine *Punkt*transformation, die jede Integralcurve in eine Integralcurve verwandelt. Ihre Gleichungen erhalten wir, indem wir $y' = \omega$ in (29) einsetzen, in der Form:

Bek. inf. Pkttrf.

$$x_1 = X(x, y, \omega), \quad y_1 = Y(x, y, \omega).$$

Satz 1: *Gestattet die gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung in x, y:*

$$y' - \omega(x, y) = 0$$

die Berührungstransformation

$$x_1 = X(x, y, y'), \quad y_1 = Y(x, y, y'), \quad y_1' = P(x, y, y'),$$

so gestattet sie auch die Punkttransformation:

$$x_1 = X(x, y, \omega(x, y)), \quad y_1 = Y(x, y, \omega(x, y)).$$

Beide Transformationen vertauschen die Integralcurven der Differentialgleichungen in derselben Weise unter einander.

Triviale Trf.

Unter einer *trivialen* Berührungs- bez. Punkttransformation einer Differentialgleichung (28) soll künftig eine solche verstanden werden, die jede Integralcurve nicht in eine andere Integralcurve, sondern in sich selbst überführt. Man sieht, dass die vorgelegte Berührungstransformation und die aus ihr abgeleitete Punkttransformation der Differentialgleichung (28) immer gleichzeitig nicht-trivial oder trivial sind.

Unsere Betrachtungen gelten nun insbesondere für *infinitesimale* Transformationen: **Diffgl. mit inf. Berühr-trf.**

Liegt die Differentialgleichung

(28) $$y' - \omega(x, y) = 0$$

vor und gestattet sie eine bekannte infinitesimale Berührungstransformation:

(29) $$\delta x = \xi(x, y, y')\,\delta t, \quad \delta y = \eta(x, y, y')\,\delta t, \quad \delta y' = \pi(x, y, y')\,\delta t,$$

deren Symbol also die Form hat:

$$Bf \equiv \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \pi \frac{\partial f}{\partial y'},$$

so gestattet sie also auch die infinitesimale *Punkt*transformation:

(30) $$\delta x = \xi(x, y, \omega)\,\delta t, \quad \delta y = \eta(x, y, \omega)\,\delta t.$$

Bei dieser erfährt eine beliebige Function f von x und y den Zuwachs, der gleich

$$Uf \equiv \xi(x, y, \omega) \frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y, \omega) \frac{\partial f}{\partial y},$$

multipliciert mit δt, ist.

Ist nun die vorgelegte infinitesimale Berührungstransformation Bf nicht-trivial, so ist es auch nicht die infinitesimale Punkttransformation (30) oder Uf. Es besteht nun der Satz, dass die Differentialgleichung (28) durch Quadratur integrierbar ist, sobald sie eine bekannte nicht-triviale infinitesimale Punkttransformation gestattet.

Denn wenn $\Phi(x, y)$ Integral von (28) ist, also

$$\Phi(x, y) = \text{Const.}$$

die unbekannten ∞^1 Integralcurven darstellt, so muss einerseits wegen (28) identisch

(31) $$\Phi_x + \omega \Phi_y = 0$$

sein und andererseits der Zuwachs $\delta \Phi$ von Φ bei der infinitesimalen Punkttransformation (30) eine Function von Φ werden *):

$$\delta \Phi \equiv \Phi_x \delta x + \Phi_y \delta y = \Omega(\Phi)\,\delta t,$$

anders geschrieben

(32) $$U\Phi = \Omega(\Phi).$$

Diese Function $\Omega(\Phi)$ ist nicht identisch Null, denn sonst würden die einzelnen Integralcurven $\Phi = a$ vermöge der Transformation (30) in

---

*) Ausführlicher hierüber in den *Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen*, Kap. 6.

sich übergehen, also die Transformation (30) trivial sein. Aus (31) und aus der Gleichung (32) oder:

$$\xi(x, y, \omega)\, \Phi_x + \eta(x, y, \omega)\, \Phi_y = \Omega(\Phi)$$

lassen sich nun Φ_x und Φ_y berechnen, sodass sich für $d\Phi \equiv \Phi_x\, dx + \Phi_y\, dy$ ergiebt:

$$\frac{d\Phi}{\Omega(\Phi)} = \frac{dy - \omega\, dx}{\eta(x, y, \omega) - \omega\, \xi(x, y, \omega)}.$$

Da jede Function von Φ wieder ein Integral ist, so ergiebt sich folglich ein Integral durch Quadratur des vollständigen Differentials:

$$\Psi \equiv \int \frac{dy - \omega\, dx}{\eta(x, y, \omega) - \omega\, \xi(x, y, \omega)}.$$

Für dies Integral Ψ ist $U\Psi \equiv 1$. Hiermit haben wir gefunden:

Integration durch Quadratur.

Satz 2: *Gestattet eine vorgelegte gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung in x, y:*

$$y' - \omega(x, y) = 0$$

eine bekannte nicht-triviale infinitesimale Berührungstransformation, so ist sie durch eine Quadratur integrierbar.

Unter einer trivialen Berührungstransformation einer Differentialgleichung $y' = \omega(x, y)$ verstanden wir eine solche, die jedes Linienelement hinführt längs der Integralcurve, dem es angehört, sodass also jedes dieser Linienelemente mit dem durch die Transformation hervorgehenden vereinigt liegt. (Vgl. § 1 des 2. Kap., S. 38.)

Wir können nun umgekehrt, wenn eine infinitesimale Berührungstransformation mit der charakteristischen Function W vorliegt, die Frage nach allen den gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung stellen, die sie in trivialer Weise invariant lässt.

Linienelem., die in vereinte trf. werden.

Um dies zu erledigen, wollen wir zuerst nach allen den Linienelementen der Ebene fragen, die vermöge der Transformation in solche übergehen, die mit den ursprünglichen jedesmal vereint liegen: Das Element (x, y, p) geht vermöge der vorgelegten infinitesimalen Berührungstransformation in ein neues Element $(x + \delta x, y + \delta y, p + \delta p)$ über. Letzteres liegt mit ersterem vereint, wenn

$$\delta y - p\, \delta x = 0$$

ist. Nach Theorem 3 giebt dies einfach:

$$W(x, y, p) = 0.$$

Die Gleichung $W(x, y, p) = 0$ definiert mithin alle die ∞^2 Linienelemente (x, y, p) der Ebene, deren jedes mit dem durch die infinitesimale Berührungstransformation hervorgehenden Elemente vereint ist.

Es liegt nahe zu vermuten, dass die Schar aller dieser ∞^2 Linienelemente bei der vorgelegten infinitesimalen Berührungstransformation in sich transformiert wird. In der That ist die Änderung, die W vermöge der infinitesimalen Transformation erfährt:

$$\delta W \equiv W_x \delta x + W_y \delta y + W_p \delta p,$$

infolge des Theorems 3 gleich:

$$\delta W \equiv - W W_y \delta t,$$

d. h. für die Linienelemente, für die $W = 0$ ist, ist auch $\delta W = 0$. Es wird also die Schar der betrachteten ∞^2 Linienelemente in sich transformiert. Da ferner jedes dieser Elemente in ein mit ihm vereintes übergeht, da sich andererseits diese ∞^2 Elemente in ∞^1 Elementvereine anordnen, so wird jeder dieser Elementvereine von der vorgelegten infinitesimalen Berührungstransformation in sich übergeführt. Diese ∞^1 Elementvereine sind die Integralgebilde der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung $W(x, y, y') = 0$. Diese Differentialgleichung bleibt also in trivialer Weise invariant und ist andererseits die einzige, die in trivialer Weise invariant bleibt. Trivial inv. Diffgl. 1. O.

Satz 3: *Es giebt ∞^2 Linienelemente, die durch die infinitesimale Berührungstransformation mit der charakteristischen Function $W(x, y, p)$ so transformiert werden, dass das transformierte Element mit dem ursprünglichen vereint liegt. Es sind dies die durch die Gleichung*

$$W(x, y, p) = 0$$

definierten Elemente. Die Schar dieser Elemente ist bei der infinitesimalen Berührungstransformation invariant. Die Integralgebilde der Differentialgleichung erster Ordnung $W = 0$ sind die einzigen Elementvereine, die bei der infinitesimalen Berührungstransformation einzeln invariant bleiben. Es ist ferner $W = 0$ die einzige Differentialgleichung erster Ordnung in x, y, die bei der infinitesimalen Berührungstransformation in trivialer Weise invariant bleibt.

§ 3. Differentialinvarianten einer infinitesimalen Berührungstransformation.

Es liege eine infinitesimale Berührungstransformation vor:

$$(33) \quad \delta x = W_p \delta t, \quad \delta y = (p W_p - W) \delta t, \quad \delta p = -(W_x + p W_y) \delta t.$$

Sie erteilt x, y, p unendlich kleine Incremente. Wir verstanden unter x, y, p die Coordinaten eines Linienelementes. Wir können aber, wenn es uns beliebt, x, y, p auch als *gewöhnliche Punktcoordinaten im Raume* auffassen.

Abbildg. d. Linienel. als Pkte. d. Raumes.

Bei dieser Deutung von x, y, p wird, können wir sagen, jedes Linienelement l der (xy)-Ebene in einen Punkt des Raumes (x, y, p) abgebildet, und zwar in den Punkt, der vor bez. hinter der (xy)-Ebene im Abstande p vom Punkte (x, y) des Linienelementes l gelegen ist. (Vgl. Fig. 35.) Umgekehrt wird jeder Punkt im Raume (x, y, p) ein ganz bestimmtes Linienelement der Ebene darstellen.

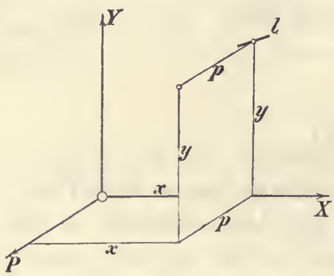

Fig. 35.

Inf. Pkttrf. d. Raumes (x, y, p).

Die Gleichungen (33) definieren bei dieser Auffassung *eine infinitesimale Punkttransformation des Raumes* (x, y, p). Führt man eine solche fortwährend aus, so beschreibt jeder Punkt allgemeiner Lage (x, y, p) in diesem Raume eine Curve, seine *Bahncurve*. Wird δt als Zeitelement gedeutet, so definieren also die Gleichungen (33) eine stationäre Strömung im Raume (x, y, p). Der Punkt (x, y, p) wird in der Zeit t in eine neue Lage (x_1, y_1, p_1) übergeführt. Diese ergiebt sich durch Integration der simultanen Differentialgleichungen:

Bahncurve.

$$(34) \qquad \frac{dx_1}{W_{p_1}} = \frac{dy_1}{p_1 W_{p_1} - W_1} = \frac{dp_1}{-W_{x_1} - p_1 W_{y_1}} = dt,$$

wenn man noch die Bedingung stellt, dass sich x_1, y_1, p_1 für $t = 0$ auf x, y, p reducieren sollen. In den Gleichungen (34) soll W_1 die Function W, geschrieben in x_1, y_1, p_1 statt x, y, p vorstellen; der Kürze wegen bezeichnen wir die Ableitungen von W_1 nach x_1, y_1, p_1 einfach mit W_{x_1}, W_{y_1} und W_{p_1}.

Da eine stationäre Strömung im Raume vorliegt, erhalten wir nur ∞^2 Bahncurven. Jede Bahncurve wird bei Ausführung der infinitesimalen Punkttransformation (33) des Raumes (x, y, p) in sich verschoben, indem ihre Punkte längs der Curve hinwandern. Sie bleibt also *invariant*. Es giebt somit gerade ∞^2 in den ganzen Raum (x, y, p) verteilte invariante Curven. Denn es erhellt sofort umgekehrt, dass eine invariante Curve entweder Bahncurve ist oder aber aus lauter invarianten Punkten bestehen muss. Letzteres kann aber nicht für ∞^2 in den ganzen Raum verteilte Curven eintreten, da sonst alle Punkte des Raumes fest wären.

Invariante Curve.

Invariante Fläche.

Soll eine *Fläche* des Raumes (x, y, p) invariant bleiben, so kann sie zunächst aus lauter einzeln invarianten Punkten bestehen. Für diese ist $\delta x = \delta y = \delta p = 0$, d. h. nach (33)

$$W = 0, \quad W_p = 0, \quad W_x + p W_y = 0.$$

Unter Umständen giebt es ∞^2 Wertsysteme (x, y, p), welche diese drei Gleichungen erfüllen. Sie werden dann ∞^2 einzeln invariante Punkte darstellen, die eine *isolierte* invariante Fläche bilden. Im allgemeinen aber wird es keine solche Fläche geben. Eine invariante Fläche kann nun andererseits aus nicht-invarianten Punkten bestehen, aus Punkten also, die Bahncurven beschreiben. Diese Curven müssen dann vollständig in der invarianten Fläche verlaufen. Die Fläche wird mithin von ∞^1 Bahncurven erzeugt. Umgekehrt leuchtet ein, dass jede von ∞^1 Bahncurven erzeugte Fläche invariant ist.

Die ∞^2 Bahncurven im Raume (x, y, p) werden sich durch zwei Gleichungen

$$u(x, y, p) = \text{Const.}, \quad v(x, y, p) = \text{Const.}$$

darstellen lassen, in denen u, v von einander unabhängig sind. Dabei sind u, v Integrale des Systems von simultanen Differentialgleichungen:

$$(34') \qquad \frac{dx}{W_p} = \frac{dy}{pW_p - W} = \frac{dp}{-W_x - pW_y}.$$

Eine von ∞^1 Bahncurven erzeugte invariante Fläche wird weiterhin allgemein durch eine beliebige Relation zwischen u und v:

$$(35) \qquad \Omega(u, v) = 0$$

dargestellt, denn diese Fläche enthält ja ∞^1 Curven $u = a$, $v = b$. Diese Betrachtungen zeigen überdies, dass die Functionen u und v bei der infinitesimalen Transformation (33) — ebenso bei jeder endlichen Transformation der zugehörigen eingliedrigen Gruppe — invariant bleiben, und ferner, dass eine jede Function von x, y, p, die diese Eigenschaft besitzt, die Form $\Omega(u, v)$ hat. Invar. Functionen.

Im vorigen Paragraphen (S. 107) haben wir schon erkannt, dass $W = 0$ eine invariante Gleichung ist. Entweder enthält die Fläche $W = 0$ also ∞^1 Bahncurven oder sie besteht aus lauter einzeln invarianten Punkten. Im ersteren Fall hat $W = 0$ auch die Form $\Omega(u, v) = 0$, und der letztere Fall tritt ein, wenn, wie oben bemerkt wurde, infolge von $W = 0$ auch $W_p = 0$ und $W_x + pW_y = 0$ ist.

Gehen wir nun von der Deutung im Raume (x, y, p) zur (xy)-Ebene der Linienelemente (x, y, p) zurück, so erhalten wir zunächst unmittelbar den

Satz 4: *Jede infinitesimale Berührungstransformation der (xy)-Ebene lässt zwei von einander unabhängige Functionen u, v von x, y, p invariant, und die allgemeinste invariante Function von x, y, p ist eine beliebige Function $\Omega(u, v)$ von diesen beiden. Diese invarianten Functionen sind die Integrale des Systems von simultanen Differentialgleichungen:* Invar. Fctn. bei inf. Bertrf.

$$\frac{dx}{W_p} = \frac{dy}{pW_p - W} = \frac{dp}{-W_x - pW_y},$$

wenn $W(x, y, p)$ *die charakteristische Function der infinitesimalen Berührungstransformation ist,*

ferner:

Invar. Gleichg. bei inf. Bertrf.

Satz 5: *Die allgemeinste Schar von* ∞^2 *Linienelementen, die bei einer infinitesimalen Berührungstransformation der* (xy)*-Ebene invariant bleibt, wird dargestellt durch eine beliebige Gleichung zwischen den beiden im vorigen Satze erwähnten invarianten Functionen* u, v*:*

$$\Omega(u, v) = 0.$$

Zu diesen Gleichungen tritt, wenn sie nicht schon unter ihnen enthalten ist, nur noch die eine:

$$W(x, y, p) = 0$$

hinzu, wenn W *die charakteristische Function der vorgelegten infinitesimalen Berührungstransformation ist.*

Differential-invarianten 1. Ordn.

Wir nennen jede bei einer infinitesimalen Berührungstransformation invariant bleibende Function von x, y, p eine *Differentialinvariante erster Ordnung.* Die Functionen u, v sowie allgemein die beliebige Function $\Omega(u, v)$ von u, v stellen demnach die Differentialinvarianten erster Ordnung im vorliegenden Falle dar. Ist Bf das Symbol der infinitesimalen Berührungstransformation, so können wir diese Differentialinvarianten $f(x, y, p)$ statt als Integrale des obigen Systems von simultanen Differentialgleichungen natürlich auch definieren als die Lösungen der linearen partiellen Differentialgleichung

$$Bf = 0.$$

Sicher sind nicht alle Differentialinvarianten erster Ordnung frei von p. Denn sonst müssten x, y selbst Differentialinvarianten sein, d. h. es wäre $W_p \equiv 0$ und $pW_p - W \equiv 0$, d. h. W müsste identisch verschwinden.

Wir können also auch den Satz aussprechen:

Satz 6: *Jede infinitesimale Berührungstransformation der* (xy)*-Ebene besitzt unendlich viele Differentialinvarianten erster Ordnung. Die allgemeinste ist eine beliebige Function* $\Omega(u, v)$ *von zwei von einander unabhängigen* u *und* v. *Es sind niemals beide Differentialinvarianten* u, v *frei von* p.

Geom. Deutung i. der Ebene.

Wir erhielten diese Ergebnisse durch anschauliche Betrachtungen im Raume (x, y, p). Wir wollen aber andeuten, wie man zu ihnen auch durch Betrachtungen in der Ebene kommt: Bei beständiger

Ausübung der infinitesimalen Berührungstransformation (33) wird ein allgemeines Linienelement (x, y, p) der (xy)-Ebene nach und nach unendlich viele Lagen annehmen, die continuierlich auf einander folgen, aber im allgemeinen keinen Elementverein bilden. Jede derartige Schar von ∞^1 Linienelementen bleibt bei der infinitesimalen Berührungstransformation (33) invariant. Insgesamt erhalten wir in dieser Weise ∞^2 Scharen von je ∞^1 Linienelementen der (xy)-Ebene derart, dass sie erstens zusammen alle ∞^3 Linienelemente der Ebene umfassen, und dass zweitens jede dieser Scharen einzeln bei der infinitesimalen Berührungstransformation (33) invariant bleibt. (Vgl. Fig. 36, nächste Seite, die zu einem Beispiel gehört.)

Fassen wir nunmehr ∞^1 solche invariante Scharen von je ∞^1 Linienelementen nach einem beliebigen Gesetze zusammen, so erhalten wir jedesmal eine invariante Schar von ∞^2 Linienelementen, die durch eine Gleichung

$$\Omega(u, v) = 0$$

dargestellt wird.

Es ist jedoch nicht nötig, diese Betrachtungen, die genau zu den früheren Ergebnissen führen würden, in ihren Einzelheiten weiter zu verfolgen. Wir empfehlen aber ihre Durchführung dem Leser zur Übung und bemerken nur noch, dass sich die besprochenen Scharen von ∞^1 Linienelementen im Raume als die oben betrachteten Bahncurven darstellen.

Dagegen müssen wir dem Satze 5 eine zwar naheliegende, aber doch wichtige neue Form geben: Die oben betrachteten Gleichungen $\Omega(u, v) = 0$ sind *Differential*gleichungen in x, y. Deshalb formulieren wir den Satz 5 jetzt so:

Satz 7: *Die allgemeinste gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung in x, y, die bei einer vorgelegten infinitesimalen Berührungstransformation mit der charakteristischen Function $W(x, y, p)$ invariant bleibt, wird erhalten durch Nullsetzen einer beliebigen Differentialinvariante erster Ordnung. Zu diesen Differentialgleichungen tritt, wenn nicht schon unter ihnen enthalten, nur noch die eine* Invar. Diffgln. 1. O.

$$W(x, y, p) = 0$$

hinzu. Letztere ist die einzige, die in trivialer Weise invariant bleibt.

1. Beispiel: Liegt eine *infinitesimale Dilatation* vor, so kann man ohne Mühe geometrisch die invarianten Differentialgleichungen erster Ordnung construieren. Da nämlich die Dilatation jede Curve in eine Parallelcurve verwandelt, so hat eine solche Differentialgleichung zu Beispiele.

Integralcurven eine Schar von Parallelcurven, d. h. *alle Evolventen einer beliebig zu wählenden Curve.* Die ∞^2 Linienelemente sind also hier alle Linienelemente, welche die Tangenten dieser Curve senkrecht schneiden. (Vgl. Fig. 36.) Die invarianten Scharen von ∞^1 Elementen bestehen aus den Elementen, die eine dieser Tangenten senkrecht schneiden.

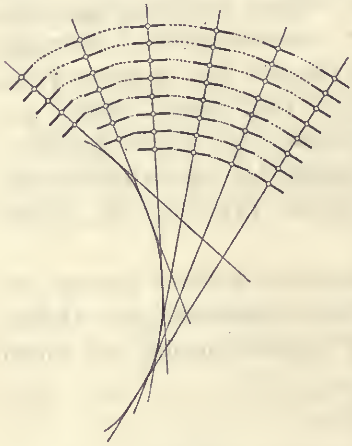

Fig. 36.

2. Beispiel: Hängt die charakteristische Function W der vorgelegten infinitesimalen Berührungstransformation nur von p ab, so liegt eine Transformation vor, die wir in dem 4. Beispiel des § 2 dieses Kapitels (S. 100) betrachteten. Die invarianten Differentialgleichungen erster Ordnung schreiben wir hier am vorteilhaftesten so:

$$y - F(x, p) = 0.$$

Es muss

$$\delta y - F_x \delta x - F_p \delta p = 0$$

sein infolge von $y = F(x, p)$. Ist nun $W = \Pi(p)$, so ist nach Theorem 3:

$$\delta x = \Pi' \delta t, \quad \delta y = (p\Pi' - \Pi)\,\delta t, \quad \delta p = 0.$$

Es soll also

$$(36) \qquad p\Pi' - \Pi - F_x \Pi' = 0$$

sein infolge von $y = F(x, p)$, d. h. aber identisch Null, da die Gleichung (36) gar nicht y enthält. F_x muss somit eine Function von p allein sein, indem Π' nicht Null ist, da sonst Π nach (36) Null wäre, was natürlich ausgeschlossen ist. Ist aber

$$F_x = \frac{p\Pi' - \Pi}{\Pi'} \equiv \varphi(p),$$

so kommt

$$F = \varphi(p)\, x + f(p).$$

Die gesuchten Differentialgleichungen haben also die Form:

$$(37) \qquad y - \varphi(p)\, x - f(p) = 0,$$

Verallgem. Clairaut-sche Diffgl. also die der *verallgemeinerten Clairaut'schen Differentialgleichung*, die wir in § 4 des 1. Kap. (S. 32) besprochen haben.

Wir können sie natürlich auch durch directe Anwendung des Satzes 7 bestimmen. Zu dem Zweck ist das System

$$\frac{dx}{\Pi'} = \frac{dy}{p\Pi' - \Pi} = \frac{dp}{0}$$

zu integrieren. Ein Integral ist p, ein anderes $(p\Pi' - \Pi)\,x - \Pi' y$. Wenn also

$$\frac{p\Pi' - \Pi}{\Pi'} = \varphi(p)$$

gesetzt wird, so haben wir die Integrale p und $y - \varphi(p)\,x$, sodass die gesuchte Differentialgleichung als allgemeine Relation zwischen diesen beiden Grössen wieder die obige Form (37) hat.

Im nächsten Paragraphen werden wir beweisen, dass man, sobald eine Differentialinvariante erster Ordnung bekannt ist, eine zweite durch Quadratur zu finden vermag. Wir bedürfen dazu jedoch einiger Vorbereitungen, die hier ihren Platz finden mögen.

Es liege eine endliche Berührungstransformation vor: Neue Veränderliche in Bertrf.

(38) $$x_1 = X(x, y, p), \quad y_1 = Y(x, y, p), \quad p_1 = P(x, y, p).$$

Führen wir statt x, y, p *neue Veränderliche* $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p}$ vermöge einer Berührungstransformation ein:

(39) $$\mathfrak{x} = \mathfrak{X}(x, y, p), \quad \mathfrak{y} = \mathfrak{Y}(x, y, p), \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{P}(x, y, p)$$

und gleichzeitig statt x_1, y_1, p_1 neue Veränderliche $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{p}_1$ durch die mit (39) ganz gleichgebaute oder, wie wir sagen, *cogrediente* Berührungstransformation:

(40) $$\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{X}(x_1, y_1, p_1), \quad \mathfrak{y}_1 = \mathfrak{Y}(x_1, y_1, p_1), \quad \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{P}(x_1, y_1, p_1),$$

so ergeben sich drei Gleichungen in $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{p}_1$, die sowohl hinsichtlich der drei ersten als hinsichtlich der drei letzten Veränderlichen auflösbar sind. Es gehen also die Gleichungen einer Transformation hervor:

(41) $$\mathfrak{x}_1 = \Phi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p}), \quad \mathfrak{y}_1 = \Psi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p}), \quad \mathfrak{p}_1 = X(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p}).$$

Wir können leicht nachweisen, dass dies eine Berührungstransformation ist. Infolge der Berührungstransformationen (38), (39), (40) bestehen ja Relationen von der Gestalt:

$$\begin{aligned} dy_1 - p_1\,dx_1 &= \varrho(x, y, p)\,(dy - p\,dx),\\ d\mathfrak{y} - \mathfrak{p}\,d\mathfrak{x} &= \sigma(x, y, p)\,(dy - p\,dx),\\ d\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{p}_1\,d\mathfrak{x}_1 &= \sigma(x_1, y_1, p_1)\,(dy_1 - p_1\,dx_1),\end{aligned}$$

woraus folgt:

$$d\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{p}_1 d\mathfrak{x}_1 = \frac{\sigma(x_1, y_1, p_1)\,\varrho(x, y, p)}{\sigma(x, y, p)}\,(d\mathfrak{y} - \mathfrak{p}\,d\mathfrak{x}).$$

Vermöge (38), (39), (40) lässt sich hierin der Factor rechts durch $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p}$ allein ausdrücken. Die dadurch hervorgehende Relation

$$d\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{p}_1\,d\mathfrak{x}_1 = \tau(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p})\,(d\mathfrak{y} - \mathfrak{p}\,d\mathfrak{x})$$

muss dann infolge von (41) bestehen. Sie sagt aus, dass die neue Transformation (41) eine Berührungstransformation ist.

Wir haben in die Berührungstransformation (38) dadurch neue Veränderliche eingeführt, dass wir durch cogrediente Gleichungen (39) und (40), die ebenfalls Berührungstransformationen darstellen, sowohl für die ursprünglichen als auch für die transformierten Veränderlichen neue Veränderliche einbrachten. Wir sagen kurz, *dass wir in die Berührungstransformation* (38) *vermöge der Berührungstransformation* (39) *neue Veränderliche eingeführt haben*, oder auch: *Wir haben die Berührungstransformation* (39) *auf die Berührungstransformation* (38) *ausgeübt.*

Die Einführung der neuen Veränderlichen kann, wenn man will, aufgefasst werden als die Zugrundelegung eines neuen Systems von Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{p}$ der Linienelemente anstelle der alten Coordinaten x, y, p; dann ist es naturgemäss, dass man auch die transformierten Linienelemente (x_1, y_1, p_1) auf dasselbe neue Coordinatensystem bezieht, d. h. sie durch $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{p}_1$ bestimmt.

Satz 8: *Jede Berührungstransformation geht durch Einführung neuer Veränderlicher vermöge einer Berührungstransformation wieder in eine Berührungstransformation über.*

Neue Veränderl. in eingl. Gr. von Bertrf.

Liegt nun eine *eingliedrige Gruppe von Berührungstransformationen* vor, so wird sie durch Einführung neuer Veränderlicher vermöge einer Berührungstransformation wieder in eine eingliedrige Gruppe von Berührungstransformationen übergeführt werden. Denn die Gruppeneigenschaft derjenigen Operationen, die in der vorgelegten eingliedrigen Gruppe ihren analytischen Ausdruck finden, kann selbstverständlich durch Einführung eines neuen Coordinatensystems nicht gestört werden. Insbesondere muss die infinitesimale Transformation der ursprünglichen eingliedrigen Gruppe in die der neuen übergehen. So folgt denn, dass jede infinitesimale Berührungstransformation durch Einführung neuer Veränderlicher vermöge einer Berührungstransformation wieder in eine infinitesimale Berührungstransformation übergeht*).

Ist

$$(42) \qquad \mathfrak{x} = \mathfrak{X}(x, y, p), \quad \mathfrak{y} = \mathfrak{Y}(x, y, p), \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{P}(x, y, p)$$

eine vorgelegte Transformation, vermöge derer neue Veränderliche $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p}$ in die infinitesimale Transformation

*) Ausführlicher hierüber in § 1, 2 des 3. Kap. der *Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bek. infin. Transformationen*, sowie in der *Theorie der Transformationsgruppen*, 2. Abschn., 15. Kap.

(43) $$Bf \equiv \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \pi \frac{\partial f}{\partial p}$$

eingeführt werden sollen, so bemerkt man, dass wegen

$$\delta x = \xi \, \delta t, \quad \delta y = \eta \, \delta t, \quad \delta p = \pi \, \delta t$$

sofort folgt:

$$\delta \mathfrak{x} = B\mathfrak{x} \cdot \delta t, \quad \delta \mathfrak{y} = B\mathfrak{y} \cdot \delta t, \quad \delta \mathfrak{p} = B\mathfrak{p} \cdot \delta t$$

und daher

$$\delta f = \left(B\mathfrak{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} + B\mathfrak{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}} + B\mathfrak{p} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{p}} \right) \delta t.$$

Es ist daher

(44) $$\mathfrak{B}f \equiv B\mathfrak{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} + B\mathfrak{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}} + B\mathfrak{p} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{p}}$$

das Symbol der infinitesimalen Transformation in den neuen Veränderlichen. Natürlich sind $B\mathfrak{x}$, $B\mathfrak{y}$, $B\mathfrak{p}$ vermöge (42) von x, y, p zu befreien und durch $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p}$ allein auszudrücken. Symbol der neuen inf. Bertrf.

Insbesondere gilt dies, wenn die Transformationen (42) und (43) Berührungstransformationen sind.

Beispiel: Führen wir in die infinitesimale Dilatation mit der charakteristischen Function Beispiel.

$$W \equiv \sqrt{1 + p^2}$$

neue Veränderliche $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{p}$ vermöge der Transformation durch reciproke Polaren (vgl. S. 24) ein:

(45) $$\mathfrak{x} = -p, \quad \mathfrak{y} = xp - y, \quad \mathfrak{p} = -x,$$

so haben wir zu setzen:

$$Bf \equiv \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Es kommt also nach (45):

$$B\mathfrak{x} = 0, \quad B\mathfrak{y} = \sqrt{1+p^2} = \sqrt{1+\mathfrak{x}^2}, \quad B\mathfrak{p} = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{\mathfrak{x}}{\sqrt{1+\mathfrak{x}^2}},$$

und das Symbol der hervorgehenden infinitesimalen Berührungstransformation lautet daher:

$$\mathfrak{B}f \equiv \sqrt{1+\mathfrak{x}^2} \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}} + \frac{\mathfrak{x}}{\sqrt{1+\mathfrak{x}^2}} \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{p}}.$$

Es ist dies die infinitesimale Berührungstransformation mit der charakteristischen Function

$$\mathfrak{W} \equiv -\sqrt{1+\mathfrak{x}^2}.$$

Wir fügen hinzu: Ist W die charakteristische Function der infinitesimalen Berührungstransformation Bf, so ist, wie Theorem 3 zeigt: Char. Fct. d. neuen inf. Bertrf.

(46) $$W \equiv p\xi - \eta.$$

Es ist aber $\xi \equiv Bx$, $\eta \equiv By$, also

$$W \equiv pBx - By.$$

Analog wird daher die transformierte infinitesimale Berührungstransformation $\mathfrak{B}f$ die charakteristische Function haben:

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{p} B\mathfrak{x} - B\mathfrak{y},$$

oder da:

$$Bf \equiv \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \pi \frac{\partial f}{\partial p}$$

ist, diese

$$\mathfrak{W} = \xi \left(\mathfrak{p} \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x}\right) + \eta \left(\mathfrak{p} \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y}\right) + \pi \left(\mathfrak{p} \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p} - \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial p}\right). \tag{47}$$

Nun besteht vermöge der Berührungstransformation (42) eine Relation von der Form

$$d\mathfrak{y} - \mathfrak{p}\, d\mathfrak{x} = \varrho (dy - p\, dx).$$

Daher ist:

$$\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x} - \mathfrak{p} \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} = - \varrho p,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} - \mathfrak{p} \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y} = \varrho,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial p} - \mathfrak{p} \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p} = 0,$$

sodass (47) liefert:

$$\mathfrak{W} = \varrho \xi p - \varrho \eta,$$

oder nach (46):

$$\mathfrak{W} = \varrho W.$$

Dies giebt den

Satz 9: *Führt man in eine infinitesimale Berührungstransformation mit der charakteristischen Function $W(x, y, p)$ neue Veränderliche $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p}$ vermöge einer Berührungstransformation*

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{X}(x, y, p), \quad \mathfrak{y} = \mathfrak{Y}(x, y, p), \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{P}(x, y, p)$$

ein, bei der

$$d\mathfrak{y} - \mathfrak{p}\, d\mathfrak{x} = \varrho (dy - p\, dx)$$

*ist, so geht die charakteristische Function $\mathfrak{W}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p})$ der neuen infinitesimalen Berührungstransformation durch Einführung der neuen Veränderlichen in ϱW hervor**).

§ 4. Bestimmung der Differentialinvarianten.

Es handelt sich jetzt zunächst darum, die im vorigen Paragraphen ausgesprochene Behauptung zu beweisen, *dass, sobald eine Differentialinvariante $u(x, y, p)$ einer infinitesimalen Berührungstransformation*

*) Es lässt sich dies Ergebnis durch elegantere und kürzere Betrachtungen ableiten, worauf wir jedoch an dieser Stelle verzichten. Als allgemeine Bemerkung fügen wir hinzu, dass sich überhaupt alle hier ausgeführten Rechnungen durch Einführung homogener Coordinaten eleganter gestalten.

bekannt ist, eine zweite davon unabhängige Differentialinvariante erster Ordnung $v(x, y, p)$ durch Quadratur zu finden ist.

Es sei

$$Bf \equiv \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \pi \frac{\partial f}{\partial p}$$

das Symbol der infinitesimalen Berührungstransformation. Alsdann sind, wie wir wissen (vgl. S. 110), die Differentialinvarianten erster Ordnung die Lösungen der linearen homogenen Differentialgleichung

$$Bf = 0.$$

Wir nehmen an, *eine* Differentialinvariante erster Ordnung $u(x,y,p)$ sei bekannt. Alsdann ist mithin

Eine Diffinv. u von Bf bekannt.

$$Bu \equiv 0.$$

Jede der ∞^1 Differentialgleichungen erster Ordnung:

(48) $$u(x, y, p) = a,$$

die zu den verschiedenen Werten von a gehören, ist nun bei Bf invariant oder gestattet Bf. Nach Satz 2 des § 2 (S. 106) lässt sie sich daher durch eine Quadratur integrieren. Wenn wir das damals angewandte Verfahren hier benutzen wollen, so lösen wir zunächst die Differentialgleichung (48) nach p auf:

(49) $$p = \omega(x, y, a)$$

und bilden

$$Uf \equiv \xi(x, y, \omega) \frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y, \omega) \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Alsdann existiert ein solches Integral Ψ, das der Relation genügt:

(50) $$U\Psi \equiv 1.$$

Wie an der bezeichneten Stelle ausgeführt wurde, lässt es sich durch *Quadratur* finden, und wir nehmen an, dass wir es so bestimmt haben. Die Function Ψ enthält ausser x, y noch die Constante a. Wenn wir nun in $\Psi(x, y, a)$ für diese sicher auftretende Constante a die Function $u(x, y, p)$ setzen, so geht aus Ψ eine neue Function

$$\Psi(x, y, u)$$

hervor, die x, y, p enthält. Diese Function hat nun eine besondere Eigenschaft.

Setzen wir sie in das Symbol Bf für f ein, so kommt der Ausdruck $B\Psi$. Nun aber enthält die neue Function Ψ die Grössen x und y an zwei Stellen, einmal explicite und dann in u. Daher wird:

(51) $$\begin{aligned} B\Psi &= \xi \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \eta \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \pi \frac{\partial \Psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial p} \\ &= \xi \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \eta \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial u}\left(\xi \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial u}{\partial y} + \pi \frac{\partial u}{\partial p}\right). \end{aligned}$$

Der in der letzten Klammer stehende Ausdruck aber ist Bu und daher identisch Null. Der Ausdruck

$$\xi(x, y, p)\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \eta(x, y, p)\frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

geht ferner aus

$$U\Psi \equiv \xi(x, y, \omega)\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \eta(x, y, \omega)\frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

dadurch hervor, dass man rückwärts für ω den Wert p oder, was dasselbe ist, für a den Wert u wieder einsetzt. Infolge von (50) aber ist $U\Psi \equiv 1$, bleibt also auch gleich 1, wenn $a = u$ gesetzt wird. Der Ausdruck (51) für $B\Psi$ reduciert sich mithin auch auf 1:

$$B\Psi(x, y, u) \equiv 1.$$

Wir wollen diese Function $\Psi(x, y, u)$, die x, y, p, aber nicht a, enthält, mit $v(x, y, p)$ bezeichnen. Alsdann ist unser Ergebnis:

Fct. v, für die $Bv \equiv 1$.

Wir kennen zwei Functionen $u(x, y, p)$ und $v(x, y, p)$, für die

$$Bu \equiv 0, \quad Bv \equiv 1$$

ist.

Nunmehr bemerken wir: Die Function $u(x, y, p)$ ist ein intermediäres Integral der gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung in x, y:

$$u_x + u_y y' + u_{y'} y'' = 0, \tag{52}$$

wo wir es vorgezogen haben, statt p das Zeichen y' zu benutzen. Die Integralcurven dieser Differentialgeichung sind die ∞^2 Curven, die von allen Integralcurven aller ∞^1 Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$u(x, y, y') = a,$$

bei willkürlicher Constanten a, gebildet werden. Aber es ist $\Psi(x, y, a)$ das Integral von $u = a$, d. h. diese ∞^2 Curven werden durch

$$\Psi(x, y, a) = b$$

dargestellt, wenn a und b als willkürliche Constanten aufgefasst werden. Diese Gleichung ist also die allgemeine Integralgleichung von (52). Setzen wir hierin für a das intermediäre Integral $u(x, y, y')$ ein, so geht hervor:

$$v(x, y, y') = b.$$

Mithin ist $v(x, y, y')$ ebenfalls ein intermediäres Integral von (52).

Dieses intermediäre Integral v ist von u unabhängig, denn wäre es eine Function $\lambda(u)$, so wäre

$$Bv \equiv \lambda'(u)\, Bu \equiv 0,$$

was mit $Bv \equiv 1$ in Widerspruch steht.

Nach Satz 7 des § 2, 3. Kap. (S. 77) liegen mithin die beiden Functionen u, v von x, y, p in Involution

(53) $$[uv] \equiv 0.$$

Nach Satz 12 des § 2, 3. Kap. (S. 81) bilden folglich die Gleichungen: Berührgs-trf., gebildet mit u und v.

(54) $$x_1 = u(x, y, p), \quad y_1 = v(x, y, p), \quad p_1 = \frac{dv}{du}$$

eine *Berührungstransformation.* Wir wollen nun durch diese Berührungstransformation neue Veränderliche in die infinitesimale Berührungstransformation Bf einführen.

Nach den Auseinandersetzungen am Schlusse des vorigen Paragraphen (S. 115) geht sie dadurch über in

$$Bx_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} + By_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial y_1} + Bp_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial p_1},$$

oder

$$Bu \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} + Bv \cdot \frac{\partial f}{\partial y_1} + Bp_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial p_1}.$$

Da aber $Bu \equiv 0$, $Bv \equiv 1$ ist, so kommt:

(55) $$\frac{\partial f}{\partial y_1} + Bp_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial p_1}.$$

Dies muss nun wieder das Symbol einer infinitesimalen Berührungstransformation in x_1, y_1, p_1 sein. Da bei ihr

$$\delta x_1 = 0, \quad \delta y_1 = \delta t$$

ist, so wird nach bekannter Regel für die Erweiterung einer infinitesimalen Punkttransformation (vgl. S. 98):

$$\delta p_1 = 0.$$

Es ist also in (55):

$$Bp_1 = 0,$$

oder wegen (54):

$$B\frac{dv}{du} \equiv 0.$$

$\frac{dv}{du}$ ist nach Satz 11, § 2 d. 3. Kap. (S. 80) eine Function von x, y, p allein. Es ist daher $\frac{dv}{du}$ eine *Differentialinvariante erster Ordnung* von Bf. Zweite Diffinv. $\frac{dv}{du}$.

Sicher ist sie von der schon bekannten Differentialinvariante u unabhängig, da die drei Gleichungen (54) als die einer Berührungstransformation nach x, y, p auflösbar sind. Es ist uns folglich gelungen, eine zweite von u unabhängige Differentialinvariante erster Ordnung von Bf zu finden. Dazu war eine Quadratur ausser ausführbaren Operationen erforderlich, sodass Satz 6 des § 3 (S. 110) ergiebt:

Satz 10: *Kennt man eine Differentialinvariante erster Ordnung einer infinitesimalen Berührungstransformation, so findet man die allgemeinste Differentialinvariante erster Ordnung durch eine Quadratur.*

Zugleich haben wir einen anderen Satz gewonnen: Es gelang uns ja, Bf vermöge der Berührungstransformation (54) in die Erweiterung der infinitesimalen Punkttransformation $\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}}$, d. h. in eine *Translation,* zu verwandeln. Daher:

Reduction d. inf. Bertrf. auf Translation.

Satz 11: *Jede infinitesimale Berührungstransformation lässt sich durch Einführung neuer Veränderlicher vermöge einer passenden Berührungstransformation in eine infinitesimale Translation verwandeln.*

Hinzuzufügen ist hierbei, dass diese Überführung durch eine *Quadratur* geleistet werden kann, sobald man eine Differentialinvariante erster Ordnung der vorgelegten infinitesimalen Berührungstransformation kennt.

Begriffl. Betrachtg.

Diese durch analytische Betrachtungen erhaltenen Ergebnisse lassen sich sämtlich auch rein begrifflich ableiten. Wir begnügen uns damit, durch synthetische Betrachtungen nur das Eine nachzuweisen, dass jede infinitesimale Berührungstransformation Bf vermöge einer passenden endlichen Berührungstransformation in eine infinitesimale Translation überführbar ist.

Es bedeute $u(x, y, y')$ wie vorher eine Lösung der Gleichung $Bf = 0$. Jede der ∞^1 Differentialgleichungen erster Ordnung

$$u(x, y, y') = a \quad (a = \text{Const.})$$

gestattet alsdann die infinitesimale Berührungstransformation Bf. Daraus folgt, dass auch die Schar aller ∞^2 Integralcurven der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$u_x + u_y y' + u_{y'} y'' = 0$$

vermöge Bf in sich transformiert wird. Es giebt nun bekanntlich eine Berührungstransformation, ja sogar unendlich viele, welche diese ∞^2 Curven in Punkte verwandeln. (Vgl. § 4 des 2. Kap., S. 49.) Durch Ausführung einer derartigen Berührungstransformation wird mithin Bf in eine solche infinitesimale Berührungstransformation übergeführt, die jeden Punkt in einen Punkt verwandelt, d. h. in die Erweiterung einer infinitesimalen *Punkt*transformation. Wir können hier als bekannt voraussetzen*), dass eine infinitesimale *Punkt*transformation durch Wahl eines passenden Coordinatensystems $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ in eine infinitesimale Translation

$$\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}}$$

überführt werden kann.

*) Vgl. hierüber die *Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen,* §§ 1, 2 des 3. Kap.

Wir knüpfen hieran noch einige Bemerkungen über weitergehende Theorien an:

Bisher sprachen wir von Differentialinvarianten *erster* Ordnung. Man kann auch solche *höherer* Ordnung definieren: Ist eine infinitesimale Berührungstransformation Bf in x, y, y' vorgelegt, so kann man sie — wie jede endliche (vgl. § 3 des 3. Kap., S. 81) — durch Hinzunahme der Transformationen, welche die höheren Differentialquotienten Diffinv. höherer Ordng.

$$y'' = \frac{dy'}{dx}, \quad y''' = \frac{dy''}{dx}, \ldots$$

erfahren, *erweitern. Differentialinvariante n^{ter} Ordnung* heisst eine solche Function von $x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}$, die bei der bis zu $y^{(n)}$ erweiterten infinitesimalen Berührungstransformation invariant bleibt. Es ist nicht schwer, zunächst Differentialinvarianten zweiter Ordnung anzugeben:

Sind nämlich $u(x, y, p)$ und $w(x, y, p)$ zwei von einander unabhängige Differentialinvarianten erster Ordnung, so bleibt offenbar $w - au$ für jeden constanten Wert von a invariant. Daher definiert die Differentialgleichung erster Ordnung

$$w - au - b = 0$$

für jedes Wertsystem der beiden Constanten a und b eine invariante Schar von ∞^1 Curven.

Folglich definiert die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{dw}{dx} - a\frac{du}{dx} = 0$$

für jeden Wert der Constanten a eine invariante Schar von ∞^2 Curven, kurz sie stellt ∞^1 einzeln invariante Differentialgleichungen zweiter Ordnung dar. Lösen wir nach a auf, so finden wir mithin, dass die Gleichung

$$\frac{\frac{dw}{dx}}{\frac{du}{dx}} = a$$

oder

$$\frac{dw}{du} = a$$

für jedes a invariant ist. Die linke Seite oder also $\frac{dw}{du}$ ist somit eine invariante Function. Nun aber ist diese Function:

$$\frac{dw}{du} = \frac{w_x + w_y y' + w_{y'} y''}{u_x + u_y y' + u_{y'} y''}$$

sicher nicht frei von y''. Denn dies würde nur dann eintreten, wenn u und w in Involution lägen. (Vgl. Satz 11 des 2. §, 3. Kap., S. 80.) Dies ist jedoch nicht der Fall, weil sonst auch u und die obige Function $\frac{dv}{du}$, von denen w abhängt, in Involution lägen, während doch, da (54) eine Berührungstransformation ist, nach Theorem 2 (S. 73), der Klammerausdruck

$$\left[u, \frac{dv}{du}\right] \mp 0$$

ist. Mithin ist $\frac{dw}{du}$ eine *Differentialinvariante zweiter Ordnung.* Diffinv. 2. Ordng.

In derselben Weise folgt, dass $\frac{d^2 w}{du^2}$ eine Differentialinvariante dritter Ordnung u. s. w. ist. Hieraus lässt sich alsdann schliessen, dass die *allgemeinste Differentialinvariante n^{ter} Ordnung* die Form hat:

$$\Omega\left(u, w, \frac{dw}{du}, \frac{d^2w}{du^2}, \cdots \frac{d^{n-1}w}{du^{n-1}}\right).$$

Gleich Null gesetzt stellt sie (für $n > 1$) die allgemeinste *invariante Differentialgleichung n^{ter} Ordnung* dar:

$$\Omega\left(u, w, \frac{dw}{du}, \frac{d^2w}{du^2}, \cdots \frac{d^{n-1}w}{du^{n-1}}\right) = 0. \tag{56}$$

Hieraus kann man weiter folgern:

Integr. einer Diffgl. n^{ter} O., die Bf gestattet.

Gestattet eine Differentialgleichung n^{ter} Ordnung in x, y:

$$\Phi(x, y, y' \cdots y^{(n)}) = 0 \tag{57}$$

eine bekannte infinitesimale Berührungstransformation Bf, so lässt sich das Problem der Integration von $\Phi = 0$ in dieser Weise zerlegen: Man sucht zunächst durch Integration einer linearen partiellen Differentialgleichung in x, y, y' eine Differentialinvariante erster Ordnung $u(x, y, y')$. Eine Quadratur liefert eine zweite $w(x, y, y')$. Alsdann lässt sich die vorgelegte Gleichung (57) auf die Form (56) bringen, d. h. auf die einer Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung zwischen u und w. Hat man diese integriert, so liegt schliesslich eine Differentialgleichung erster Ordnung in x, y vor:

$$\Psi(u, w, a_1, a_2, \cdots a_{n-1}) = 0,$$

die Bf gestattet und deren Integration daher nach Satz 2 des § 2, 4. Kap. (S. 106) durch eine Quadratur geleistet werden kann.

In dieser Weise erkennt man, dass eine gewöhnliche Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, die eine bekannte infinitesimale Berührungstransformation gestattet, in zwei Differentialgleichungen zerlegt werden kann, deren eine von $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung ist, deren andere die Differentialinvarianten erster Ordnung bestimmt. Setzen wir die allgemeine Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen als bekannt voraus, so können wir, wie beiläufig erwähnt werde, das ganze Integrationsproblem zurückführen auf das Problem der Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, die eine willkürliche Constante enthält.

§ 5. Vertauschbare infinitesimale Berührungstransformationen.

In diesem Paragraphen zeigen wir, dass man zwei *vertauschbare* infinitesimale Berührungstransformationen $B_1 f$ und $B_2 f$ durch Zugrundelegen ein und desselben geeigneten Coordinatensystems stets auf die Form zweier infinitesimaler Translationen

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

bringen kann. Zunächst einige Definitionen:

Unabh. infin. Trf.

Liegen mehrere infinitesimale Transformationen $B_1 f, B_2 f, \ldots B_r f$ vor, so sagen wir, dass sie von einander *unabhängig* sind, wenn zwischen ihnen keine lineare Relation mit *constanten* Coefficienten

$$c_1 B_1 f + c_2 B_2 f + \cdots + c_r B_r f \equiv 0$$

besteht, wobei natürlich vorausgesetzt wird, dass nicht alle Constanten c Null sind. Ist on the other hand andererseits etwa $B_r f$ gleich einer Summe $c_1 B_1 f + \cdots + c_{r-1} B_{r-1} f$ mit constanten Coefficienten, so ist, sagen wir, $B_r f$ *linear ableitbar* aus den übrigen. Linear ableitb. inf. Trf.

Hiernach sind zwei infinitesimale Transformationen $B_1 f$, $B_2 f$ von einander unabhängig, wenn sie sich nicht nur um einen constanten Factor unterscheiden. Es leuchtet daher ein, dass zwei infinitesimale Transformationen, die von einander abhängig sind, dieselbe eingliedrige Gruppe erzeugen, dagegen zwei unabhängige auch zwei verschiedene eingliedrige Gruppen definieren.

Es seien nun $B_1 f$, $B_2 f$ zwei von einander unabhängige infinitesimale Transformationen in den drei Veränderlichen x, y, p:

$$B_1 f \equiv \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial y} + \pi_1 \frac{\partial f}{\partial p},$$

$$B_2 f \equiv \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial y} + \pi_2 \frac{\partial f}{\partial p}.$$

Bei Untersuchungen über infinitesimale Transformationen spielt nun der Ausdruck

$$(58) \qquad B_1(B_2 f) - B_2(B_1 f)$$

fast immer eine grosse Rolle. Wir nennen ihn den *Klammerausdruck* der beiden infinitesimalen Transformationen. Klammerausdruck.

$B_1 f$ und $B_2 f$ stellen, analytisch betrachtet, Differentiationsprocesse dar, die auf eine beliebige Function f ausgeübt werden. In dem Klammerausdruck stellt demnach das erste Glied $B_1(B_2 f)$ den Ausdruck dar, der hervorgeht, wenn man auf f zuerst den Differentiationsprocess $B_2 f$, alsdann auf das Resultat den Differentiationsprocess $B_1 f$ zur Anwendung bringt. Dies liefert offenbar einen Ausdruck, der die ersten und zweiten partiellen Differentialquotienten von f linear und homogen enthält. Ähnliches gilt von $B_2(B_1 f)$. Aber man erkennt unschwer, dass die zweiten partiellen Differentialquotienten von f in $B_1(B_2 f)$ mit denselben Coefficienten wie in $B_2(B_1 f)$ auftreten, dass sie daher im Klammerausdruck (58) fehlen. Man erkennt so, dass der Klammerausdruck die Form hat:

$$(59) \qquad B_1(B_2 f) - B_2(B_1 f) \equiv (B_1 \xi_2 - B_2 \xi_1) \frac{\partial f}{\partial x} + \\ + (B_1 \eta_2 - B_2 \eta_1) \frac{\partial f}{\partial y} + (B_1 \pi_2 - B_2 \pi_1) \frac{\partial f}{\partial p}.$$

Der Klammerausdruck ist daher ebenfalls eine infinitesimale Transformation in den Veränderlichen x, y, p.

Gehen ferner $B_1 f$ und $B_2 f$ durch Einführung neuer Veränderlicher etwa in $\mathfrak{B}_1 f$ und $\mathfrak{B}_2 f$ über, so ist

$$B_1(B_2 f) = \mathfrak{B}_1(\mathfrak{B}_2 f), \quad B_2(B_1 f) = \mathfrak{B}_2(\mathfrak{B}_1 f),$$

also auch:

$$B_1(B_2 f) - B_2(B_1 f) = \mathfrak{B}_1(\mathfrak{B}_2 f) - \mathfrak{B}_2(\mathfrak{B}_1 f). \tag{59'}$$

Sind $B_1 f$ und $B_2 f$ insbesondere Berührungstransformationen und W_1, W_2 ihre charakteristischen Functionen, so ist nach Theorem 3

$$\begin{cases} \xi_1 \equiv \dfrac{\partial W_1}{\partial p}, \quad \eta_1 \equiv p\dfrac{\partial W_1}{\partial p} - W_1, \quad \pi_1 \equiv -\dfrac{\partial W_1}{\partial x} - p\dfrac{\partial W_1}{\partial y}; \\ \xi_2 \equiv \dfrac{\partial W_2}{\partial p}, \quad \eta_2 \equiv p\dfrac{\partial W_2}{\partial p} - W_2, \quad \pi_2 \equiv -\dfrac{\partial W_2}{\partial x} - p\dfrac{\partial W_2}{\partial y}. \end{cases} \tag{60}$$

Da der Klammerausdruck die Form (59) hat, so stellt er eine infinitesimale Transformation dar, die x, y, p die Incremente erteilt:

$$\begin{aligned} \delta x &= (B_1 \xi_2 - B_2 \xi_1)\,\delta t, \\ \delta y &= (B_1 \eta_2 - B_2 \eta_1)\,\delta t, \\ \delta p &= (B_1 \pi_2 - B_2 \pi_1)\,\delta t. \end{aligned}$$

Rechnet man diese mit Rücksicht auf die Werte (60) aus, so verificiert man durch Rechnungen, die keine principiellen Schwierigkeiten bieten, dass diese Incremente die Formen haben:

$$\delta x = \frac{\partial \Omega}{\partial p}\,\delta t, \quad \delta y = \left(p\frac{\partial \Omega}{\partial p} - \Omega\right)\delta t, \quad \delta p = \left(-\frac{\partial \Omega}{\partial x} - p\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)\delta t,$$

wenn nämlich Ω die Function ist:

$$\Omega \equiv [W_1 W_2] - W_1 \frac{\partial W_2}{\partial y} + W_2 \frac{\partial W_1}{\partial y}. \tag{61}$$

Die Incremente also, die x, y, p bei der infinitesimalen Transformation erfahren, die durch den Klammerausdruck dargestellt wird, drücken sich genau so durch eine Function Ω aus, wie die Incremente der Veränderlichen bei einer vorgelegten Berührungstransformation durch die charakteristische Function der letzteren. Also folgt:

Klammerausdruck von inf. Bertrf.

Satz 12: *Der Klammerausdruck*

$$B_1(B_2 f) - B_2(B_1 f)$$

zweier infinitesimaler Berührungstransformationen in x, y, p ist ebenfalls eine infinitesimale Berührungstransformation. Sie hat die charakteristische Function

$$\Omega \equiv [W_1 W_2] - W_1 \frac{\partial W_2}{\partial y} + W_2 \frac{\partial W_1}{\partial y},$$

vorausgesetzt, dass W_1 und W_2 die charakteristischen Functionen von $B_1 f$ und $B_2 f$ sind.

Nach diesen Vorbemerkungen wollen wir uns jetzt einem besonderen Vorkommnis zuwenden: Sind $B_1 f$ und $B_2 f$ zwei von einander unabhängige infinitesimale Transformationen in den Veränderlichen x, y, p, so kann der Fall eintreten, dass der Klammerausdruck identisch verschwindet:

$$B_1(B_2 f) - B_2(B_1 f) \equiv 0.$$

Alsdann ist:

$$B_1(B_2 f) \equiv B_2(B_1 f),$$

in Worten: Führt man $B_2 f$ auf $B_1 f$ aus, so erhält man dasselbe, als ob man $B_1 f$ auf $B_2 f$ ausübt. Die Reihenfolge der beiden durch $B_1 f$ und $B_2 f$ dargestellten Differentiationsprocesse ist also dann bei ihrer Aufeinanderfolge, ausgeübt auf eine beliebige Function f, durchaus gleichgültig. Daher nennen wir in diesem Falle $B_1 f$ und $B_2 f$ zwei *vertauschbare infinitesimale Transformationen.* **Vertauschb. inf. Trf.**

Zwei infinitesimale Transformationen heissen also vertauschbar, wenn ihr Klammerausdruck identisch verschwindet.

Nunmehr wollen wir in der Folge annehmen, es seien $B_1 f$ und $B_2 f$ *zwei von einander unabhängige und vertauschbare infinitesimale Berührungstransformationen,* und es seien W_1, W_2 ihre charakteristischen Functionen. **Vertauschb. inf. Bertrf.**

Ihr Klammerausdruck soll identisch Null sein. Er ist aber nach Satz 12 eine infinitesimale Berührungstransformation, deren charakteristische Function Ω den Wert (61) hat. Eine infinitesimale Berührungstransformation hat nur dann das Symbol Null, wenn ihre charakteristische Function Null ist. Unsere Annahme drückt sich daher durch das Bestehen der Identität aus:

$$(62) \qquad [W_1 W_2] - W_1 \frac{\partial W_2}{\partial y} + W_2 \frac{\partial W_1}{\partial y} \equiv 0.$$

Nach Theorem 3 lassen sich $B_1 f$ und $B_2 f$ durch W_1 und W_2 so ausdrücken:

$$B_1 f \equiv [W_1 f] - W_1 \frac{\partial f}{\partial y},$$

$$B_2 f \equiv [W_2 f] - W_2 \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Andererseits lässt sich die Identität (62) in einer der beiden Formen schreiben:

$$\left[W_1, \frac{W_1}{W_2}\right] - W_1 \frac{\partial \frac{W_1}{W_2}}{\partial y} \equiv 0,$$

$$\left[W_2, \frac{W_1}{W_2}\right] - W_2 \frac{\partial \frac{W_1}{W_2}}{\partial y} \equiv 0.$$

Daraus folgt, dass wir sie in einer der beiden Formen schreiben können:

(63) $$B_1\left(\frac{W_1}{W_2}\right) \equiv 0, \quad B_2\left(\frac{W_1}{W_2}\right) \equiv 0.$$

Man könnte zunächst denken, dass $\frac{W_1}{W_2}$ eine Constante wäre. Aber dies widerspricht der Unabhängigkeit von $B_1 f$ und $B_2 f$. Denn wäre $W_2 =$ Const. W_1, so wären nach Theorem 3 die Incremente, die x, y, p bei $B_1 f$ erfahren, von den Incrementen, die sie bei $B_2 f$ erfahren, nur um denselben constanten Factor verschieden, d. h. es wäre $B_2 f =$ Const. $B_1 f$.

Es ist also bei den gemachten Voraussetzungen sicher $\frac{W_1}{W_2}$ keine Constante, sondern eine Function $u(x, y, p)$. Nach (63) ist

$$B_1 u \equiv 0, \quad B_2 u \equiv 0,$$

d. h. $u(x, y, p)$ ist eine *Differentialinvariante erster Ordnung von* $B_1 f$ *und auch von* $B_2 f$.

Wie wir im vorigen Paragraphen (S. 117, 118) sahen, giebt es eine von u unabhängige Function $v(x, y, p)$, die erstens mit u in Involution liegt:

$$[uv] \equiv 0$$

und überdies die Bedingung erfüllt:

$$B_1 v \equiv 1,$$

und zwar findet man, wie dort gezeigt wurde, v durch *Quadratur.* Die drei Gleichungen

(64) $$x_1 = u, \quad y_1 = v, \quad p_1 = \frac{dv}{du}$$

stellen wie damals eine Berührungstransformation vor, und in den neuen Veränderlichen x_1, y_1, p_1 erhält die infinitesimale Berührungstransformation $B_1 f$ die Form (vgl. S. 120):

$$\frac{\partial f}{\partial y_1}.$$

In den neuen Veränderlichen x_1, y_1, p_1 erhält $B_2 f$ zunächst diese Form:

$$B_2 u \frac{\partial f}{\partial x_1} + B_2 v \frac{\partial f}{\partial y_1} + B_2 p_1 \frac{\partial f}{\partial p_1}.$$

Es ist aber $B_2 u \equiv 0$, wie wir oben fanden; also erfährt x_1 bei $B_2 f$ das Increment Null. Ist nun etwa $\Phi(x_1, y_1, p_1)$ die charakteristische Function von $B_2 f$ in den neuen Veränderlichen, so ist mithin nach Theorem 3

$$\frac{\delta x_1}{\delta t} \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial p_1} \equiv 0,$$

d. h. Φ enthält nur x_1, y_1. Also ist bei $B_2 f$ ferner nach Theorem 3:

$$\frac{\delta y_1}{\delta t} \equiv p_1 \frac{\partial \Phi}{\partial p_1} - \Phi \equiv - \Phi$$

und somit auch frei von p_1. Also ist $B_2 f$ in den neuen Veränderlichen x_1, y_1, p_1 eine erweiterte infinitesimale *Punkt*transformation, etwa die Erweiterung der folgenden:

$$U_2 f \equiv \alpha(x_1, y_1) \frac{\partial f}{\partial y_1},$$

während $B_1 f$, wie wir sahen, zur infinitesimalen Translation

$$U_1 f \equiv \frac{\partial f}{\partial y_1}$$

wird, die ihre eigene Erweiterung ist. Wir haben somit $B_1 f$ und $B_2 f$ auf die Form gebracht:

$$(65) \qquad \begin{cases} B_1 f = \dfrac{\partial f}{\partial y_1}, \\ B_2 f = \alpha(x_1, y_1) \dfrac{\partial f}{\partial y_1} + \left(\dfrac{\partial \alpha}{\partial x_1} - p_1 \dfrac{\partial \alpha}{\partial y_1}\right) \dfrac{\partial f}{\partial p_1}. \end{cases}$$

Nun besteht (vgl. Formel (59′), S. 124) für jede Wahl der unabhängigen Veränderlichen die vorausgesetzte Relation:

$$B_1(B_2 f) - B_2(B_1 f) \equiv 0.$$

Bilden wir aber diese Relation nach (65), so finden wir eine Relation, in der $\frac{\partial f}{\partial y_1}$ den Coefficienten hat:

$$B_1(\alpha) - B_2(1) \equiv \frac{\partial \alpha}{\partial y_1}.$$

Also ist

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y_1} \equiv 0,$$

sodass $B_2 f$ nach (65) die Form hat:

$$B_2 f = \alpha(x_1) \frac{\partial f}{\partial y_1} + \frac{d \alpha}{d x_1} \frac{\partial f}{\partial p_1}.$$

Die Function α enthält sicher x_1. Denn wenn sie eine Constante wäre, so wäre $B_2 f =$ Const. $B_1 f$, was ausgeschlossen wurde.

Die Gleichungen:

$$(66) \qquad \mathfrak{x} = \alpha(x_1), \quad \mathfrak{y} = y_1, \quad \mathfrak{p} = \frac{p_1}{\alpha'(x_1)}$$

stellen nun eine Berührungstransformation von x_1, y_1, p_1 in $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p}$ dar, nämlich eine erweiterte Punkttransformation. In den neuen Veränderlichen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p}$ haben $B_1 f$ und $B_2 f$ einfachere Formen. Wir finden sie am bequemsten, wenn wir zuerst $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ in $U_1 f$ und $U_2 f$ einführen:

(67)
$$U_1 f = \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}}, \quad U_2 f = \mathfrak{x}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}}$$

Reduction auf einfache Formen.

und diese erweitern. Dies liefert:

(68)
$$B_1 f = \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}}, \quad B_2 f = \mathfrak{x}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}} + \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{p}}.$$

Es ist uns also gelungen, durch successive Ausführung der beiden Berührungstransformationen (64) und (66) die beiden gegebenen vertauschbaren infinitesimalen Berührungstransformationen $B_1 f$ und $B_2 f$ auf die einfachen Formen (68) zu bringen, in denen sie die Erweiterungen der infinitesimalen Punkttransformationen (67) sind.

Schliesslich führen wir abermals neue Veränderliche $\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}$ durch eine Berührungstransformation ein, indem wir die *Dualität* benutzen, die durch die Gleichung:

$$\Omega \equiv \mathfrak{x}\bar{x} + \bar{y} - \mathfrak{y} = 0$$

definiert wird, also diese (vgl. § 5 des 2. Kap., S. 56):

(69)
$$\bar{x} = \mathfrak{p}, \quad \bar{y} = \mathfrak{y} - \mathfrak{x}\mathfrak{p}, \quad \bar{p} = -\mathfrak{x}.$$

Reduction auf Translationen.

In $\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}$ geschrieben haben $B_1 f$ und $B_2 f$ die Formen von *Translationen:*

$$B_1 f = \frac{\partial f}{\partial \bar{y}}, \quad B_2 f = \frac{\partial f}{\partial \bar{x}}.$$

Wir haben nacheinander die drei Berührungstransformationen (64), (66) und (69) ausgeübt. Ihre Aufeinanderfolge ist aber einer einzigen Berührungstransformation äquivalent, nach Satz 5, § 3 des 2. Kap. (S. 46). Auch sahen wir, dass die Aufstellung der Berührungstransformation (64) eine Quadratur erforderte, während die Berührungstransformationen (66) und (69) ohne weiteres gebildet werden konnten. Die Zurückführung von $B_1 f$ und $B_2 f$ auf die soeben erhaltenen Formen verlangt also nur eine Quadratur. Wir haben mithin gefunden:

Satz 13: *Zwei von einander unabhängige und vertauschbare infinitesimale Berührungstransformationen lassen sich durch Einführung neuer Veränderlicher vermöge einer und derselben passenden Berührungstransformation auf die Form zweier infinitesimaler Translationen*

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

bringen. Diese Zurückführung ist durch eine Quadratur zu leisten.

Sind umgekehrt $B_1 f$ und $B_2 f$ zwei infinitesimale Berührungstransformationen, die sich auf Translationen

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

reducieren lassen, so ist ihr Klammerausdruck Null, da der Klammerausdruck für diese beiden Translationen Null ist. Folglich sind dann $B_1 f$ und $B_2 f$ vertauschbar. Daher können wir den Satz 13 ergänzen zu dem

Theorem 4: *Zwei infinitesimale Berührungstransformationen $B_1 f$ und $B_2 f$ der Ebene lassen sich dann und nur dann durch Einführung neuer Veränderlicher vermöge ein und derselben Berührungstransformation auf die Form der infinitesimalen Translationen* Gesamtergebnis.

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

bringen, wenn sie von einander unabhängig sind und ihr Klammerausdruck

$$B_1(B_2 f) - B_2(B_1 f) \equiv 0$$

ist.

Wir bemerken ferner, dass die beiden infinitesimalen Translationen

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

eingliedrige Gruppen erzeugen, deren eine aus allen Translationen S längs der x-Axe, deren andere aus allen Translationen T längs der y-Axe besteht, wenn wir uns x, y als Cartesische Punktcoordinaten vorstellen. Führt man zuerst eine Verschiebung S, dann eine Verschiebung T aus, so erhält man dasselbe Ergebnis wie bei Vertauschung der Reihenfolge. Es ist also

$$ST = TS.$$

Die endlichen Transformationen der beiden eingliedrigen Gruppen sind folglich mit einander *vertauschbar*. (Vgl. § 5 des 2. Kap., S. 59.) Diese Beziehung muss natürlich auch dann bestehen, wenn wir der analytischen Darstellung irgend ein anderes Coordinatensystem zugrunde legen, also auch für die eingliedrigen Gruppen, die von den beiden ursprünglichen infinitesimalen Berührungstransformationen erzeugt werden. Wir haben also den

Satz 14: *Stehen zwei infinitesimale Berührungstransformationen $B_1 f$, $B_2 f$ in der Beziehung, dass* Vertauschbarkt. d. Trf. zweier eingl. Gruppen.

$$B_1(B_2 f) - B_2(B_1 f) \equiv 0$$

ist, so ist jede endliche Transformation der von $B_1 f$ erzeugten eingliedrigen Gruppe mit jeder endlichen Transformation der von $B_2 f$ erzeugten eingliedrigen Gruppe vertauschbar.

In diesem Satze haben wir die Beschränkung, dass $B_1 f$ und $B_2 f$ von einander unabhängig seien, mit gutem Grunde fortgelassen. Denn wenn $B_2 f \equiv \text{Const.}\, B_1 f$ ist, so ist der Klammerausdruck, wie man sofort sieht, identisch Null. Dann ist aber auch der Satz erfüllt. Denn in diesem Falle erzeugen $B_1 f$ und $B_2 f$ dieselbe eingliedrige Gruppe, da sie factisch dieselbe infinitesimale Berührungstransformation darstellen. Aber die endlichen Transformationen einer eingliedrigen Gruppe sind stets mit einander vertauschbar. Dies folgt einerseits begrifflich aus der Erzeugung der eingliedrigen Gruppe (vgl. § 1 des 4. Kap., S. 91), andererseits aber auch analytisch: Durch passende Wahl der Veränderlichen lässt sich ja jede infinitesimale Berührungstransformation Bf auf die Form einer Translation

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

bringen (vgl. Satz 11 des § 4, S. 120), und für die von ihr erzeugte eingliedrige Gruppe von Verschiebungen längs der x-Axe gilt die behauptete Eigenschaft.

Die Entwickelungen dieses Paragraphen spielen eine wichtige Rolle in der Theorie der infinitesimalen Berührungstransformationen. Für die einfachen Anwendungen, die in diesem Werke gemacht werden, genügen die gegebenen Betrachtungen.

Anwendungen. Wir wollen schon jetzt versuchen, durch Ableitung einiger Sätze die grosse Tragweite der hier entwickelten Theorie wenigstens anzudeuten.

Wir können ohne Mühe den Satz beweisen:

Satz 15: *Liegen zwei von einander unabhängige infinitesimale Berührungstransformationen $B_1 f$ und $B_2 f$ in x, y, y' vor, die in der Beziehung stehen:*

$$B_1(B_2 f) - B_2(B_1 f) \equiv 0,$$

so giebt es unendlich viele Functionen von $x, y, y', y'', \ldots$, die sich sowohl gegenüber $B_1 f$ als auch gegenüber $B_2 f$ als Differentialinvarianten verhalten.

In der That, wir können nach Satz 13 vermöge einer Berührungstransformation solche neue Veränderliche $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}'$ einführen, dass

$$B_1 f = \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}}, \quad B_2 f = \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}}$$

wird. Erweitert man diese infinitesimalen Punkttransformationen (vgl. § 2, S. 98), so findet man, dass bei beiden $\delta \mathfrak{y}', \delta \mathfrak{y}'', \ldots$ sämtlich Null sind. Also sind

$$\mathfrak{y}', \mathfrak{y}'', \mathfrak{y}''', \mathfrak{y}^{\mathrm{IV}}, \ldots$$

Differentialinvarianten sowohl von $B_1 f$ als auch von $B_2 f$. Mithin ist auch jede Function von $\mathfrak{y}', \mathfrak{y}'', \mathfrak{y}''', \mathfrak{y}^{IV}, \ldots$ eine gemeinsame Differentialinvariante von $B_1 f$ und $B_2 f$. Man erkennt leicht, dass wir dieses System von gemeinsamen Differentialinvarianten auch durch das folgende ersetzen können:

$$\mathfrak{y}', \mathfrak{y}'', \frac{d\mathfrak{y}''}{d\mathfrak{y}'}, \frac{d^2\mathfrak{y}''}{d\mathfrak{y}'^2}, \ldots .$$

Umgekehrt ist auch klar, dass $B_1 f$ und $B_2 f$ keine anderen gemeinsamen Differentialinvarianten haben. Denn wenn eine Function $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}', \mathfrak{y}'', \ldots)$ bei $B_1 f$ invariant sein soll, so muss sie frei von $\mathfrak{x}$, und wenn sie bei $B_2 f$ invariant sein soll, so muss sie frei von $\mathfrak{y}$ sein.

Indem wir auf die Bemerkungen im vorigen Paragraphen, S. 122, verweisen, fügen wir hier noch an, dass man aus diesen Ergebnissen den Satz ableiten kann, dass jede bei $B_1 f$ und $B_2 f$ invariante gewöhnliche Differentialgleichung n^{ter} Ordnung in $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ die Form hat:

$$\Omega\left(\mathfrak{y}', \mathfrak{y}'', \frac{d\mathfrak{y}''}{d\mathfrak{y}'}, \frac{d^2\mathfrak{y}''}{d\mathfrak{y}'^2}, \ldots \frac{d^{n-2}\mathfrak{y}''}{d\mathfrak{y}'^{n-2}}\right) = 0.$$

Diese Differentialgleichung kann als eine gewöhnliche Differentialgleichung $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung zwischen $\mathfrak{y}'$ und $\mathfrak{y}''$ aufgefasst und integriert werden. Die ∞^n Integralcurven der Differentialgleichung bilden eine bei $B_1 f$ und $B_2 f$ invariante Schar. Aus jeder krummen Integralcurve gehen also durch Ausübung aller Translationen

$$\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x} + \text{Const.}, \quad \mathfrak{y}_1 = \mathfrak{y} + \text{Const.}$$

∞^2 Integralcurven hervor. Die Schar der ∞^n Integralcurven zerfällt somit in ∞^{n-2} Scharen von je ∞^2 congruenten und gleichgestellten Curven.

Nehmen wir andererseits an, dass drei infinitesimale paarweis vertauschbare von einander unabhängige Berührungstransformationen vorliegen: $B_1 f$, $B_2 f$ und Bf. Durch passende Wahl der Veränderlichen lassen sich $B_1 f$ und $B_2 f$ nach Theorem 4 auf die Form bringen: Mit allen inf. Translat. vertauschb. inf. Bertrf.

$$B_1 f \equiv \frac{\partial f}{\partial x}, \quad B_2 f \equiv \frac{\partial f}{\partial y},$$

sodass ihre charakteristischen Functionen lauten:

$$W_1 \equiv p, \quad W_2 \equiv -1.$$

Hat die dritte infinitesimale Berührungstransformation Bf in diesen Veränderlichen die charakteristische Function W, so müssen nach (62) die beiden Relationen bestehen:

$$\begin{aligned} [pW] - pW_y &\equiv 0, \\ [1\,W] - W_y &\equiv 0 \end{aligned}$$

oder:

$$W_x \equiv 0, \quad W_y \equiv 0,$$

d. h. W ist eine Function von p allein:

$$W \equiv \omega(p),$$

sodass Bf die Form hat:

$$Bf \equiv \omega' \frac{\partial f}{\partial x} + (p\omega' - \omega)\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Die Gleichungen der endlichen Transformationen der von Bf erzeugten eingliedrigen Gruppe ergeben sich bekanntlich (vgl. § 1, S. 92) durch Integration des Systems:

$$\frac{dx_1}{\omega'(p_1)} = \frac{dy_1}{p_1\omega'(p_1) - \omega(p_1)} = \frac{dp_1}{0} = dt$$

mit der Bedingung, dass sich x_1, y_1, p_1 für $t = 0$ auf x, y, p reducieren sollen. Die Integration ist sofort ausführbar und liefert:

$$x_1 = x + \omega'(p)\,t, \quad y_1 = y - \omega(p)\,t + p\omega'(p)\,t, \quad p_1 = p.$$

Dies also sind Berührungstransformationen, die nach Satz 14 mit allen Translationen der Ebene vertauschbar sind. Es sind dies genau dieselben, die wir in Satz 11, § 5 des 2. Kap. (S. 60), erhielten, als wir nach *allen* mit den endlichen Translationen vertauschbaren Berührungstransformationen fragten. Aus unseren jetzigen Formeln gehen die damaligen hervor, wenn wir $\omega(p)\,t$ mit $\omega(p)$ bezeichnen.

Umkehrung des Satzes 14. Es sei noch in aller Kürze angedeutet, dass sich der Satz 14 *umkehren* lässt: Sind nämlich $B_1 f$ und $B_2 f$ infinitesimale Berührungstransformationen und sind alle Transformationen der von $B_1 f$ erzeugten eingliedrigen Gruppe mit allen Transformationen der von $B_2 f$ erzeugten eingliedrigen Gruppe vertauschbar, so ist der Klammerausdruck von $B_1 f$ und $B_2 f$ Null. Zum Beweise bemerken wir, dass $B_1 f$ einer beliebigen Function f den Zuwachs $B_1 f\,\delta t$ erteilt. Durch fortwährende Ausführung von $B_1 f$, also durch Ausführung einer endlichen Transformation der von $B_1 f$ erzeugten eingliedrigen Gruppe, wird daher f in eine Function f_1 übergehen, die nach ganzen positiven Potenzen des Parameters t entwickelt mit den Gliedern beginnt:

$$f_1 = f + tB_1 f + \cdots. \tag{70}$$

Entsprechend wird eine endliche Transformation der von $B_2 f$ erzeugten eingliedrigen Gruppe die Function f in eine Function f_2 verwandeln, die sich als Potenzreihe nach einem Parameter τ entwickeln lässt in der Form:

$$f_2 = f + \tau B_2 f + \cdots. \tag{71}$$

Für jeden bestimmten Wert des Parameters t bez. τ stellt also (70) bez. (71) eine endliche Transformation der einen oder anderen eingliedrigen Gruppe dar, ausgeführt auf die beliebig gewählte Function f.

Führen wir nun auf f zuerst die erste Transformation aus, wodurch f in f_1 übergeht, alsdann auf das Ergebnis f_1 die zweite, so kommt die Function:

$$\begin{aligned} f_{12} &= f + t\,B_1 f + \cdots + \tau B_2(f + tB_1 f + \cdots) + \cdots \\ &= f + t\,B_1 f + \tau\,B_2 f + \tau t\,B_2(B_1 f) + \cdots. \end{aligned}$$

Entsprechend kommt bei Umkehrung die Reihenfolge:

$$f_{21} = f + \tau B_2 f + t B_1 f + t\tau B_1(B_2 f) + \cdots.$$

Sollen beide Werte f_{12} und f_{21} für jede Parameterwahl t, τ übereinstimmen, so muss also insbesondere bei beiden der Coefficient von $t\tau$ denselben Wert haben, d. h.

$$B_2(B_1 f) = B_1(B_2 f)$$

sein. Es muss also der Klammerausdruck identisch verschwinden. Also folgt:

Satz 16: *Ist jede Transformation der von der infinitesimalen Berührungstransformation $B_1 f$ erzeugten eingliedrigen Gruppe mit jeder Transformation der von der infinitesimalen Berührungstransformation $B_2 f$ erzeugten eingliedrigen Gruppe vertauschbar, so ist der Klammerausdruck:*

$$B_1(B_2 f) - B_2(B_1 f) \equiv 0.$$

Zusammen mit Satz 14 liefert dieser Satz noch den folgenden:

Satz 17: *Die endlichen Transformationen der von zwei infinitesimalen Berührungstransformationen $B_1 f$ und $B_2 f$ erzeugten eingliedrigen Gruppen sind dann und nur dann vertauschbar, wenn der Klammerausdruck*

$$B_1(B_2 f) - B_2(B_1 f) \equiv 0$$

ist.

Kapitel 5.

Infinitesimale Berührungstransformationen der Schar der geodätischen Kreise.

In diesem Kapitel prüfen wir die Tragweite unserer Theorie der infinitesimalen Berührungstransformationen, indem wir sie der Behandlung eines schwierigen und wichtigen Problems*) zugrunde legen. Wie in der Ebene, so können wir auch auf einer Fläche, deren Punkte durch Gaussische Coordinaten x, y bestimmt werden, den Begriff: Berührungstransformation einführen. Wir stellen uns nun die Aufgabe, zu bestimmen, *welche Form das Quadrat des Bogenelementes auf allen den Flächen haben muss, auf denen die Schar aller ∞^3 geodätischer Kreise unendlich viele Berührungstransformationen gestattet.* Dies Problem reduciert sich unmittelbar auf die Frage nach dem Bogenelement aller der Flächen, für die eine gewisse Differentialgleichung dritter Ordnung in x, y eine oder mehrere *infinitesimale* Berührungstransformationen zulässt. Diese Fragestellung findet ihren analytischen Ausdruck in einem complicierten System von Differentialgleichungen. Es ist merkwürdig, dass es gelingt, nicht allein diese Differentialgleichung vollständig zu integrieren, sondern auch genau festzustellen,

*) Die Entwickelungen dieses Kapitels veröffentlichte Lie 1884 im Archiv for Math. og Naturv., 9. Bd., S. 40.

welche verschiedene Fälle überhaupt eintreten können. Das Ergebnis wenden wir schliesslich insbesondere auf die Ebene an und gelangen dadurch zu einem Satze, der im zweiten Abschnitt auf anderem Wege hervorgehen wird. Der letzte Paragraph behandelt ein hiermit in Zusammenhang stehendes Problem.

Wir bemerken noch, dass wir in diesem Kapitel die Hauptlehren der Flächentheorie als bekannt voraussetzen und verweisen bezüglich derselben auf die Originalwerke*) und Lehrbücher**).

§ 1. Analytische Formulierung des Problems.

Sind die Cartesischen Coordinaten der Punkte einer Fläche als Functionen zweier Gaussischer oder krummliniger Coordinaten x, y dargestellt, so bestimmt jedes Wertsystem $x, y, y' \equiv \frac{dy}{dx}$ ein Linienelement der Fläche, nämlich dasjenige durch den Punkt (x, y) gehende Linienelement, dessen Richtung durch y' bestimmt wird. Wie in der Ebene verstehen wir auch auf der Fläche unter einer *Berührungstransformation* eine solche Transformation von x, y, y', bei der die Gleichung

Berührgstrf. auf einer Fläche.

$$dy - y'\,dx = 0$$

invariant bleibt, oder also bei der eine Bedingung von der Form

$$dy_1 - y_1'\,dx_1 = \varrho(dy - y'\,dx)$$

erfüllt ist, sobald x_1, y_1, y_1' die neuen Veränderlichen bezeichnen. Wie in der Ebene — im zweiten Kapitel — lässt sich der Begriff des Elementvereins auf einer beliebigen Fläche definieren. Unsere Entwickelungen gelten ja für beliebige zweidimensionale Gebiete (vgl. S. 55).

Als die krummlinigen Coordinaten wählen wir nun zwei solche Veränderliche x, y, bei denen die Gleichungen $x =$ Const., $y =$ Const. die Minimalcurven der Fläche darstellen, oder, anders ausgedrückt, bei denen das Quadrat des Bogenelementes ds der Fläche die Form hat

$$(1) \qquad ds^2 = z(x, y)\,dx\,dy.$$

Wir merken hierbei an, dass alle unsere folgenden Entwickelungen auch noch dann gelten, wenn man anstelle von x eine Function von x und anstelle von y eine Function von y einführt, denn dabei behält das Quadrat des Bogenelementes seine Form (1). Hiervon machen wir später (in § 3) Gebrauch.

*) Insbesondere: Gauss, *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, 1827, Ges. Werke Bd. 4, sowie Minding, Crelle's Journal Bd. 6, 1830, S. 159.

**) Wir verweisen beispielsweise auf das Werk: Stahl und Kommerell, *Grundformeln der Flächentheorie*, 1893, insbes. S. 85 u. f.

Unter der *geodätischen Krümmung* einer Curve auf der Fläche versteht man bekanntlich das Verhältnis aus dem Winkel consecutiver geodätischer Tangenten der Curve, dividiert durch das zugehörige Bogenelement. Eine solche Curve auf der Fläche nun, deren geodätische Krümmung constant ist, soll ein *geodätischer Kreis* heissen*). Geod. Krümmung. Geod. Kreis.

Wir wollen nunmehr zunächst die Differentialgleichung dieser ∞^3 geodätischen Kreise aufstellen. Die geodätische Krümmung einer durch eine Relation zwischen x, y gegebenen Curve der Fläche hat den Wert**)

$$\frac{N}{ds^3},$$

wenn

$$\sqrt{eg-f^2}\,N = \begin{vmatrix} e\,dx + f\,dy & m\,dx^2 + 2m'\,dx\,dy + m''\,dy^2 + e\,d^2x + f\,d^2y \\ f\,dx + g\,dy & n\,dx^2 + 2n'\,dx\,dy + n''\,dy^2 + f\,d^2x + g\,d^2y \end{vmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial x}, & n &= -\frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x}, \\ m' &= \frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial y}, & n' &= \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial x}, \\ m'' &= -\frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}, & n'' &= \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial y} \end{aligned}$$

ist und e, f, g die Fundamentalgrössen erster Ordnung der Fläche bezeichnen. Aber wie (1) zeigt, ist hier insbesondere

$$e \equiv g \equiv 0, \quad f \equiv \frac{z(x,y)}{2},$$

sodass kommt

$$iN = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx^2\,dy - \frac{\partial z}{\partial y}\,dx\,dy^2 + z\,d^2x\,dy - z\,d^2y\,dx\right).$$

Setzen wir

$$\frac{dy}{dx} \equiv y', \quad \frac{d^2y}{dx^2} \equiv y'',$$

so kommt also

$$iN = \frac{1}{2}\left(y'\frac{\partial z}{\partial x} - y'^2\frac{\partial z}{\partial y} - y''z\right)dx^3,$$

sodass die geodätische Krümmung den Wert hat

$$\frac{i}{2y'\sqrt{y'z}}\left(y'' - \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}y' + \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y}y'^2\right).$$

---

*) Diese zuerst von Minding betrachteten Curven dürfen nicht verwechselt werden mit den von Gauss betrachteten Curven, deren Punkte constanten geodätischen Abstand von einem festen Punkte haben.

**) Wir benutzen die Bezeichnungen des oben erwähnten Lehrbuches.

Zur Vereinfachung der späteren Formeln führen wir ein

$$Z = \frac{1}{\sqrt{z}},$$

sodass das Quadrat des Bogenelementes ds die Form annimmt:

$$(1') \qquad ds^2 = \frac{dx\,dy}{Z^2}.$$

Es sei ausserdem

$$(2) \qquad \begin{cases} Z_x \equiv P, & Z_y \equiv Q, \\ Z_{xx} \equiv P_x \equiv R, & Z_{yy} \equiv Q_y \equiv T \end{cases}$$

gesetzt, sodass

$$(2') \qquad \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} = -2\frac{P}{Z}, \quad \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y} = -2\frac{Q}{Z}$$

Ausdruck d. geod. Krümmung.

ist. Nunmehr stellt sich die geodätische Krümmung so dar:

$$\frac{i}{2}\left(Zy'^{-\frac{3}{2}}y'' + 2y'^{-\frac{1}{2}}P - 2y'^{\frac{1}{2}}Q\right).$$

Daher ist

$$\frac{i}{2}\left(Zy'^{-\frac{3}{2}}y'' + 2y'^{-\frac{1}{2}}P - 2y'^{\frac{1}{2}}Q\right) = \text{Const.}$$

die Differentialgleichung zweiter Ordnung in x, y für die Curven, die in jedem Punkte dieselbe constante geodätische Krümmung haben. Differenzieren wir nun nach x, so ergiebt sich die *Differentialgleichung dritter Ordnung aller ∞^3 geodätischer Kreise der Fläche:*

Diffgl. 3. O. der geod. Kreise.

$$(3) \qquad F \equiv y''' - \frac{3}{2}y'^{-1}y''^2 + 2\frac{R}{Z}y' - 2\frac{T}{Z}y'^3 = 0.$$

Sie lässt sich auf eine bemerkenswerte Form bringen. Setzen wir nämlich:

$$(4) \qquad \begin{cases} \omega \equiv y'^{-\frac{1}{2}}, \\ \omega' \equiv \dfrac{d\omega}{dx} \equiv -\dfrac{1}{2}y'^{-\frac{3}{2}}y'', \\ \omega'' \equiv \dfrac{d\omega'}{dx} \equiv \dfrac{3}{4}y'^{-\frac{5}{2}}y''^2 - \dfrac{1}{2}y'^{-\frac{3}{2}}y''', \end{cases}$$

sodass

$$(4') \qquad \begin{cases} y' \equiv \dfrac{1}{\omega^2}, \quad y'' \equiv -\dfrac{2\omega'}{\omega^3}, \\ y''' \equiv -2\dfrac{\omega''}{\omega^3} + 6\dfrac{\omega'^2}{\omega^4} \end{cases}$$

wird, so stellt sich (3) so dar:

Andere Form d. Diffgl.

$$(5) \qquad \omega'' - \frac{R}{Z}\omega + \frac{T}{Z}\omega^{-3} = 0.$$

Wenn nun eine gewöhnliche Differentialgleichung in x, y bei ∞^1 Transformationen T_a invariant bleibt, oder, anders ausgedrückt, wenn sie diese ∞^1 Transformationen T_a gestattet, so gestattet sie offenbar auch die zu ihnen inversen Transformationen T_a^{-1}. Bilden jene ∞^1 Transformationen T_a eine continuierliche Schar, so enthält sie eine von T_a unendlich wenig verschiedene Transformation $T_{a+\varepsilon}$. Da $T_a T_a^{-1} = 1$, der identischen Transformation, ist, so wird also die Aufeinanderfolge $T_{a+\varepsilon}\, T_a^{-1}$ einer *infinitesimalen* Transformation äquivalent sein. Da sowohl $T_{a+\varepsilon}$ als auch T_a^{-1} die Differentialgleichung invariant lässt, so gilt dasselbe von der Aufeinanderfolge $T_{a+\varepsilon}\, T_a^{-1}$. Mithin gestattet die Differentialgleichung eine *infinitesimale* Transformation. Andererseits leuchtet ein, dass eine Differentialgleichung, die eine infinitesimale Transformation gestattet, auch ∞^1 endliche Transformationen zulässt, nämlich die Transformationen der zugehörigen eingliedrigen Gruppe. Invarianz einer gew. Diffgl.

Die Frage, wann die obige Differentialgleichung dritter Ordnung in x, y eine continuierliche Schar von Berührungstransformationen gestattet, kommt also zurück auf die Frage, wann sie eine infinitesimale Berührungstransformation gestattet. Wie wir schon früher bemerkten (in § 3 des 3. Kap., S. 85), gestattet durchaus nicht jede gewöhnliche Differentialgleichung dritter Ordnung in x, y eine infinitesimale Berührungstransformation. Es ist daher ein Problem, *zu untersuchen, wie die Form des Bogenelementes oder also wie die Function* $Z(x, y)$ *beschaffen sein muss, damit die Differentialgleichung* (3) *der geodätischen Kreise eine bez. mehrere infinitesimale Berührungstransformationen gestattet.* Gestattet sie solche, so fragen wir insbesondere, wie viele derartige Berührungstransformationen vorhanden sind und welche Form sie haben. Aufstellung des Problems.

Um das Problem analytisch vollständig zu formulieren, wollen wir unter $W(x, y, y')$ die charakteristische Function einer infinitesimalen Berührungstransformation verstehen. Nach Theorem 3 (S. 95) sind dann die Incremente von x, y, y' diese: Incremente d. höheren Diffquot.

(6) $\delta x = W_{y'}\,\delta t,\quad \delta y = (y' W_{y'} - W)\,\delta t,\quad \delta y' = -\,(W_x + y' W_y)\,\delta t.$

Wir bestimmen nun, wie y'' und y''' hierbei transformiert werden. Da y'' durch die Formel Incremente von y'' und y'''.

$$dy' - y''\,dx = 0$$

definiert ist, so berechnen wir das Increment, das y'' erfährt, aus der Bedingung:

$$\delta(dy' - y''\,dx) = 0,$$

die ausführlich geschrieben so lautet:

$$d\delta y' - y''\,d\delta x - \delta y''\,dx = 0.$$

Hierbei machen wir davon Gebrauch, dass das Differentiationszeichen d und das Variationszeichen δ mit einander vertauschbar sind. Hieraus folgt nach (6):

$$\frac{\delta y''}{\delta t} = -\frac{d(W_x + y' W_y)}{dx} - y'' \frac{dW_{y'}}{dx}.$$

Daher hat $\delta y''$ die Form:

$$\delta y'' = \left(-y''^2 \frac{\partial^2 W}{\partial y'^2} - y'' \varphi_1 - \varphi\right) \delta t, \tag{7}$$

in der φ_1 und φ Functionen von x, y, y' allein sind, die wir leicht berechnen könnten.

Die Grösse y''' ferner wird definiert durch die Formel:

$$dy'' - y''' dx \equiv 0,$$

also $\delta y'''$ bestimmt durch die Formel

$$\delta(dy'' - y''' dx) = 0$$

oder:

$$d\delta y'' - y''' d\delta x - \delta y''' dx = 0.$$

Nach (6) und (7) kommt:

$$\delta y''' = \left(-3y'' y''' \frac{\partial^2 W}{\partial y'^2} - y''' f_3 - y''^3 \frac{\partial^3 W}{\partial y'^3} - y''^2 f_2 - y'' f_1 - f\right) \delta t. \tag{8}$$

Hierin bedeuten f_1, f_2, f_3, f Functionen von x, y, y' allein, die wir zwar ausrechnen könnten, deren Werte aber vorläufig keine Rolle spielen werden.

Anal. Formul. d Problems. Soll nun die Differentialgleichung (3) oder $F = 0$ der geodätischen Kreise die betrachtete infinitesimale Berührungstransformation (6) gestatten, so muss die Relation $\delta F = 0$ oder

$$\frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' + \frac{\partial F}{\partial y''} \delta y'' + \frac{\partial F}{\partial y'''} \delta y''' = 0 \tag{9}$$

vermöge $F = 0$ bestehen, sobald man die Werte (6), (7) und (8) einsetzt.

Unser Problem besteht also darin, zu erkennen, unter welchen Bedingungen dies eintritt. Zunächst werden wir dies Problem im nächsten Paragraphen auf eine einfachere Form bringen.

§ 2. **Reduction des Problems.**

Wenn wir in die Gleichung (9) des vorigen Paragraphen die Werte (6), (7), (8) der Incremente von x, y, y', y'', y''', sowie für die Ableitungen von F die aus (3) folgenden Werte einsetzen, so ergiebt sich eine solche Relation

$$\left(-3y''\frac{\partial^2 W}{\partial y'^2}-f_3\right)y'''+\left(3y'^{-1}\frac{\partial^2 W}{\partial y'^2}-\frac{\partial^3 W}{\partial y'^3}\right)y''^3+u=0,$$

in der u eine von y''' freie Function ist, deren Wert wir zwar hinschreiben könnten, der aber zunächst nicht in Betracht kommt. Zu beachten ist nur, dass u eine in y'' quadratische ganze Function ist. Wir haben nun in diese Relation den Wert von y''' einzusetzen, der aus (3) folgt. Wie man sieht, ist dieser Wert auch eine quadratische Function von y''. Also wird schliesslich die linke Seite unserer Relation eine cubische Function von y'', und zwar hat y''^3 darin den Coefficienten:

$$-\frac{3}{2}y'^{-1}\frac{\partial^2 W}{\partial y'^2}-\frac{\partial^3 W}{\partial y'^3}. \tag{10}$$

Da die Relation jetzt identisch bestehen soll, so müssen die Coefficienten von y''^3, y''^2, y'' und das von y'' freie Glied einzeln Null sein. Vorderhand wollen wir nur die Schlüsse ziehen, die durch Nullsetzen des Coefficienten (10) von y''^3 hervorgehen. Es ergiebt sich:

$$\frac{3}{2}y'^{-1}\frac{\partial^2 W}{\partial y'^2}+\frac{\partial^3 W}{\partial y'^3}=0,$$

oder:

$$\frac{\partial \log \frac{\partial^2 W}{\partial y'^2}}{\partial y'}=-\frac{3}{2}y'^{-1}.$$

Also hat $\frac{\partial^2 W}{\partial y'^2}$ die Form:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y'^2}=-\frac{1}{2}\Omega(x,y)\,y'^{-\frac{3}{2}},$$

worin Ω eine noch unbekannte Function von x, y bedeutet. Zweimalige Integration ergiebt, dass W selbst die Form hat:

$$W=2\Omega(x,y)\sqrt{y'}+\xi(x,y)\,y'-\eta(x,y), \tag{11}$$ Vorläufige Form d. char. Fctn.

in der ξ, η zwei noch zu bestimmende Functionen von x, y sind.

Diese Form (11) der charakteristischen Function unserer infinitesimalen Berührungstransformation ist einer interessanten *geometrischen Deutung* fähig. Wir erinnern dabei an das 5. Beispiel des 2. §, 4. Kap. (S. 102) und bemerken ausserdem, dass wir den Fall $\Omega\equiv 0$ ausschliessen können, da sich in ihm die infinitesimale Berührungstransformation nur auf die allgemeine infinitesimale *Punkt*transformation reduciert. (Vgl. § 2 des 4. Kap., S. 98.) Geom. Deutung dieser Form.

Bei unserer infinitesimalen Berührungstransformation wird ein beliebiger *Punkt* (x,y) der Fläche in eine unendlich kleine *Curve* übergehen, deren Punktcoordinaten $x+\delta x$, $y+\delta y$ sich von x, y um die Grössen δx, δy unterscheiden, die nach (6) und (11) die Werte haben:

$$(11') \qquad \begin{cases} \delta x = \left(\Omega y'^{-\frac{1}{2}} + \xi \right) \delta t, \\ \delta y = \left(- \Omega y'^{\frac{1}{2}} + \eta \right) \delta t. \end{cases}$$

Es ist nun leicht zu beweisen, dass alle Punkte dieser unendlich kleinen Curve von einem festen Punkte constante geodätische Entfernung haben, nämlich von dem Punkte, dessen Coordinaten sind:

$$x + \xi \delta t, \quad y + \eta \delta t.$$

Denn es unterscheiden sich die Coordinaten der Punkte der genannten Curve um die Differentiale

$$\delta x - \xi \delta t, \quad \delta y - \eta \delta t$$

von denen dieses Punktes. Wegen der Form (1') (S. 136) des Quadrates des Bogenelementes ist also das Quadrat des Abstandes:

$$(12) \qquad ds^2 = \frac{1}{Z^2} (\delta x - \xi \delta t)(\delta y - \eta \delta t),$$

oder nach (11'):

$$ds^2 = - \frac{1}{Z^2} \Omega^2 \delta t^2,$$

d. h. es hängt nur von x, y, nicht aber von y' ab.

Bei einer eigentlichen infinitesimalen Berührungstransformation also, deren charakteristische Function die Form (11) hat, geht ein beliebiger Punkt (x, y) in eine Curve über, deren Punkte gleichen Abstand von einem gewissen Punkte haben, nämlich von dem Punkte mit den Coordinaten

$$x + \xi(x, y)\, \delta t, \quad y + \eta(x, y)\, \delta t.$$

Verlangt man umgekehrt, dass eine eigentliche infinitesimale Berührungstransformation mit der charakteristischen Function W jeden Punkt in eine *Curve* verwandele, deren Punkte von einem gewissen Punkte $(x + \xi\, \delta t,\ y + \eta\, \delta t)$ gleichen Abstand haben, so ist zu fordern, dass

$$(\delta x - \xi\, \delta t)(\delta y - \eta\, \delta t)$$

unabhängig von y' sei (vgl. Formel (12)). Nun aber ist bekanntlich

$$\delta x = \frac{\partial W}{\partial y'} \delta t, \quad \delta y = \left(y' \frac{\partial W}{\partial y'} - W \right) \delta t.$$

Es ist daher zu fordern, dass

$$\left(\frac{\partial W}{\partial y'} - \xi \right) \left(y' \frac{\partial W}{\partial y'} - W - \eta \right)$$

frei von y' sei. Differentiation nach y', das in ξ und η nicht auftritt, liefert die Bedingung:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y'^2} \left(2y' \frac{\partial W}{\partial y'} - W - \eta - \xi y' \right) = 0.$$

Der erste Factor ist Null, wenn W in y' linear ist, d. h. wenn man es mit einer infinitesimalen Punkttransformation zu thun hat, was aber bei unserer Fragestellung ausgeschlossen ist. Der zweite Factor ist dann und nur dann Null, wenn W die Form (11) hat, wie man leicht einsieht.

Wir kehren nach dieser *geometrischen* Deutung der Formel (11) zu unserem *analytischen* Problem zurück.

Es ist unsere Aufgabe, zu untersuchen, welche besondere Form nun die in (11) auftretenden Functionen Ω, ξ, η von x, y haben müssen, damit die Differentialgleichung (3) der geodätischen Kreise die infinitesimale Berührungstransformation gestatte, deren charakteristische Function W den Wert (11) hat. Die Differentialgleichung (3) haben wir in § 1 auf die bemerkenswerte Form Wieder-aufnahme des Problems.

$$\omega'' - \frac{R}{Z}\omega + \frac{T}{Z}\omega^{-3} = 0 \tag{5}$$

gebracht durch Einführung der Grösse ω vermöge (4). Wir werden von jetzt ab die Differentialgleichung in dieser Form (5) benutzen.

Alsdann aber müssen wir zunächst ausrechnen, welche Incremente x, y, ω und ω'' bei der infinitesimalen Berührungstransformation erfahren. Diese Incremente haben wir dann in die Gleichung einzusetzen, die aus (5) durch Variation folgt:

$$\tag{13} \left\{\begin{aligned} &\delta\omega'' - \left(\frac{R}{Z} + 3\frac{T}{Z}\omega^{-4}\right)\delta\omega + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{R}{Z}\omega + \frac{T}{Z}\omega^{-3}\right)\cdot\delta x + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{R}{Z}\omega + \frac{T}{Z}\omega^{-3}\right)\cdot\delta y = 0, \end{aligned}\right.$$

und zu fordern, dass die hervorgehende Relation infolge von (5) bestehe.

Nach Theorem 3, § 2 des 4. Kap. (S. 95), ist, wenn W die Form (11) hat:

$$\frac{\delta x}{\delta t} = \Omega y'^{-\frac{1}{2}} + \xi,$$

oder nach (4):

$$\frac{\delta x}{\delta t} = \Omega\omega + \xi. \tag{14}$$

Analog kommt:

$$\frac{\delta y}{\delta t} = -\Omega\omega^{-1} + \eta \tag{15}$$

und drittens

$$\frac{\delta y'}{\delta t} = -2\Omega_y\omega^{-3} - 2\Omega_x\omega^{-1} + \eta_x - \omega^{-2}(\xi_x - \eta_y) - \omega^{-4}\xi_y.$$

Nach (4) ist ferner

$$\frac{\delta\omega}{\delta t} = -\frac{1}{2} y'^{-\frac{3}{2}} \delta y',$$

d. h.

$$\frac{\delta\omega}{\delta t} = \Omega_y + \omega^2 \Omega_x + \frac{1}{2}\{-\omega^3 \eta_x + \omega(\xi_x - \eta_y) + \omega^{-1}\xi_y\}. \tag{16}$$

ω' ist definiert durch die Formel

$$d\omega - \omega' dx \equiv 0,$$

sodass

$$d\delta\omega - \omega' d\delta x - \delta\omega' dx = 0,$$

oder

$$\frac{\delta\omega'}{\delta t} = \frac{d\frac{\delta\omega}{\delta t}}{dx} - \omega' \frac{d\frac{\delta x}{\delta t}}{dx}$$

wird. Die Ausrechnung giebt:

$$\begin{aligned}\frac{\delta\omega'}{\delta t} = &-\omega'^2\Omega + \omega'(\omega\Omega_x - \omega^{-1}\Omega_y) + \\ &+ \omega^2\Omega_{xx} + 2\Omega_{xy} + \omega^{-2}\Omega_{yy} - \\ &- \frac{1}{2}\omega'(\xi_x + 3\omega^{-2}\xi_y) + \frac{1}{2}\omega\xi_{xx} + \omega^{-1}\xi_{xy} + \frac{1}{2}\omega^{-3}\xi_{yy} - \\ &- \frac{1}{2}\omega'(3\omega^2\eta_x + \eta_y) - \frac{1}{2}\omega^3\eta_{xx} - \omega\eta_{xy} - \frac{1}{2}\omega^{-1}\eta_{yy}.\end{aligned}$$

Da endlich ω'' durch die Formel

$$d\omega' - \omega'' dx \equiv 0$$

definiert ist, so kommt

$$\frac{\delta\omega''}{\delta t} = \frac{d\frac{\delta\omega'}{\delta t}}{dx} - \omega'' \frac{d\frac{\delta x}{\delta t}}{dx}$$

und die Ausrechnung ergiebt:

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\delta\omega''}{\delta t} = &-3\omega'\omega''\Omega - 2\omega^{-1}\omega''\Omega_y + 3\omega'(\omega\Omega_{xx} - \omega^{-3}\Omega_{yy}) + \\ &+ \omega^2\Omega_{xxx} + 3\Omega_{xxy} + 3\omega^{-2}\Omega_{xyy} + \omega^{-4}\Omega_{yyy} - \\ &- \frac{1}{2}\omega''(3\xi_x + 5\omega^{-2}\xi_y) + 3\omega^{-3}\omega'^2\xi_y - 3\omega'(\omega^{-2}\xi_{xy} + \omega^{-4}\xi_{yy}) + \\ &+ \frac{1}{2}\omega\xi_{xxx} + \frac{3}{2}\omega^{-1}\xi_{xxy} + \frac{3}{2}\omega^{-3}\xi_{xyy} + \frac{1}{2}\omega^{-5}\xi_{yyy} - \\ &- \frac{1}{2}\omega''(3\omega^2\eta_x + \eta_y) - 3\omega\omega'^2\eta_x - 3\omega'(\omega^2\eta_{xx} + \eta_{xy}) - \\ &- \frac{1}{2}\omega^3\eta_{xxx} - \frac{3}{2}\omega\eta_{xxy} - \frac{3}{2}\omega^{-1}\eta_{xyy} - \frac{1}{2}\omega^{-3}\eta_{yyy}.\end{aligned}\right. \tag{17}$$

Setzen wir nun die Werte (14), (15), (16), (17) in (13) ein und und führen wir darauf für ω'' seinen aus (5) folgenden Wert

$$\omega'' = \frac{R}{Z}\omega - \frac{T}{Z}\omega^{-3}$$

ein, so ergiebt sich eine Relation, deren identisches Bestehen gefordert werden muss. Man übersieht, dass diese Relation die Form hat:

(18) $$L\omega'^2 + M\omega' + N = 0,$$

denn ω' tritt nur in $\delta\omega''$ auf und zwar quadratisch.

Die Coefficienten L, M, N in (18) enthalten noch x, y, ω. Sie müssen einzeln Null sein. Dies liefert drei Bedingungsgleichungen, von denen wir zunächst nur die erste $L = 0$ verwerten. Sie lautet einfach:

$$L \equiv 3\omega^{-3}\xi_y - 3\omega\eta_x = 0.$$

Da nun ξ_y und η_x nur von x, y, aber ω von y' abhängt, so muss einzeln

$$\xi_y = \eta_x = 0$$

sein. *Also ist ξ frei von y und η frei von x, sodass die charakteristische Function W die Form hat:* Weitere Reduct. d. Form d. char. Fct.

(19) $$W = 2\Omega(x, y)\sqrt{y'} + \xi(x)\, y' - \eta(y).$$

Wenn insbesondere $\Omega \equiv 0$ ist, so wird $\delta x = \xi(x)\,\delta t$, $\delta y = \eta(y)\,\delta t$, d. h. es werden die Minimalcurven $x =$ Const. sowie $y =$ Const. unter sich vertauscht. Die Transformation ist also dann *conform.*

Nunmehr vereinfachen sich die obigen Werte etwas. Bilden wir dann noch die Gleichungen $M = 0$ und $N = 0$, so erhalten wir:

$$-3\Omega\left(\frac{R}{Z}\omega - \frac{T}{Z}\omega^{-3}\right) + 3(\omega\Omega_{xx} - \omega^{-3}\Omega_{yy}) = 0,$$

sowie:

$$\begin{aligned}
&-\left(2\omega^{-1}\Omega_y + \tfrac{3}{2}\xi_x + \tfrac{1}{2}\eta_y\right)\left(\frac{R}{Z}\omega - \frac{T}{Z}\omega^{-3}\right) + \omega^2\Omega_{xxx} + \\
&\quad + 3\Omega_{xxy} + 3\omega^{-2}\Omega_{xyy} + \omega^{-4}\Omega_{yyy} + \tfrac{1}{2}\omega\xi_{xxx} - \tfrac{1}{2}\omega^{-3}\eta_{yyy} - \\
&\quad - \left(\frac{R}{Z} + 3\frac{T}{Z}\omega^{-4}\right)\left(\Omega_y + \omega^2\Omega_x + \tfrac{1}{2}\omega\xi_x - \tfrac{1}{2}\omega\eta_y\right) + \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{R}{Z}\omega + \frac{T}{Z}\omega^{-3}\right)\cdot(\Omega\omega + \xi) + \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{R}{Z}\omega + \frac{T}{Z}\omega^{-3}\right)\cdot(-\Omega\omega^{-1} + \eta) = 0.
\end{aligned}$$

Dies sind also die beiden einzigen noch zu erfüllenden Bedingungen. Da sie für alle Werte von x, y, y' oder also für alle Werte von x, y, ω identisch bestehen müssen, und da ω nur explicite auftritt, so erhält man durch Nullsetzen der Coefficienten der verschiedenen Potenzen von ω eine Reihe von Bedingungen, nämlich diese:

Bedingungen.

$$(20)\quad \begin{cases} \Omega_{xx} = \Omega \dfrac{R}{Z}, \qquad \Omega_{yy} = \Omega \dfrac{T}{Z}; \\ \Omega_{xxx} - \Omega_x \dfrac{R}{Z} - \Omega \dfrac{\partial}{\partial x} \dfrac{R}{Z} = 0, \\ \Omega_{yyy} - \Omega_y \dfrac{T}{Z} - \Omega \dfrac{\partial}{\partial y} \dfrac{T}{Z} = 0; \\ \Omega_{xxy} - \Omega_y \dfrac{R}{Z} + \frac{1}{3} \Omega \dfrac{\partial}{\partial y} \dfrac{R}{Z} = 0, \\ \Omega_{xyy} - \Omega_x \dfrac{T}{Z} + \frac{1}{3} \Omega \dfrac{\partial}{\partial x} \dfrac{T}{Z} = 0; \\ \frac{1}{2} \xi_{xxx} - 2\xi_x \dfrac{R}{Z} - \xi \dfrac{\partial}{\partial x} \dfrac{R}{Z} - \eta \dfrac{\partial}{\partial y} \dfrac{R}{Z} = 0, \\ \frac{1}{2} \eta_{yyy} - 2\eta_y \dfrac{T}{Z} - \xi \dfrac{\partial}{\partial x} \dfrac{T}{Z} - \eta \dfrac{\partial}{\partial y} \dfrac{T}{Z} = 0. \end{cases}$$

Man beachte, dass die dritte und vierte Gleichung (20) directe Folgen der beiden ersten sind, während die fünfte und sechste infolge der beiden ersten eine einfache Form annehmen. Danach ist dies achtgliedrige Gleichungensystem (20) zu ersetzen durch das folgende sechsgliedrige:

$$(21)\quad \begin{cases} \Omega_{xx} = \Omega \dfrac{R}{Z}, \qquad \Omega_{yy} = \Omega \dfrac{T}{Z}, \\ \Omega \dfrac{\partial}{\partial y} \dfrac{R}{Z} = 0, \qquad \Omega \dfrac{\partial}{\partial x} \dfrac{T}{Z} = 0, \\ \frac{1}{2} \xi_{xxx} - 2\xi_x \dfrac{R}{Z} - \xi \dfrac{\partial}{\partial x} \dfrac{R}{Z} - \eta \dfrac{\partial}{\partial y} \dfrac{R}{Z} = 0, \\ \frac{1}{2} \eta_{yyy} - 2\eta_y \dfrac{T}{Z} - \xi \dfrac{\partial}{\partial x} \dfrac{T}{Z} - \eta \dfrac{\partial}{\partial y} \dfrac{T}{Z} = 0. \end{cases}$$

Gegenwärtiger Stand der Frage.

Hiermit ist ein solches System von Differentialgleichungen in den unabhängigen Veränderlichen x, y gefunden, durch das die Functionen

$$Z(x, y),\ \xi(x),\ \eta(y),\ \Omega(x, y)$$

vollständig bestimmt werden. Es ist nun unsere nächste Aufgabe, die allgemeinsten Formen dieser Functionen hieraus abzuleiten. Dadurch finden wir einerseits die Form des Quadrates des Bogenelementes

$$ds^2 = \frac{dx\,dy}{Z^2},$$

die zu den Flächen gehört, auf denen die Schar der geodätischen Kreise eine infinitesimale Berührungstransformation gestattet; andererseits aber werden wir erkennen, welches die charakteristischen Functionen (19) dieser infinitesimalen Berührungstransformationen sind.

Die Form der vier ersten Gleichungen (21) zeigt, dass die beiden Fälle $\Omega \not\equiv 0$ und $\Omega \equiv 0$ gesondert behandelt werden müssen. Im nächsten Paragraphen soll der Fall $\Omega \not\equiv 0$ erledigt werden, im übernächsten der Fall $\Omega \equiv 0$. Teilung in zwei Fälle: $\Omega \not\equiv 0$, $\Omega = 0$.

§ 3. Erledigung des ersten Falles.

Wir behandeln zunächst den Fall, dass die Function $\Omega \not\equiv 0$.

$$\Omega \not\equiv 0$$

ist. Die dritte und die vierte Gleichung (21) ergeben alsdann, dass $\frac{R}{Z}$ und $\frac{T}{Z}$ nur von x bez. y abhängen. Wir setzen daher:

$$\frac{R}{Z} = X(x), \quad \frac{T}{Z} = Y(y), \tag{22}$$

sodass die übrigen Gleichungen (21) die Form annehmen: Die Bedingungsgleichungen

$$\left\{\begin{aligned} &\Omega_{xx} = \Omega X, \quad \Omega_{yy} = \Omega Y, \\ &\frac{1}{2}\,\xi_{xxx} - 2\xi_x X - \xi X' = 0, \\ &\frac{1}{2}\,\eta_{yyy} - 2\eta_y Y - \eta Y' = 0. \end{aligned}\right. \tag{23}$$

Um diese Gleichungen zu integrieren, machen wir von dem bisher noch nicht benutzten Umstande Gebrauch, dass wir anstelle von x eine beliebige Function $\mathfrak{x}(x)$ von x als neues $\mathfrak{x}$ und anstelle von y eine beliebige Function $\mathfrak{y}(y)$ von y als neues $\mathfrak{y}$ einführen dürfen, wie wir schon zu Anfang des § 1 (S. 134) bemerkten. Neue Veränderliche.

Wenn wir den ersten, zweiten u. s. w. Differentialquotienten von x nach $\mathfrak{x}$ mit $x_1, x_2, \ldots$, entsprechend die von y nach $\mathfrak{y}$ mit $y_1, y_2, \ldots$ bezeichnen, so nimmt das unter (1′) in § 1 (S. 136) angegebene Quadrat des Bogenelementes der Fläche die Form an:

$$ds^2 = \frac{d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{y}}{Z^2}\cdot x_1\,y_1,$$

es hat also wieder die Form:

$$ds^2 = \frac{d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{y}}{\mathfrak{Z}^2},$$

nur dass jetzt

$$\mathfrak{Z} = Z x_1^{-\frac{1}{2}} y_1^{-\frac{1}{2}}$$

wird. Hieraus aber folgt durch partielle Differentiation nach $\mathfrak{x}$:

$$\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial \mathfrak{x}} = Z_x\, x_1^{\frac{1}{2}} y_1^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} Z x_1^{-\frac{3}{2}} x_2\, y_1^{-\frac{1}{2}},$$

also weiter:

$$\frac{1}{\mathfrak{Z}}\frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial \mathfrak{x}^2} = \frac{Z_{xx}}{Z}\, x_1^{\,2} + \frac{3}{4} x_1^{-2} x_2^{\,2} - \frac{1}{2} x_1^{-1} x_3.$$

Nun ist nach den Formeln (2) des § 1 (S. 136) und nach obigen Formeln (22):

$$\frac{Z_{xx}}{Z} = X(x),$$

sodass kommt:

$$(24) \qquad \frac{1}{\mathfrak{Z}} \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial \mathfrak{x}^2} = X(x)\, x_1{}^2 + \frac{3}{4} x_1{}^{-2} x_2{}^2 - \frac{1}{2} x_1{}^{-1} x_3.$$

Es giebt aber sicher eine Function x von $\mathfrak{x}$, welche die Differentialgleichung erfüllt:

$$X(x)\left(\frac{dx}{d\mathfrak{x}}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{dx}{d\mathfrak{x}}\right)^{-2}\left(\frac{d^2x}{d\mathfrak{x}^2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{d\mathfrak{x}}\right)^{-1}\frac{d^3x}{d\mathfrak{x}^3} = 0.$$

Es hindert uns nichts, vorauszusetzen, dass wir unter x gerade eine solche Function von $\mathfrak{x}$ verstehen. Dann erreichen wir also nach (24), dass

$$\frac{1}{\mathfrak{Z}} \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial \mathfrak{x}^2} = 0$$

wird. Ganz analog dürfen wir voraussetzen, y sei so als Function der neuen Veränderlichen $\mathfrak{y}$ gewählt, dass

$$\frac{1}{\mathfrak{Z}} \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial \mathfrak{y}^2} = 0$$

wird. In den Veränderlichen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ erhält $\mathfrak{Z}$ somit die Form

$$\mathfrak{Z} = k\mathfrak{x}\mathfrak{y} + l\mathfrak{x} + m\mathfrak{y} + n,$$

in der k, l, m, n Constanten sind.

Wir dürfen daher annehmen, dass wir schon von vornherein die Veränderlichen x, y so gewählt haben, dass Z die Form hat:

$$Z = kxy + lx + my + n,$$

sodass

$$R = 0, \quad T = 0$$

wird. Nach (22) ist dann

$$X = Y = 0,$$

sodass sich die Formeln (23) reducieren auf:

$$\Omega_{xx} = \Omega_{yy} = 0,$$
$$\xi_{xxx} = \eta_{yyy} = 0.$$

Überdies wissen wir, dass ξ nur von x, η nur von y abhängt (vgl. Formel (19) des § 2, S. 143). Es ergiebt sich daher, dass $Z, 2\Omega, \xi, \eta$ folgende Formen haben:

$$(25) \qquad \left\{\begin{aligned} Z &= kxy + lx + my + n, \\ 2\Omega &= Axy + Bx + Cy + D, \\ \xi = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha, &\quad \eta = \beta_2 y^2 + \beta_1 y + \beta. \end{aligned}\right.$$

Hierin sind k, l, m, n; A, B, C, D; $\alpha_2, \alpha_1, \alpha$; β_2, β_1, β willkürliche

Constanten, die keinerlei Beschränkung unterworfen sind. Da das Quadrat des Bogenelementes den Wert hat:

$$ds^2 = \frac{dx\,dy}{Z^2},$$

da ferner nach Formel (19) des § 2 (S. 143) die charakteristische Function W nunmehr den Wert annimmt:

$$(26)\quad W = (Axy + Bx + Cy + D)\sqrt{y'} + (\alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha)\,y' - (\beta_2 y^2 + \beta_1 y + \beta),$$

so ist also unser Ergebnis dieses:

Gelingt es, das Quadrat des Bogenelementes einer Fläche auf die Form zu bringen: Jetzige Form der Ergebnisse.

$$(27)\qquad ds^2 = \frac{dx\,dy}{(kxy + lx + my + n)^2},$$

so gestattet die Schar der ∞^3 geodätischen Kreise unendlich viele infinitesimale Berührungstransformationen. Die charakteristischen Functionen derselben haben die Form (26), in der die Grössen A, B, C, D; $\alpha_2, \alpha_1, \alpha$; β_2, β_1, β beliebige Constanten bedeuten. Wie man sieht, ist die allgemeinste dieser infinitesimalen Berührungstransformationen *linear ableitbar* aus denjenigen zehn, welche die charakteristischen Functionen besitzen (vgl. § 5 des 4. Kap., S. 123):

$$1,\quad y,\quad y^2,\quad y',\quad xy',\quad x^2y',$$
$$\sqrt{y'},\quad y\sqrt{y'},\quad x\sqrt{y'},\quad xy\sqrt{y'},$$

und umgekehrt ist jede von diesen abhängige von der Form (26).

Wie die Gleichung (3) des § 1 (S. 136) zeigt, nimmt die Differentialgleichung der geodätischen Kreise nunmehr die Form an:

$$(28)\qquad y''' - \frac{3}{2}\,y'^{-1}y''^2 = 0,$$

da jetzt $\frac{R}{Z}$ und $\frac{T}{Z}$ gleich Null sind.

Die Flächen, deren Bogenelement-Quadrat sich auf die Form (27) bringen lässt, haben nun eine einfache geometrische Definition: Allgemein lässt sich das Quadrat des Bogenelementes auf die Form bringen:

$$ds^2 = \frac{dx\,dy}{Z^2(x, y)}.$$

Dann aber hat das *Krümmungsmass* der Fläche den Wert:

$$K = 4(ZZ_{xy} - Z_x Z_y).$$

Im vorliegenden Falle nun ist:

$$Z = kxy + lx + my + n,$$

Flächen constanter Krümmung.

also das Krümmungsmass gleich $4(kn - lm)$, mithin *constant*.

Umgekehrt, da die Flächen constanter Krümmung auf einander abwickelbar sind, so kann man ihr ds^2 stets auf die Form (27) bringen.

Um die Ergebnisse zu formulieren, bemerken wir noch, dass der Fall $\Omega \mathrel{=\!\!|\!\!=} 0$, den wir in diesem Paragraphen erledigt haben, gerade der ist, in dem die charakteristische Function W nicht linear in y' ist, wie die Formel (19) des § 2 (S. 143) zeigt. Wir haben daher nach § 2 des 4. Kap. (2. Beispiel, S. 98) gerade den Fall erledigt, dass die gesuchten Berührungstransformationen nicht sämtlich nur erweiterte Punkttransformationen sind.

Daher fassen wir unsere Ergebnisse in einer Reihe von Sätzen so zusammen:

Ergebnisse.

Satz 1: *Gestattet die Differentialgleichung der geodätischen Kreise einer Fläche eine infinitesimale Berührungstransformation, die keine erweiterte Punkttransformation ist, so hat die Fläche constante Krümmung.*

Ferner (vgl. S. 143):

Satz 2: *Gestattet die Differentialgleichung der geodätischen Kreise einer Fläche, die nicht constante Krümmung hat, eine infinitesimale Berührungstransformation, so ist diese Transformation eine infinitesimale Punkttransformation und zwar eine conforme.*

Wir können auch sagen:

Satz 3: *Gestattet die Differentialgleichung der geodätischen Kreise einer Fläche eine continuierliche Schar von Berührungstransformationen, die keine erweiterten Punkttransformationen sind, so hat die Fläche constante Krümmung.*

Ausserdem haben wir erkannt:

Satz 4: *Die Differentialgleichung der geodätischen Kreise einer Fläche constanter Krümmung lässt sich durch passende Wahl der Flächen coordinaten x, y stets auf die Form bringen:*

$$y''' - \frac{3}{2} y'^{-1} y''^2 = 0.$$

Dabei erhält das Quadrat des Bogenelementes die Form:

$$ds^2 = \frac{dx\,dy}{Z^2},$$

in der Z bilinear in x, y ist:

$$Z \equiv kxy + lx + my + n.$$

Die Differentialgleichung der geodätischen Kreise einer Fläche constanter Krümmung gestattet stets zehn von einander unabhängige infinitesimale Berührungstransformationen. Ihre charakteristischen Functionen haben bei Zugrundelegung obiger Punktcoordinaten x, y auf der Fläche die Form:

$$1, \quad y, \quad y^2, \quad y', \quad xy', \quad x^2y',$$
$$\sqrt{y'}, \quad y\sqrt{y'}, \quad x\sqrt{y'}, \quad xy\sqrt{y'}.$$

Die charakteristische Function der allgemeinsten infinitesimalen Berührungstransformation, welche die Differentialgleichung gestattet, erhält man aus diesen zehn durch Multiplication mit beliebigen Constanten und Addition.

Die Differentialgleichung der geodätischen Kreise in ihrer jetzigen Form

$$y''' - \frac{3}{2} y'^{-1} y''^2 = 0 \tag{28}$$

lässt sich auch so schreiben:

$$\frac{d^2 \frac{1}{\sqrt{y'}}}{dx^2} = 0 \tag{28'}$$

und giebt integriert:

$$y = (ax + b)^{-1} + c.$$

Durch Einführung der neuen Veränderlichen Neue Veränderliche.

$$\mathfrak{x} = x + y, \quad \mathfrak{y} = i(x - y) \tag{29}$$

geht die Integralgleichung in diese über:

$$(\mathfrak{x} - u)^2 + (\mathfrak{y} - v)^2 = r^2, \tag{30}$$

wenn u, v, r jetzt die Integrationsconstanten bezeichnen. Die Erweiterung der Punkttransformation (29) lautet nun:

$$\mathfrak{x} = x + y, \quad \mathfrak{y} = i(x - y), \quad \mathfrak{y}' = i\frac{1 - y'}{1 + y'}, \tag{31}$$

und hier ist

$$d\mathfrak{y} - \mathfrak{y}'\, d\mathfrak{x} = -\frac{2i}{1 + y'}(dy - y'\, dx),$$

also die Function ϱ in der Relation

$$d\mathfrak{y} - \mathfrak{y}'\, d\mathfrak{x} = \varrho(dy - y'\, dx)$$

diese:

$$\varrho = -\frac{2i}{1 + y'}.$$

Die charakteristische Function der allgemeinsten infinitesimalen Berührungstransformation, welche die Schar (30) in sich überführt, geht nach Satz 9, § 3 des 4. Kap. (S. 116) aus ϱW durch Einführung der neuen Veränderlichen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}'$ vermöge (31) hervor. Da W den Wert (26) hat, so findet man als charakteristische Function in den neuen Veränderlichen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}'$ durch Ausrechnung diese:

$$(32)\quad \begin{cases} \{A(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2)+B\mathfrak{x}+C\mathfrak{y}+D\}\sqrt{1+\mathfrak{y}'^2}+ \\ \quad +a+b\mathfrak{y}'+c(\mathfrak{y}-\mathfrak{x}\mathfrak{y}')+e(\mathfrak{x}+\mathfrak{y}\mathfrak{y}')+ \\ \quad +\alpha\{2\mathfrak{x}\mathfrak{y}+(\mathfrak{y}^2-\mathfrak{x}^2)\mathfrak{y}'\}+\beta\{\mathfrak{y}^2-\mathfrak{x}^2-2\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{y}'\}, \end{cases}$$

in der die zehn Constanten $A, B, C, D, a, b, c, e, \alpha, \beta$ völlig willkürlich sind. Doch sei hervorgehoben, dass sie nicht mehr die früheren in (26) auftretenden Constanten sind, sondern gewisse Functionen von ihnen.

Die Gleichung (30) ist identisch mit der Gleichung aller Kreise der Ebene in Cartesischen Punktcoordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$. Also folgt:

Überführg. d. geod. Kreise i. Kreise d. Ebene.

Satz 5: *Jede Fläche constanter Krümmung, sonst aber keine Fläche lässt sich durch Berührungstransformation so auf die Ebene abbilden, dass sich die geodätischen Kreise der Fläche als die Kreise der Ebene abbilden* *).

Für die Ebene, als Specialfall der Flächen constanter Krümmung, wollen wir die letzten Ergebnisse in einem besonderen Satze formulieren, indem wir die neuen Veränderlichen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ als Cartesische Coordinaten der Ebene mit x, y bezeichnen. Die Formel (32) lehrt nämlich:

Berührtrf. d. Kreise d. Ebene.

groups permits only

Satz 6: *Die Schar aller Kreise der Ebene gestattet gerade zehn von einander unabhängige infinitesimale Berührungstransformationen. Die charakteristische Function der allgemeinsten ist linear mit beliebigen constanten Coefficienten aus den folgenden zehn abzuleiten:*

$$1,\quad y',\quad y-xy',\quad x+yy',\quad 2xy+(y^2-x^2)y',\quad y^2-x^2-2xyy',$$
$$\sqrt{1+y'^2},\quad x\sqrt{1+y'^2},\quad y\sqrt{1+y'^2},\quad (x^2+y^2)\sqrt{1+y'^2}.$$

Dabei bedeuten x, y Cartesische Punktcoordinaten der Ebene.

Dies Ergebnis wird uns im zweiten Abschnitt an mehreren Stellen wieder beschäftigen.

§ 4. **Erledigung des zweiten Falles.**

Es bleibt jetzt noch übrig, unser Problem in Anknüpfung an die Ergebnisse des zweiten Paragraphen für den Fall zu erledigen, dass die in W auftretende Function

$\Omega = 0.$

$$\Omega \equiv 0$$

ist. Alsdann sind die infinitesimalen Berührungstransformationen, die

*) Dieser Satz ist ein Analogon zu dem schönen Satz von Beltrami über die geodätischen Linien der Flächen constanter Krümmung. (Annali di matematica, 1. Serie, Bd. 7, 1866, S. 185.)

eventuell die Schar der geodätischen Kreise invariant lassen, nur *erweiterte Punkttransformationen.* Da die charakteristische Function W jetzt nach Formel (19) des § 2, S. 143, die Form

$$W = \xi(x)\,y' - \eta(y) \tag{33}$$

hat, so sind die fraglichen Punkttransformationen überdies *conform*, weil sie die Minimalcurven $x = \text{Const.}$ und ebenso die Minimalcurven $y = \text{Const.}$ in einander überführen, wie schon S. 143 gesagt wurde. Für die Function W sowie für die im Quadrat des Bogenelementes

$$ds^2 = \frac{dx\,dy}{Z(x,\,y)^2} \tag{34}$$

auftretende Function Z bestehen jetzt nach den Formeln (21) des § 2, S. 144, die Bedingungen:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\xi''' - 2\xi'\frac{R}{Z} - \xi\frac{\partial}{\partial x}\frac{R}{Z} - \eta\frac{\partial}{\partial y}\frac{R}{Z} = 0, \\ \frac{1}{2}\eta''' - 2\eta'\frac{T}{Z} - \xi\frac{\partial}{\partial x}\frac{T}{Z} - \eta\frac{\partial}{\partial y}\frac{T}{Z} = 0. \end{cases} \tag{35}$$

Wir schreiben hier ξ''' statt ξ_{xxx} u. s. w., da jetzt ξ nur von x, η nur von y abhängt.

Zunächst sei die Annahme gemacht, dass weder ξ noch η identisch Null sei. Annahme $\xi\eta \neq 0$.

Dann können wir anstatt x und y solche Functionen von x bez. y allein als neue Veränderliche x, y einführen, dass anstelle der Formeln

$$\delta x = \xi(x)\,\delta t, \quad \delta y = \eta(y)\,\delta t$$

die einfacheren treten:

$$\delta x = \delta t, \quad \delta y = \delta t.$$

Dadurch werden, wie schon gelegentlich betont wurde, die bisherigen Formeln in ihrer Richtigkeit nicht beeinträchtigt. Nach (33) reduciert sich nun W auf

$$W = y' - 1, \tag{36}$$

während die Formeln (35) wegen

$$\xi \equiv 1, \quad \eta \equiv 1$$

jetzt liefern:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{R}{Z} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{R}{Z} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{T}{Z} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{T}{Z} = 0.$$

$\frac{R}{Z}$ und $\frac{T}{Z}$ hängen mithin nur von $x-y$ ab. Aber nach Formel (2) des § 1 (S. 136) ist $R = Z_{xx}$ und $T = Z_{yy}$. Mithin kommt:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \varphi(x-y)\,Z, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = \psi(x-y)\,Z. \tag{37}$$

Es handelt sich nun darum, die allgemeinste Lösung Z dieser beiden Differentialgleichungen zu bestimmen.

Setzen wir

$$Z = e^{\Phi}, \tag{38}$$

so giebt (37):

$$\begin{cases} \Phi_{xx} + \Phi_x^2 = \varphi(x-y), \\ \Phi_{yy} + \Phi_y^2 = \psi(x-y). \end{cases} \tag{39}$$

Differentiation nach x bez. y liefert die vier Gleichungen:

$$\begin{cases} \Phi_{xxx} + 2\Phi_x\Phi_{xx} = \quad \varphi', \\ \Phi_{xxy} + 2\Phi_x\Phi_{xy} = -\varphi', \\ \Phi_{xyy} + 2\Phi_y\Phi_{xy} = \quad \psi', \\ \Phi_{yyy} + 2\Phi_y\Phi_{yy} = -\psi'. \end{cases} \tag{40}$$

Addition der beiden ersten giebt:

$$\frac{\partial(\Phi_{xx} + \Phi_{xy})}{\partial x} + 2\Phi_x(\Phi_{xx} + \Phi_{xy}) = 0,$$

woraus folgt:

$$\Phi_{xx} + \Phi_{xy} = Y(y)\,e^{-2\Phi}. \tag{41}$$

Ebenso kommt:

$$\Phi_{yy} + \Phi_{xy} = X(x)\,e^{-2\Phi}. \tag{42}$$

In diesen Gleichungen bedeutet X eine Function von x allein und Y eine Function von y allein. Differenzieren wir die zweite Gleichung (40) nach y, die dritte nach x, so kommt:

$$\Phi_{xxyy} + 2\Phi_x\Phi_{xyy} + 2\Phi_{xy}^2 = \varphi'',$$
$$\Phi_{xxyy} + 2\Phi_y\Phi_{xxy} + 2\Phi_{xy}^2 = \psi''.$$

Hieraus folgt durch Subtraction:

$$2\Phi_x\Phi_{xyy} - 2\Phi_y\Phi_{xxy} = \varphi'' - \psi''$$

oder

$$2\Phi_x(\Phi_{xyy} + 2\Phi_y\Phi_{xy}) - 2\Phi_y(\Phi_{xxy} + 2\Phi_x\Phi_{xy}) = \varphi'' - \psi'',$$

woraus sich durch Benutzung der zweiten und dritten Gleichung (40) ergiebt:

$$2\Phi_x\psi' + 2\Phi_y\varphi' = \varphi'' - \psi''.$$

Differenzieren wir diese Gleichung nach x und nach y, so erhalten wir zwei Gleichungen, die addiert liefern:

$$(\Phi_{xx} + \Phi_{xy})\,\psi' + (\Phi_{xy} + \Phi_{yy})\,\varphi' = 0,$$

woraus nach (41) und (42) zu schliessen ist:

(43) $$X\varphi' + Y\psi' = 0.$$

Differentiation nach x bez. y giebt hieraus:

$$X'\varphi' + X\varphi'' + Y\psi'' = 0,$$
$$Y'\psi' - X\varphi'' - Y\psi'' = 0,$$

also:

(44) $$X'\varphi' + Y'\psi' = 0.$$

Die beiden Gleichungen (43), (44) sind linear und homogen in φ' und ψ' mit der Determinante Absonderung erledigter Fälle.

$$\varDelta \equiv XY' - X'Y.$$

Die Annahme $\varDelta \not\equiv 0$ führt nun auf Flächen constanter Krümmung. Denn das Krümmungsmass der Fläche, für die

$$ds^2 = \frac{dx\,dy}{Z^2}$$

ist, hat den Wert

(45) $$K = 4(ZZ_{xy} - Z_x Z_y).$$

Wäre nun $\varDelta \not\equiv 0$, so würde (43) und (44) ergeben, dass φ' und ψ' Constanten wären, sodass (37) lieferte:

(46) $$Z_{xx} = aZ, \quad Z_{yy} = bZ.$$

Aber nach (45) ist

$$\frac{\partial K}{\partial x} = 4(ZZ_{xxy} - Z_{xx}Z_y),$$

und dies ist nach (46) identisch Null, da (46) noch $Z_{xxy} = aZ_y$ giebt. Entsprechend wäre $\frac{\partial K}{\partial y} \equiv 0$, d. h. K wäre constant. Da wir nun die Flächen constanter Krümmung im vorigen Paragraphen schon vollständig behandelt haben, so können wir hier von ihnen absehen und somit annehmen:

$$\varDelta \equiv XY' - X'Y \equiv 0.$$

Wäre jetzt eine der beiden Grössen X, Y, etwa $Y \equiv 0$, aber die andere $X \not\equiv 0$, so käme man sogar zu abwickelbaren Flächen, denn dann würde aus (41) sofort folgen, dass $\Phi_x + \Phi_y$ eine Function von y allein wäre, also nach (42) auch $Xe^{-2\Phi}$ von y allein abhinge, sodass das Quadrat des Bogenelements nach (38) die Form

$$ds^2 = \alpha(x)\,\beta(y)\,dx\,dy$$

hätte. Die Fläche wäre daher auf die Ebene abwickelbar.

Mithin bleibt nur die Untersuchung der beiden Fälle übrig:

Zwei Fälle.

$$\textit{Erstens:}\quad \varDelta \equiv 0,\quad X \not\equiv 0,\quad Y \not\equiv 0,$$
$$\textit{Zweitens:}\quad \varDelta \equiv 0,\quad X \equiv 0,\quad Y \equiv 0.$$

Die erste Annahme kann noch anders charakterisiert werden: Die infinitesimalen Punkttransformationen, welche die Differentialgleichung der geodätischen Kreise invariant lassen, sind, wie wir wissen, conform. Sie erteilen daher ds^2 ein Increment, dass sich von ds^2 nur um einen von x, y abhängigen Factor unterscheidet. Soll nun die infinitesimale Transformation, die wir oben (S. 151) auf die Form

$$\delta x = \delta t, \quad \delta y = \delta t$$

gebracht haben, ds^2 *nicht nur um einen constanten Factor ändern*, so darf das Increment

$$\delta ds^2 = \delta \frac{dx\,dy}{Z^2} = \frac{d\delta x\cdot dy + d\delta y\cdot dx}{Z^2} - \frac{2\,dx\,dy}{Z^3}(Z_x\delta x + Z_y\delta y)$$
$$= -2ds^2\left(\frac{Z_x}{Z} + \frac{Z_y}{Z}\right)\delta t$$

nicht die Form Const. ds^2 haben, d. h. es muss

$$\frac{Z_x}{Z} + \frac{Z_y}{Z} \not\equiv \text{Const.}$$

sein, also nach (38):

$$\Phi_x + \Phi_y \not\equiv \text{Const.}$$

und nach (41), (42), wenn von abwickelbaren Flächen abgesehen wird:

$$X \not\equiv 0, \quad Y \not\equiv 0.$$

Der *erste* Fall führt also zu *allen* Flächen, auf denen die Differentialgleichung der geodätischen Kreise auch solche infinitesimale Punkttransformationen gestattet, *die ds^2 nicht nach constantem Verhältnis ändern.*

Wir behandeln die beiden Fälle nach einander.

Erster Fall.

Erstens: $\varDelta \equiv 0$, $X \not\equiv 0$, $Y \not\equiv 0$. Aus $\varDelta \equiv 0$ folgt

$$\frac{X'}{X} = \frac{Y'}{Y} = m,$$

also

$$X = ae^{mx}, \quad Y = be^{my} \quad (a, b, m = \text{Const.}).$$

Nach Voraussetzung muss $ab \neq 0$ sein. Die Formeln (41) und (42) geben:

$$\Phi_{xx} + \Phi_{xy} = be^{my-2\Phi}, \quad \Phi_{yy} + \Phi_{xy} = ae^{mx-2\Phi}.$$

Differenzieren wir die erste Gleichung nach y, die zweite nach x und ziehen sie dann von einander ab, so kommt:

$$2ae^{mx}\Phi_x - 2be^{my}\Phi_y - m(ae^{mx} - be^{my}) = 0. \tag{47}$$

Es ist dies eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung für Φ. Sie zeigt, dass Φ die Form hat:

$$\Phi = \frac{m}{2}(x + y) + U(u), \tag{48}$$

in der U eine noch näher zu bestimmende Function von

$$u \equiv be^{-mx} + ae^{-my}$$

bedeutet. Allerdings ergiebt sich bei der Integration von (47), dass der Fall $m = 0$ besonders zu behandeln ist. Aber die Annahme $m = 0$ widerspricht unseren Voraussetzungen. Denn in diesem Falle zeigt (47) sofort, dass Φ eine Function von $bx + ay$ allein ist, während (39) darauf lehrt, dass a und b entgegengesetzt gleich sein müssen. Φ wird also eine Function von $x - y$ allein, und nach (41) und (42) sind für eine solche Function X und Y Null, was eben unserer Voraussetzung widerspricht. Wir müssen daher

$$m \neq 0$$

annehmen.

Wenn wir nun den obigen Wert (48) von Φ in die noch zu erfüllenden Bedingungen (39) einsetzen, so kommt:

$$b^2 m^2 e^{-2mx}(U'' + U'^2) = \varphi - \frac{m^2}{4},$$

$$a^2 m^2 e^{-2my}(U'' + U'^2) = \psi - \frac{m^2}{4}.$$

Nach dem bisher Erörterten haben wir hierbei die Voraussetzung zu machen:

$$abm \neq 0.$$

φ und ψ ferner sind Functionen von $x - y$ allein. Beide Gleichungen sagen also dasselbe aus, nämlich dass

$$e^{-2mx}(U'' + U'^2)$$

eine Function von $x - y$ allein sein oder also dass

$$U'' + U'^2 = \frac{C}{u^2}$$

sein muss. C ist eine Constante. Setzen wir

$$U = \lg V$$

und

$$C = n^2 - \frac{1}{4},$$

so kommt:

$$\frac{V''}{V} = \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{u^2}$$

oder also:

$$V = Au^{\frac{1}{2}+n} + Bu^{\frac{1}{2}-n}.$$

A und B sind hierin Constanten. Berechnen wir hieraus rückwärts U und Φ, so ergiebt sich für Z nach (38) der Wert:

$$Z = \left(Au^{\frac{1}{2}+n} + Bu^{\frac{1}{2}-n}\right) e^{\frac{m}{2}(x+y)},$$

wobei

$$u = be^{-mx} + ae^{-my}$$

ist. Das Ergebnis wird noch einfacher, wenn wir

$$be^{-mx}, \quad ae^{-my}$$

als neue Veränderliche x, y einführen, was wir ohne weiteres thun dürfen, da $abm \neq 0$ ist. Dann nimmt

$$ds^2 = \frac{dx\,dy}{Z^2}$$

die Form an:

$$ds^2 = \frac{dx\,dy}{abm^2\left[A(x+y)^{\frac{1}{2}+n} + B(x+y)^{\frac{1}{2}-n}\right]^2}.$$

Den constanten Factor abm^2 können wir zu A und B schlagen, wodurch sich als endgültige Form ergiebt:

(49) $$ds^2 = \frac{dx\,dy}{\left[A(x+y)^{\frac{1}{2}+n} + B(x+y)^{\frac{1}{2}-n}\right]^2}.$$

Wir besprechen diese Flächen weiter unten.

Zweiter Fall.

Zweitens: $\Delta \equiv X \equiv Y \equiv 0$. In diesem Fall liefern die Gleichungen (41) und (42):

$$\Phi_x + \Phi_y = -\frac{a}{2},$$

wobei a eine Constante ist. Daher hat Φ die Form:

$$\Phi = -\frac{a}{2}x - \frac{1}{2}\lg \omega(x-y).$$

Diese Form erfüllt die Bedingungen (39). Also erhalten wir nach (38), wenn wir noch $-y$ anstelle von y und $-\omega$ anstelle von ω einführen, das folgende Quadrat des Bogenelements:

(50) $$ds^2 = \omega(x+y)\,e^{ax}\,dx\,dy.$$

Ehe wir zur näheren Discussion der erhaltenen Flächenfamilien übergehen, erledigen wir noch die oben (S. 151) vorläufig ausgeschlossene Annahme, *dass eine der beiden Functionen ξ, η identisch Null ist.* Beide zusammen dürfen natürlich nicht gleich Null angenommen werden. Wir nehmen also jetzt an:

Annahme $\xi\eta \equiv 0$.

$$\xi \not\equiv 0, \quad \eta \equiv 0.$$

Der Fall $\xi \equiv 0$, $\eta \not\equiv 0$ geht aus diesem durch Vertauschen von x mit y hervor, ist also im Grunde genommen mit ihm identisch. Durch Einführung einer passenden Function von x als neues x können wir im vorliegenden Falle erreichen, dass $\xi \equiv 1$ wird.

Die Relationen (35) liefern jetzt einfach:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{R}{Z} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{T}{Z} = 0,$$

oder, da $R = Z_{xx}$, $T = Z_{yy}$ ist:

(51) $$Z_{xx} = Y(y)\,Z, \quad Z_{yy} = Y_1(y)\,Z.$$

Berechnen wir aus beiden Gleichungen Z_{xxyy}, so kommt:

$$Y''Z + 2\,Y'Z_y + YZ_{yy} = Y_1 Z_{xx},$$

oder, wenn wir hierin die Werte (51) einsetzen:

$$Y''Z + 2\,Y'Z_y = 0,$$

d. h. Z^2 hat die Form:

$$Z^2 = \frac{\omega(x)}{Y'(y)}.$$

Daher sind die hier auftretenden Flächen, für die

$$ds^2 = \frac{Y'(y)}{\omega(x)}\,dx\,dy$$

ist, abwickelbare Flächen, also Flächen, die schon im vorigen Paragraphen behandelt wurden.

Unser Gesamtergebnis ist also dies: **Ergebnis.**

Abgesehen von den schon behandelten Flächen constanter Krümmung haben sich zwei Flächengattungen ergeben, die durch die folgenden Bogenelement-Quadrate definiert sind:

(49) $$ds^2 = \frac{dx\,dy}{\left[A(x+y)^{\frac{1}{2}+n} + B(x+y)^{\frac{1}{2}-n}\right]^2},$$

(50) $$ds^2 = \omega(x+y)\,e^{ax}\,dx\,dy.$$

Allerdings ist unser Problem hierdurch noch nicht völlig erledigt. Wir wissen zwar, dass die Differentialgleichung der geodätischen Kreise auf den gefundenen Flächen mindestens eine infinitesimale Punkttransformation gestattet. Wir werden aber nach *allen* derartigen Transformationen fragen. Indem wir hierzu übergehen, wollen wir zugleich die gefundenen Flächenfamilien näher besprechen.

Unter den Flächen, deren ds^2 die Form (49) besitzt, sind auch Flächen constanter Krümmung enthalten. Wir finden sie, indem wir **Flächen der ersten Art.**

das Krümmungsmass K nach der oben (S. 153) angegebenen Formel (45) berechnen, ohne Mühe. Es zeigt sich, dass nur die Fälle

$$n = \pm \frac{1}{2}$$

Flächen constanter Krümmung liefern. Von diesen Fällen können wir daher in der Folge absehen, da sie zu den im vorigen Paragraphen behandelten Flächen gehören.

Die Form des Bogenelementes der betrachteten Flächen zeigt, dass sie auf Rotationsflächen abwickelbar sind. Um dies zu verificieren, schreiben wir die Gleichungen einer Rotationsfläche in den laufenden Punktcoordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ in der Form:

$$\mathfrak{x} = \frac{\sin v}{\varphi(u)}, \quad \mathfrak{y} = \frac{\cos v}{\varphi(u)}, \quad \mathfrak{z} = u.$$

Das Quadrat ihres Bogenelements:

$$ds^2 = \left(\frac{\varphi'^2}{\varphi^4} + 1\right) du^2 + \frac{dv^2}{\varphi^2}$$

geht durch Einführung der Parameter

$$(52) \qquad \begin{cases} x = \displaystyle\int \frac{\sqrt{\varphi'^2 + \varphi^4}}{\varphi} du + iv, \\ y = \displaystyle\int \frac{\sqrt{\varphi'^2 + \varphi^4}}{\varphi} du - idv \end{cases}$$

über in

$$ds^2 = \frac{dx\,dy}{\varphi(u)^2}.$$

Nun ist u nach (52) eine Function von $x + y$ allein. Also sind unsere Flächen (49) auf die Rotationsfläche abwickelbar, sobald

$$\varphi(u) = A(x + y)^{\frac{1}{2}+n} + B(x + y)^{\frac{1}{2}-n}$$

ist, und dies lässt sich durch passende Wahl der Function $\varphi(u)$ erreichen.

Wir wenden uns nun zur Bestimmung *aller* infinitesimaler Punkttransformationen, welche die Differentialgleichung der geodätischen Kreise der Fläche (49) invariant lassen. Von vornherein sind uns zwei bekannt. Denn oben gingen wir davon aus, dass eine der infinitesimalen Transformationen auf die Form

$$\delta x = \delta t, \quad \delta y = \delta t$$

gebracht werden konnte (S. 151). Da wir aber alsdann be^{-mx} und ae^{-my} als neues x bez. y einführten (S. 156), so nimmt sie — abgesehen von einem gleichgültigen constanten Factor — die Form an:

$$\delta x = x\,\delta t, \quad \delta y = y\,\delta t.$$

Ferner bleibt ds^2 nach (49) ungeändert, wenn sich x, y um

$$\delta x = \delta t, \quad \delta y = -\delta t$$

ändern. Es ist sofort zu erkennen, dass auch diese infinitesimale Transformation zu den gesuchten gehört. Geometrisch folgt es daraus, dass diese Transformation eine Rotation der obigen Rotationsfläche ist. Wir zeigen es analytisch, indem wir bemerken, dass die Gleichungen (35) zu Beginn dieses Paragraphen jetzt, da Bestimmung aller inf. Trf.

(49′) $$Z = A(x+y)^{\frac{1}{2}+n} + B(x+y)^{\frac{1}{2}-n},$$

also

$$\frac{R}{Z} = \frac{T}{Z} = \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{(x+y)^2}$$

ist, die Form haben:

(53) $$\begin{cases} \frac{1}{4}\xi''' - \left(n^2 - \frac{1}{4}\right)\frac{\xi'}{(x+y)^2} + \left(n^2 - \frac{1}{4}\right)\frac{\xi+\eta}{(x+y)^3} = 0, \\ \frac{1}{4}\eta''' - \left(n^2 - \frac{1}{4}\right)\frac{\eta'}{(x+y)^2} + \left(n^2 - \frac{1}{4}\right)\frac{\xi+\eta}{(x+y)^3} = 0. \end{cases}$$

Sie werden aber offenbar von $\xi = 1$, $\eta = -1$ erfüllt. Es sind also

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}$$

von vornherein bekannte infinitesimale Transformationen der gesuchten Art. Wir werden nun sehen, dass es ausserdem keine giebt. Zu dem Zweck haben wir $\xi(x)$ und $\eta(y)$ aus (53) zu berechnen.

Da ξ nur von x, η nur von y abhängt, so lehren diese Gleichungen, wenn man in der ersten statt x, in der zweiten statt y irgend eine Constante setzt, dass ξ, η die Formen haben müssen:

$$\xi = \alpha(x+\beta)^3 + \gamma x + \delta,$$
$$\eta = \varrho(y+\sigma)^3 + \tau y + \omega,$$

in denen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sowie $\varrho, \sigma, \tau, \omega$ Constanten sind. Dieser Schluss ist nur dann nicht gestattet, wenn $n^2 = \frac{1}{4}$ ist, aber diese Annahme führt auf die ausgeschlossenen Fälle von Flächen constanter Krümmung.

Setzen wir die obigen Werte von ξ, η in (53) ein, so finden wir schliesslich, dass ξ, η die Form haben:

$$\xi = ax + b, \quad \eta = ay - b.$$

Dabei sind a, b willkürliche Constanten.

Folglich gestattet die Differentialgleichung der geodätischen Kreise der Fläche die infinitesimalen conformen Punkttransformationen:

(54) $$(ax+b)\frac{\partial f}{\partial x} + (ay-b)\frac{\partial f}{\partial y},$$

die linear ableitbar sind aus den beiden infinitesimalen Transformationen:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Invarianz d. Schar der geod. Linien.

Wir wollen noch untersuchen, ob die infinitesimalen Punkttransformationen (54) insbesondere auch die Differentialgleichung *zweiter* Ordnung der geodätischen *Linien* unserer Fläche invariant lassen.

Die geodätischen Linien sind die geodätischen Kreise mit der Krümmung Null. Nach der Formel des § 1 (S. 136) für die geodätische Krümmung sind sie daher definiert durch die Differentialgleichung zweiter Ordnung.

$$y''+2\frac{Z_x}{Z}y'-2\frac{Z_y}{Z}y'^2=0. \tag{55}$$

Erfahren nun x, y nach (54) die Incremente

$$\delta x=(ax+b)\,\delta t, \quad \delta y=(ay-b)\,\delta t,$$

so erfährt y' das Increment Null (vgl. das 2. Beispiel, § 2 des 4. Kap., S. 98). Das Increment von y'' ist

$$\delta y''\equiv\delta\frac{dy'}{dx}\equiv\frac{d\delta y'\cdot dx-dy'\cdot d\delta x}{dx^2}\equiv\frac{d\delta y'}{dx}-y''\frac{d\delta x}{dx},$$

also:

$$\delta y''=-ay''\,\delta t.$$

Da ferner Z den Wert (49′) hat, so ist, wenn wir die Differentialquotienten von Z nach $x+y$ durch Z', Z'', ... bezeichnen, das Increment von $\frac{Z_x}{Z}$:

$$\delta\frac{Z_x}{Z}=\delta\frac{Z'}{Z}=\frac{ZZ''-Z'^2}{Z^2}\,\delta(x+y)=\frac{ZZ''-Z'^2}{Z^2}\,a(x+y)\,\delta t.$$

Dies ist zugleich das Increment von $\frac{Z_y}{Z}$.

Wir fragen uns nun, ob das Increment der linken Seite der Differentialgleichung (55) infolge dieser Differentialgleichung verschwindet. Dies Increment hat, abgesehen vom Factor δt, nach dem Vorhergehenden den Wert

$$-ay''+2(y'-y'^2)\frac{ZZ''-Z'^2}{Z^2}\,a(x+y).$$

Setzen wir hierin den aus (55) folgenden Wert von y'' ein, so fragen wir also, ob der hervorgehende Ausdruck verschwindet. Dies liefert die Forderung:

$$(y-y'^2)\frac{ZZ''-Z'^2}{Z^2}\,a(x+y)+a(y'-y'^2)\frac{Z'}{Z}=0.$$

Da

$$\frac{Z''}{Z} = \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{(x+y)^2}$$

ist, so lässt sich diese Bedingung auch so schreiben:

$$a\left\{(x+y)^2 Z'^2 - (x+y)\, Z'Z - \left(n^2 - \frac{1}{4}\right) Z^2\right\} = 0.$$

Sie wird befriedigt, wenn entweder

$$a = 0$$

oder

$$(x+y)\, Z' - \frac{1}{2} Z \pm nZ = 0$$

ist, wobei das obere oder das untere Vorzeichen gewählt werden kann. Infolge von (49′) liefert dies die Gleichung:

$$A(n \pm n)\,(x+y)^{\frac{1}{2}+n} + B(-n \pm n)\,(x+y)^{\frac{1}{2}-n} = 0.$$

Sie wird befriedigt, wenn entweder $n = 0$ oder $A = 0$ oder $B = 0$ ist.

Das Ergebnis $a = 0$ lehrt nach (54), dass die Differentialgleichung der geodätischen Linien stets die infinitesimale Transformation

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}$$

gestattet. Sie gestattet ausserdem auch

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$$

dann und nur dann, wenn entweder $n = 0$ oder $A = 0$ oder $B = 0$ ist.

Diese drei Fälle sind jedoch auszuschliessen. Denn oben (S. 154) zeigten wir, dass die erste Flächengattung (49) dadurch charakterisiert ist, dass bei ihr ds^2 durch die bestimmte infinitesimale Transformation $\delta x = \delta t$, $\delta y = \delta t$ nicht nur um einen constanten Factor geändert wird. Diese Transformation hat in den jetzigen Veränderlichen nach S. 158 die Form $\delta x = x\delta t$, $\delta y = y\delta t$. Eine einfache Ausrechnung zeigt, dass das Quadrat des Bogenelementes (49) bei ihr bloss um einen constanten Factor geändert wird, wenn n oder A oder B gleich Null ist. Diese Fälle gehören also gar nicht hierher. In diesen Fällen lässt sich in der That ds^2 auf die Form*):

---

*) Weingarten hat bekanntlich gezeigt (Journal für d. reine u. ang. Mathem., Bd. 59, 1861, S. 382), dass die Centraflächen aller der Flächen, deren Hauptkrümmungsradien R_1, R_2 durch eine Relation $F(R_1, R_2) = 0$ verknüpft sind, auf eine Rotationsfläche abwickelbar sind. Lie fand (Math. Annalen, Bd. 20, 1882, S. 387), dass die Rotationsflächen mit

$$ds^2 = \frac{dx\,dy}{(x+y)^m}$$

$$ds^2 = \frac{dx\,dy}{(x+y)^m}.$$

bringen, die sich unter die Form (50) für ds^2 unterordnet, sodass sich also Flächen der zweiten Gattung für $nAB = 0$ ergeben.

Flächen der zweiten Art.

Wir wenden uns jetzt zur zweiten Flächengattung, zu der durch die Formel definierten:

$$(50) \qquad ds^2 = \omega(x+y)\, e^{ax}\, dx\, dy.$$

Hier bemerken wir: Lie lenkte seinerzeit die Aufmerksamkeit auf die Flächen, die eine infinitesimale Ähnlichkeitstransformation des Raumes gestatten *), und nannte sie *Spiralflächen.* Alsdann hat Lévy gezeigt, dass jede Fläche, deren ds^2 die obige Form (50) hat, auf eine Spiralfläche abwickelbar ist **). *Die erhaltene Flächengattung besteht somit aus allen Flächen, die auf Spiralflächen abwickelbar sind.*

Spiralflächen.

Bestimmg. aller inf. Trf.

Unsere Aufgabe ist die Bestimmung *aller* infinitesimaler Punkttransformationen, welche die Differentialgleichung der geodätischen Kreise dieser Flächen invariant lassen. Zu diesem Zweck erinnern wir daran, dass die Flächen, auf denen die gesuchten infinitesimalen Punkttransformationen ds^2 nicht nur um einen constanten Factor ändern, schon in der zuerst betrachteten Kategorie (49) enthalten sind. (Vgl. S. 154.) Von ihnen können wir deshalb absehen. Wir fragen also nur nach solchen Transformationen

$$\xi(x)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(y)\frac{\partial f}{\partial y},$$

bei denen

$$(56) \qquad \delta\, ds^2 = c\, ds^2\, \delta t$$

ist, wobei c constant ist. Es empfiehlt sich, anstatt der Form (50) die äquivalente Form

$$(50') \qquad ds^2 = \frac{dx\,dy}{e^{2\varphi(x+y)+2bx}} = \frac{dx\,dy}{Z^2},$$

zu benutzen. Nun ist:

$$\delta\, ds^2 = \left[\frac{\xi' + \eta'}{Z^2}\, dx\, dy - \frac{2\, dx\, dy}{Z^2}\left(\frac{Z_x}{Z}\xi + \frac{Z_y}{Z}\eta\right)\right]\delta t.$$

---

die einzigen sind, auf denen die Schar der geodätischen Linien *zwei* conforme infinitesimale Punkttransformationen gestattet, sowie dass auf ihnen die Centraflächen derjenigen Flächen abwickelbar sind, zwischen deren Krümmungsradien R_1, R_2 die Relation

$$\frac{R_1}{R_2} = \text{Const.}$$

besteht.

*) Siehe z. B. Mathem. Annalen Bd. 5 (1872), S. 204.

**) Siehe Comptes Rendus Bd. 87 (1878), S. 788.

Also finden wir nach (56) und (50′):

$$\xi' + \eta' - 2(\varphi' + b)\,\xi - 2\varphi'\eta = c. \tag{57}$$

Andererseits nehmen die zu Beginn des Paragraphen gegebenen Formeln (35) jetzt wegen (50′) die Form an:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\,\xi''' - 2\,\xi' u - (\xi + \eta)\,u' = 0, \\ \frac{1}{2}\,\eta''' - 2\eta' v - (\xi + \eta)\,v' = 0, \end{cases} \tag{58}$$

wenn zur Abkürzung

$$(\varphi' + b)^2 + \varphi'' \equiv u, \quad \varphi'^2 + \varphi'' \equiv v \tag{59}$$

gesetzt wird. u und v sind also Functionen von $x + y$. Die Formeln (58) folgen übrigens *unmittelbar durch Differentiation* aus (57).

Es handelt sich also darum, $\xi(x)$ und $\eta(y)$ in allgemeinster Weise aus (57) und (58) zu berechnen. Dabei aber dürfen wir von allen den Fällen absehen, in denen sich Flächen constanten Krümmungsmasses ergeben. Das Krümmungsmass

$$K = 4(ZZ_{xy} - Z_x Z_y)$$

hat nach (50′) den Wert $4Z^2\varphi''$. Es ist also nach (59):

$$K_x = 4\,Z^2 u', \quad K_y = 4Z^2 v'.$$

Wir sehen mithin ab von den Fällen, in denen u' und v' beide Null sind, also auch von dem Fall $\varphi'' \equiv 0$.

Differenzieren wir nun die Gleichung (57) partiell nach x und das Ergebnis partiell nach y, so kommt:

$$\frac{\partial(\varphi''\xi)}{\partial x} + \frac{\partial(\varphi''\eta)}{\partial y} = 0.$$

Bezeichnet also F eine uns noch unbekannte Function, so können wir setzen:

$$\varphi''\xi = F_y, \quad \varphi''\eta = -F_x,$$

sodass sich, weil $\varphi'' \mathrel{\equiv\mkern-15mu/} 0$ ist, ergiebt:

$$\xi = \frac{F_y}{\varphi''}, \quad \eta = -\frac{F_x}{\varphi''}. \tag{60}$$

Setzen wir diese Werte in (57) ein, so kommt:

$$(F_x - F_y)\frac{\varphi'''}{\varphi''^2} - 2(\varphi' + b)\frac{F_y}{\varphi''} + 2\varphi'\,\frac{F_x}{\varphi''} = c$$

oder nach (60) und (59):

$$u'\xi + v'\eta = -c\varphi''.$$

Differenzieren wir diese Gleichung das eine Mal nach x, das andere Mal nach y und bilden die Differenz, so kommt:

$$u'\xi' - v'\eta' = 0. \tag{61}$$

u' und v' sind, wie bemerkt, nicht beide Null. Wäre etwa $u' \equiv 0$, $v' \not\equiv 0$, so käme $\eta' = 0$, also nach der zweiten Gleichung (58) auch $\xi + \eta = 0$, d. h. ξ und η wären — da ξ nur x, η nur y enthalten darf — zwei entgegengesetzt gleiche Constanten. Dies liefert also die von vornherein bekannte infinitesimale Transformation

$$\delta x = \delta t, \quad \delta y = - \delta t.$$

Zu demselben Ergebnis führt die Annahme $v' \equiv 0$, $u' \not\equiv 0$. Es bleibt die Annahme $u' \not\equiv 0$, $v' \not\equiv 0$. Hier zeigt (61), dass $\frac{\eta'}{\xi'}$ nur von $x + y$ abhängt. Da aber ξ nur x, η nur y enthält, so geht dies nur dann an, wenn:

$$\xi' = \alpha e^{kx}, \quad \eta' = \beta e^{-ky}$$

ist, wobei α, β, k Constanten bezeichnen. Hieraus ergiebt sich:

$$\xi = \frac{\alpha}{k} e^{kx} + \text{Const.}, \quad \eta = \frac{-\beta}{k} e^{-ky} + \text{Const.}$$

oder, wenn $k = 0$ ist:

$$\xi = \alpha x + \text{Const.}, \quad \eta = \beta y + \text{Const.}$$

Setzen wir diese Werte in (57) ein, so können wir φ' berechnen. Indem wir fordern, dass φ' nur $x + y$ enthalten soll, finden wir alsdann ohne weitere erhebliche Schwierigkeit, dass allein die Annahme $\xi + \eta = 0$ wie vorher bleibt, sobald nicht etwa die Fläche abwickelbar ist oder $b = 0$ und $(x + y)\varphi' = \text{Const.}$ ist. Im letzteren Falle ist ds^2 auf die Form

$$ds^2 = \frac{dx\,dy}{(x + y)^m}$$

reducibel, die wir oben (S. 161, 162) besprachen.

Sehen wir hiervon ab, so ergiebt sich nur die eine Transformation $\delta x = \delta t$, $\delta y = - \delta t$. Man erkennt ohne Mühe, dass die Differentialgleichung der geodätischen *Linien* der Fläche diese infinitesimale Transformation *nicht* gestattet.

Wir fassen nun die Hauptergebnisse des Kapitels bis hierher zusammen in dem Theorem (vgl. die S. 133 genannte Arbeit im norweg. Archiv, Christiania 1884):

Theorem 5: *Gestattet die Schar der ∞^3 geodätischen Kreise einer Fläche eine unendliche continuierliche Schar von Berührungstransformationen, gestattet sie also eine oder mehrere infinitesimale Berührungstransformationen, so können folgende Fälle eintreten:* Gesamt-Ergebnis.

Erstens: Findet sich unter den infinitesimalen Berührungstransformationen auch nur eine einzige, die keine erweiterte Punkttransformation ist, so hat die Fläche constante Krümmung. Auf jeder Fläche constanter Krümmung gestattet die Schar der geodätischen Kreise zehn von einander unabhängige infinitesimale Berührungstransformationen. Die Schar der geodätischen Kreise lässt sich hier stets in der Form schreiben:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2.$$

Zweitens: Gestattet die Schar der geodätischen Kreise nur infinitesimale Punkttransformationen, so sind diese conform und es giebt entweder zwei von einander unabhängige oder nur eine. Im ersteren Falle lässt sich das Quadrat des Bogenelementes auf die Form bringen:

$$ds^2 = \frac{dx\,dy}{\left[A(x+y)^{\frac{1}{2}+n} + B(x+y)^{\frac{1}{2}-n}\right]^2}.$$

In diesem Falle gestattet insbesondere auch die Schar der ∞^2 geodätischen Linien der Fläche die beiden infinitesimalen Transformationen dann und nur dann, wenn ds^2 die besondere Form hat:

$$ds^2 = \frac{dx\,dy}{(x+y)^m}.$$

In dem anderen Falle, dass die Schar der geodätischen Kreise nur eine infinitesimale Punkttransformation zulässt, ist die Fläche eine beliebige auf eine Spiralfläche abwickelbare Fläche. Bei ihr kann also ds^2 auf die Form gebracht werden:

$$ds^2 = \omega(x+y)\, e^{ax}\, dx\, dy.$$

§ 5. Verallgemeinerung der stereographischen Abbildung für beliebige Rotationsflächen.

Von jeher ist die punktweise Abbildung der Kugel auf die Ebene als besonders wichtig betrachtet worden. Unter den unendlich vielen möglichen Abbildungen haben zwei bemerkenswerte ausgezeichnete Eigenschaften, nämlich die Centralprojection von dem Mittelpunkt der Abb. d. Kugel auf d. Ebene.

Kugel aus auf eine beliebige Ebene sowie die Centralprojection von einem beliebigen Punkte der Kugel aus auf eine Ebene, die parallel der Tangentenebene dieses Punktes ist. Erstere Abbildung bezeichnet man bekanntlich als die *gnomonische*, letztere als die *stereographische*.

Bei der *gnomonischen* Projection bilden sich die grössten Kreise der Kugel als Geraden ab. Die stereographische Projection andererseits ist conform und bildet jeden Kreis der Kugel als Kreis in der Ebene ab. Wir können also sagen, dass bei der gnomonischen Projection jede geodätische Linie in eine geodätische Linie, bei der stereographischen aber jeder geodätische Kreis in einen geodätischen Kreis übergeht. Die erstere Bemerkung war die Veranlassung dazu, dass Beltrami*) seinen berühmten Satz aufstellte, nach dem die Flächen constanter Krümmung die einzigen Flächen sind, die sich punktweise so auf die Ebene abbilden lassen, dass jede geodätische Linie in eine geodätische Linie übergeht. Darauf hin stellte Beltrami das Problem**), das allgemeinste Paar von zwei Flächen zu bestimmen, die sich punktweis so aufeinander abbilden lassen, dass jeder geodätischen Linie der einen Fläche eine geodätische Linie der andern entspricht. Dini***) löste dies Problem für *reelle* Flächen und *reelle* Abbildungen und gelangte zu Flächen, die zur Kategorie der Flächen mit dem *Liouville*'schen Bogenelement gehören. Lie†) behandelte zuerst das Problem in voller Allgemeinheit, ohne sich auf das Reelle zu beschränken. Er fand drei Flächenkategorien, deren ds^2 die Form hat:

Geod. Abbildung.

Erstens: $ds^2 = \omega(x+y)\, e^{ax}\, dx\, dy$ (Spiralflächen),

Zweitens: $ds^2 = (y + X(x))\, dx\, dy$,

Drittens: $ds^2 = (\varphi(x+y) - \psi(x-y))\, dx\, dy$ (Liouville'sche Flächen).

Er gab die allgemeinste geodätische Abbildung zweier Flächen einer dieser Kategorien auf einander und lenkte gleichzeitig u. A. die Aufmerksamkeit auf diejenigen Flächen, deren ds^2 entweder in mehrfacher

*) Annali di Matematica, 1. Serie, Bd. 7 (1866), S. 185.

**) Am Schluss der soeben citierten Abhandlung.

***) Annali di Matematica, 2. Serie, Bd. 3 (1869), S. 269.

†) *Classification der Flächen nach der Transformationsgruppe ihrer geodätischen Curven*, Univ.-Programm, Christiania 1879, sowie: Math. Annalen Bd. 20 (1882), S. 419, und Berichte der Gesellsch. d. Wissensch. zu Leipzig, 1889, S. 155. Diese letztere Note, die neueren Verfassern unbekannt geblieben ist, zeigt u. A., dass die Flächen, auf denen die Schar der geodätischen Linien mehr als zwei von einander unabhängige infinitesimale Transformationen gestattet, entweder constante Krümmung haben oder aus den Flächen mit

$$ds^2 = (x+y)\, dx\, dy$$

durch die von Dini und die von Lie herrührenden Formeln abgeleitet werden können. Wir werden an einem anderen Orte die neueren wertvollen Untersuchungen über geodätische Abbildungen besprechen.

Weise auf eine dieser Formen oder aber gleichzeitig auf mehrere unter diesen Formen gebracht werden kann. Endlich behandelte er eingehend das Problem, die Flächen zu bestimmen, die auf unendlich viele Arten auf sich selbst so abgebildet werden können, dass jede geodätische Linie wieder in eine geodätische Linie übergeht.

Die *stereographische* Projection giebt nun zu ähnlichen Problemen Anlass, indem man an die Stelle der geodätischen Abbildung diejenige Abbildung treten lässt, bei der jeder geodätische Kreis in einen geodätischen Kreis übergeht. Dabei wird, wie bisher, unter einem geodätischen Kreise stets eine Curve von constanter geodätischer Krümmung verstanden. Analog dem Satze von Beltrami gilt jener Satz, den wir ausser anderen Ergebnissen in § 3 dieses Kapitels abgeleitet haben und nach dem die Flächen constanter Krümmung die einzigen sind, die sich punktweis so auf die Ebene abbilden lassen, dass sich jeder geodätische Kreis als ein Kreis darstellt. Analog dem von Beltrami gestellten, von Dini unter speciellen Voraussetzungen sowie von Lie in allgemeinster Form gelösten Problem kann man hier weiterhin nach dem allgemeinsten Paar von Flächen fragen, die sich punktweis so aufeinander abbilden lassen, dass jedem geodätischen Kreis der einen Fläche ein geodätischer Kreis der andern entspricht. Diese Frage wird im gegenwärtigen Paragraphen beantwortet. Es wird sich ergeben, dass die beiden Flächen auf Rotationsflächen abwickelbar sein müssen und die eine dieser Flächen eine ganz beliebige derartige Fläche sein darf*). Alsdann ist die zugehörige zweite Rotationsfläche aus einer gewissen Schar solcher Flächen beliebig auszuwählen. Die Abbildung ist überdies *conform*, und es besteht eine gewisse bemerkenswerte Beziehung zwischen den Flächeninhalten einander entsprechender Zonen der beiden Flächen, die auf einander abgebildet werden. Diese merkwürdige Abbildung giebt insbesondere für die Flächen constanter Krümmung die stereographische Projection.

Abb., bei der geod. Kreis in geod. Kreis übergeht.

Verallg. d. stereogr. Projection.

Nach diesen einleitenden Worten wenden wir uns nun zu dem Problem, *zwei Flächen in solcher Weise Punkt für Punkt aufeinander abzubilden, dass den geodätischen Kreisen der einen Fläche die geodätischen Kreise der andern entsprechen.* Eine solche Abbildung ist offenbar immer möglich, sobald die eine Fläche auf die andere oder auf eine mit letzterer ähnliche Fläche abwickelbar ist. Wir sehen im Folgenden von dieser trivialen, durch Abwickelung vermittelten Abbildung ab. —

Problem.

---

*) Hierin liegt eine neue charakteristische Eigenschaft aller Flächen, die auf Rotationsflächen abwickelbar sind.

Besondere Coord. auf d. Flächen.

Ist zwischen den Punkten zweier Flächen eine Zuordnung festgestellt, so giebt es nach einem Satz von Tissot auf der einen Fläche zwei einander orthogonal schneidende Curvenscharen, denen auf der anderen Fläche zwei ebensolche Scharen entsprechen. Dieser Satz erleidet jedoch eine Ausnahme — auf die Lie gelegentlich aufmerksam gemacht hat — dann, wenn sich das Orthogonalsystem auf der einen Fläche auf die eine der beiden Scharen von Minimalcurven reduciert. Dieser Ausnahmefall aber führt bei unserem Problem zu keinem neuen Ergebnis von Interesse, wie man leicht nachzuweisen vermöchte. Deshalb sehen wir hier von ihm ab.

Wir dürfen also annehmen, dass die bei der vorausgesetzten Zuordnung einander entsprechenden Orthogonalsysteme durch die Parameterlinien $x = \text{Const.}$, $y = \text{Const.}$ der Flächen dargestellt werden, sodass die Quadrate der Bogenelemente ds, ds_1 beider Flächen die Form haben:

$$ds^2 = e dx^2 + g dy^2, \quad ds_1{}^2 = e_1 dx^2 + g_1 dy^2 \tag{62}$$

und dem Punkt (x, y) der einen Fläche der Punkt der andern entspricht, der dieselben krummlinigen Coordinaten x, y hat.

Die geodätische Krümmung der ersten Fläche hat nach Minding den Wert*):

$$K = \frac{egy'' + \frac{1}{2} g g_x y'^3 + \left(\frac{1}{2} e g_y - g e_y\right) y'^2 + \left(e g_x - \frac{1}{2} g e_x\right) y' - \frac{1}{2} e e_y}{\sqrt{eg}\sqrt{e + gy'^2}^3}.$$

Setzen wir diesen Wert gleich Constans, so stellt die hervorgehende Relation die Differentialgleichung zweiter Ordnung der geodätischen Kreise dar, die eine bestimmte constante Krümmung haben. Differenzieren wir die Gleichung total nach x, so ergiebt sich die Differentialgleichung dritter Ordnung aller geodätischer Kreise der Fläche. Man erkennt, dass diese Differentialgleichung die Form hat:

$$y''' - \frac{3gy'}{e + gy'^2} y''^2 + \varphi y'' + \psi = 0,$$

in der φ und ψ gewisse Functionen von x, y, y' sind. Entsprechend ist die Differentialgleichung der geodätischen Kreise der zweiten Fläche zu bilden:

$$y_1''' - \frac{3g_1 y'}{e_1 + g_1 y'^2} y''^2 + \varphi_1 y'' + \psi_1 = 0.$$

Soll nun bei der angenommenen Abbildung jedem geodätischen Kreis der einen Fläche ein geodätischer Kreis der andern entsprechen,

*) Zur Berechnung dieses Ausdruckes vgl. z. B. Stahl und Kommerell, *Grundformeln der Flächentheorie*, S. 89 u. 85.

so müssen die beiden Differentialgleichungen übereinstimmen. Also muss zunächst

$$\frac{g}{e+gy'^2} = \frac{g_1}{e_1+g_1y'^2}$$

für alle Werte von x, y, y' sein, d. h. es folgt

$$\frac{e}{g} = \frac{e_1}{g_1}.$$

Die Quadrate der Bogenelemente beider Flächen unterscheiden sich mithin nur um einen Factor, der eine Function von x, y ist. *Die gesuchte Abbildung ist folglich conform,* und die Minimalcurven der einen Fläche entsprechen also denen der andern. Conforme Abb.

Wir können daher voraussetzen, dass die Minimalcurven als Parameterlinien gewählt werden, sodass ds^2 und $ds_1{}^2$ in den neuen krummlinigen Coordinaten x, y die Form annehmen: Neue Coord. auf d. Flächen.

$$ds^2 = \frac{dx\,dy}{Z(x,y)^2}, \quad ds_1{}^2 = \frac{dx\,dy}{Z_1(x,y)^2}. \tag{63}$$

Nach wie vor sind diejenigen Punkte (x, y) beider Flächen einander zugeordnet, deren Coordinaten x, y übereinstimmen. Setzen wir nun wie in § 1:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \equiv R, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \equiv T$$

und analog

$$\frac{\partial^2 Z_1}{\partial x^2} \equiv R_1, \quad \frac{\partial^2 Z_1}{\partial y^2} \equiv T_1,$$

so lauten die Differentialgleichungen der geodätischen Kreise der beiden Flächen nach Formel (3) des § 1 (S. 136):

$$y''' - \frac{3}{2}y'^{-1}y''^2 + 2\frac{R}{Z}y' - 2\frac{T}{Z}y'^3 = 0,$$

$$y''' - \frac{3}{2}y'^{-1}y''^2 + 2\frac{R_1}{Z_1}y' - 2\frac{T_1}{Z_1}y'^3 = 0.$$

Auch jetzt haben wir zu fordern, dass diese beiden Differentialgleichungen übereinstimmen. Dies führt zu den notwendigen und nun auch hinreichenden Bedingungen:

$$\frac{R}{Z} = \frac{R_1}{Z_1}, \quad \frac{T}{Z} = \frac{T_1}{Z_1}. \tag{64}$$

Um sie auszuwerten, setzen wir

$$Z_1 = \Omega Z. \tag{65}$$

Wäre $\Omega \equiv$ Const., so läge der oben ausdrücklich ausgeschlossene triviale Fall vor. Die Gleichungen (64) geben nun nach (65):

$$\Omega_{xx} Z + 2\Omega_x Z_x = 0,$$
$$\Omega_{yy} Z + 2\Omega_y Z_y = 0$$

oder integriert:

$$\log \Omega_x + 2 \log Z = \log Y(y),$$
$$\log \Omega_y + 2 \log Z = \log X(x),$$

wobei X eine Function von x allein, Y eine Function von y allein bezeichnet. Wir haben somit gefunden:

$$(66) \qquad \Omega_x = \frac{Y}{Z^2}, \quad \Omega_y = \frac{X}{Z^2}.$$

Zur Vereinfachung führen wir auf beiden Flächen in derselben Weise eine Function von x als neues $\mathfrak{x}$ und eine Function von y als neues $\mathfrak{y}$ ein, was wir thun dürfen. Dann wird nach (63):

$$ds^2 = \frac{1}{Z^2} \frac{dx}{d\mathfrak{x}} \frac{dy}{d\mathfrak{y}} d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y}, \quad ds_1{}^2 = \frac{1}{Z_1{}^2} \frac{dx}{d\mathfrak{x}} \frac{dy}{d\mathfrak{y}} d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y},$$

d. h. ds^2 und $ds_1{}^2$ erhalten die Formen:

$$ds^2 = \frac{d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y}}{\mathfrak{Z}^2}, \quad ds_1{}^2 = \frac{d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y}}{\mathfrak{Z}_1{}^2},$$

wobei

$$\mathfrak{Z}^2 = Z^2 \frac{d\mathfrak{x}}{dx} \frac{d\mathfrak{y}}{dy}, \quad \mathfrak{Z}_1{}^2 = Z_1{}^2 \frac{d\mathfrak{x}}{dx} \frac{d\mathfrak{y}}{dy}$$

ist. Nach (65) ist auch jetzt

$$\mathfrak{Z}_1 = \Omega \mathfrak{Z}.$$

Die Gleichungen (66) liefern nun

$$\Omega_{\mathfrak{x}} = \frac{Y}{\mathfrak{Z}^2} \frac{d\mathfrak{y}}{dy}, \quad \Omega_{\mathfrak{y}} = \frac{X}{\mathfrak{Z}^2} \frac{d\mathfrak{x}}{dx}.$$

Wenn wir also die Functionen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ so wählen, dass

$$Y(y) \frac{d\mathfrak{y}}{dy} = 1, \quad X(x) \frac{d\mathfrak{x}}{dx} = 1$$

wird, so kommt einfach:

$$(67) \qquad \Omega_{\mathfrak{x}} = \frac{1}{\mathfrak{Z}^2}, \quad \Omega_{\mathfrak{y}} = \frac{1}{\mathfrak{Z}^2}.$$

Dies kann geschehen, sobald X und Y von Null verschieden sind. Wäre aber etwa $X \equiv 0$, so wäre Ω nach der zweiten Gleichung (66) frei von y, sodass Z nach der ersten Gleichung (66) eine Function von x allein multipliciert mit einer Function von y allein wäre. Dasselbe würde nach (65) von Z_1 gelten. Die beiden Flächen wären also nach (63) auf die Ebene abwickelbar. Dies aber ist eine triviale Annahme.

Wir dürfen also die Annahmen (67) machen, nach denen Ω eine Function von $\mathfrak{x} + \mathfrak{y}$ allein ist, sodass auch $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{Z}_1 = \Omega \mathfrak{Z}$ Functionen von $\mathfrak{x} + \mathfrak{y}$ allein sind. Wenn wir die jetzt benutzten Coordinaten mit x, y bezeichnen und ferner

$$x + y \equiv \omega$$

setzen, so reducieren sich die beiden Relationen (64) auf die eine:

$$\frac{Z''}{Z} - \frac{Z_1''}{Z_1} = 0, \tag{68}$$

wenn die Accente die Differentiationen nach ω andeuten, und sie werden nach (67) und (65) erfüllt durch die Annahmen:

$$\Omega = \int \frac{d\omega}{Z(\omega)^2}, \quad Z_1 = \Omega Z. \tag{69}$$

Da jetzt

$$ds^2 = \frac{dx\,dy}{Z(x+y)^2}, \quad ds_1{}^2 = \frac{dx\,dy}{Z_1(x+y)^2}$$

ist, so sind die beiden Flächen *auf Rotationsflächen abwickelbar.* (Vgl. zu dieser Bemerkung S. 158.) Da ferner Z als ganz beliebige Function von $x + y$ gewählt werden kann, so ist die eine dieser beiden Rotationsflächen ganz beliebig zu wählen.

Somit kommen wir zu dem wichtigen Ergebnis*):

Satz 7: *Lassen sich zwei Flächen Punkt für Punkt derart auf einander abbilden, dass den geodätischen Kreisen der einen Fläche die geodätischen Kreise der andern zugeordnet werden, so ist entweder die eine Fläche auf die andere oder auf eine Fläche, die der andern ähnlich ist, in zugeordneten Punkten abwickelbar oder aber beide Flächen sind auf Rotationsflächen abwickelbar. Wählt man im letzteren Fall als die eine Fläche eine beliebige Fläche, die sich auf eine Rotationsfläche abwickeln lässt, und bringt man bei ihr ds^2 auf die Form* Ergebnis.

$$ds^2 = \frac{dx\,dy}{Z(x+y)^2},$$

so ist die zweite Fläche irgend eine solche Fläche, deren ds^2 auf die Form gebracht werden kann:

$$ds^2 = \frac{dx\,dy}{\left[Z(x+y)\int \frac{d(x+y)}{Z(x+y)^2}\right]^2}.$$

Zugeordnet sind einander dann diejenigen Punkte beider Flächen, die dieselben krummlinigen Coordinaten x, y haben. Die Abbildung ist conform.

---

*) Zum ersten Male hat Lie diese Entwickelungen und den obigen Satz im Jahre 1884 im Archiv for Math. og Naturv., Christiania, 9. Bd., S. 62, veröffentlicht.

Wir können unsere Ergebnisse auf eine andere bemerkenswerte Form bringen. Das Gesamtresultat besteht ja darin, dass Z und Z_1 solche Functionen von $\omega \equiv x + y$ sein müssen, für die nach (68):

$$\frac{Z''}{Z} = \frac{Z_1''}{Z_1}$$

Lineare Diffgl. 2. Ordn.

ist. Es sind mithin Z und Z_1 *irgend zwei particulare Lösungen z ein und derselben gewöhnlichen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung:*

$$z'' + \Phi(\omega)\, z = 0. \tag{70}$$

Wählt man die Function $\Phi(\omega)$ in beliebiger, aber bestimmter Weise, so giebt es ∞^2 Lösungen z dieser Differentialgleichung. Jede liefert eine Flächenkategorie

$$ds^2 = \frac{dx\, dy}{z^2}$$

und alle diese Flächen, die zu derselben Function $\Phi(\omega)$ gehören, sind aufeinander in der Weise Punkt für Punkt bezogen, dass den geodätischen Kreisen wieder geodätische Kreise entsprechen.

Oben haben wir unter (69) durch Einführung einer Hülfsfunction $\Omega(\omega)$ zwei Lösungen Z und Z_1 in der Weise bestimmt:

$$Z = \Omega'^{-\frac{1}{2}}, \quad Z_1 = \Omega\Omega'^{-\frac{1}{2}}. \tag{71}$$

Es entspricht dies, da hier

$$\frac{Z''}{Z} = -\frac{1}{2}\,\frac{\Omega'\Omega''' - \frac{3}{2}\Omega''^2}{\Omega'^2}$$

ist, der Annahme, dass die lineare Differentialgleichung (70) in der Form geschrieben wird:

$$z'' + \frac{1}{2}\,\frac{\Omega'\Omega''' - \frac{3}{2}\Omega''^2}{\Omega'^2}\, z = 0. \tag{70'}$$

Geom. Untersuch. d. Abbild.

Um die gefundene Abbildung näher zu untersuchen, beschränken wir uns darauf, die Beziehungen zwischen den beiden Rotationsflächen zu betrachten, auf welche die beiden Flächen abwickelbar sind. Dass sie auf Rotationsflächen abwickelbar sind, folgerten wir oben aus der Form der Bogenelemente. Dies wird überdies durch die folgende Überlegung verificiert.

Sind $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ Cartesische Punktcoordinaten einer Rotationsfläche, deren Axe die $\mathfrak{z}$-Axe ist, so können wir setzen:

$$\mathfrak{x} = r\cos\varphi, \quad \mathfrak{y} = r\sin\varphi, \quad \mathfrak{z} = \mathfrak{z}(r).$$

r bedeutet den Radius des durch einen Punkt (r, φ) der Fläche gehenden Parallelkreises und φ den Winkel, den die durch diesen Punkt gehende

Meridianebene mit der $(\mathfrak{x}\mathfrak{z})$-Ebene bildet. Das Quadrat des Bogenelementes der Rotationsfläche ist:

$$ds^2 = r^2 d\varphi^2 + dr^2 + d\mathfrak{z}^2.$$

Hierin ist die Grösse

$$d\sigma^2 \equiv dr^2 + d\mathfrak{z}^2$$

das Quadrat des Bogenelements der Meridiancurve, sodass

$$ds^2 = r^2 d\varphi^2 + d\sigma^2$$

ist. Dies zerlegen wir in:

$$ds^2 = -r^2\left(d\varphi + i\,\frac{d\sigma}{r}\right)\left(-d\varphi + i\,\frac{d\sigma}{r}\right)$$

und setzen:

$$(72)\qquad \begin{cases} dx = d\varphi + i\,\dfrac{d\sigma}{r}, \\ dy = -d\varphi + i\,\dfrac{d\sigma}{r}, \end{cases}$$

was geschehen darf, da rechts vollständige Differentiale stehen. Nun ist

$$d(x+y) \equiv d\omega = 2i\,\frac{d\sigma}{r},$$

also r eine Function von ω allein. Es erhält also

$$ds^2 = -r^2\,dx\,dy$$

die Form

$$ds^2 = \frac{dx\,dy}{z(\omega)^2},$$

wobei

$$z^2 = -\frac{1}{r^2}$$

ist.

Es zeigt sich also Folgendes:

Sind $Z(\omega)$ und $Z_1(\omega)$ zwei particulare Lösungen der linearen Differentialgleichung (70) und wird

$$(73)\qquad r^2 = -\frac{1}{Z^2}, \quad r_1{}^2 = -\frac{1}{Z_1{}^2}$$

gesetzt, so sind die beiden Rotationsflächen:

$$(74)\qquad \begin{cases} \mathfrak{x} = r\cos\varphi, & \mathfrak{y} = r\sin\varphi, & \mathfrak{z} = \mathfrak{z}(r), \\ \mathfrak{x}_1 = r_1\cos\varphi_1, & \mathfrak{y}_1 = r_1\sin\varphi_1, & \mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z}_1(r_1) \end{cases}$$

punktweis auf einander derart abbildbar, dass jedem geodätischen Kreis der einen ein geodätischer Kreis der andern entspricht. Diese Abbildung findet so statt, dass dem Punkte (x, y) der einen Fläche der Punkt (x, y) der andern zugehört, wenn nach (72):

$$(75)\qquad \begin{cases} dx = d\varphi + i\dfrac{d\sigma}{r}, & dy = -d\varphi + i\dfrac{d\sigma}{r}; \\ dx = d\varphi_1 + i\dfrac{d\sigma_1}{r_1}, & dy = -d\varphi_1 + i\dfrac{d\sigma_1}{r_1} \end{cases}$$

und $x + y \equiv \omega$ gesetzt wird, wobei

$$d\sigma^2 = dr^2 + d\mathfrak{z}^2, \quad d\sigma_1{}^2 = dr_1{}^2 + d\mathfrak{z}_1{}^2$$

ist.

Nach (75) ist ferner bei der Abbildung:

$$(76)\qquad \begin{cases} d\varphi = d\varphi_1, \\ \dfrac{d\sigma}{r} = \dfrac{d\sigma_1}{r_1}. \end{cases}$$

Die erste Formel lehrt, dass man durch eine passende Rotation der einen Fläche um die gemeinsame Axe erreichen kann, dass

$$\varphi = \varphi_1$$

wird, in Worten: *Jede Meridiancurve der einen Fläche bildet sich als die Meridiancurve der andern ab, die in derselben Meridianebene liegt.* Da $\omega \equiv x + y =$ Const. auf beiden Flächen nach (73) einen Breitenkreis $r =$ Const. bez. $r_1 =$ Const. darstellt, so ergiebt sich ferner: *Jeder Breitenkreis der einen Fläche bildet sich als ein Breitenkreis der andern Fläche ab.*

Die Abbildung ist also völlig bekannt, sobald man die Abbildung in der Ebene eines Meridians kennt, z. B. in der Ebene $\mathfrak{y} = 0$. In dieser sind $r, \mathfrak{z}$ rechtwinklige Punktcoordinaten der einen, $r_1, \mathfrak{z}_1$ solche der andern Meridiancurve, und die beiden Curven stehen dabei in der durch die zweite Gleichung (76) ausgedrückten Beziehung, in der $d\sigma$ und $d\sigma_1$ die Bogenelemente beider Curven bezeichnen. Wählen wir also die eine Curve ganz beliebig:

$$\mathfrak{z} = \lambda(r),$$

so haben wir die zweite Curve

$$\mathfrak{z}_1 = \lambda_1(r_1)$$

zu bestimmen aus der Forderung:

$$\frac{\sqrt{1 + \lambda'(r)^2}}{r}\,dr = \frac{\sqrt{1 + \lambda_1{}'(r_1)^2}}{r_1}\,dr_1,$$

wobei r und r_1 nach (73) gewisse Functionen von $\omega \equiv x + y$ sind.

Beziehg. zw. Zoneninhalten. Die Abbildung hat noch eine interessante Eigenschaft: Nach dem Vorhergehenden wird jede *Flächenzone, die von zwei Breitenkreisen* *begrenzt wird*, als eine ebensolche abgebildet. Die Flächeninhalte der Zonen werden gegeben durch:

$$f = \int 2\pi r d\sigma, \quad f_1 = \int 2\pi r_1 d\sigma_1.$$

Es ist aber nach (75)

$$r d\sigma = \frac{r^2 d\omega}{2i}, \quad r_1 d\sigma_1 = \frac{r_1{}^2 d\omega}{2i}$$

oder nach (73):

$$r d\sigma = \frac{i\, d\omega}{2Z^2}, \quad r_1 d\sigma_1 = \frac{i\, d\omega}{2Z_1{}^2},$$

also:

$$f = i\pi \int \frac{d\omega}{Z^2}, \quad f_1 = i\pi \int \frac{d\omega}{Z_1{}^2},$$

und zwar sind beide Integrale zwischen denselben Grenzen für ω zu erstrecken, denn $\omega =$ Const. stellt die Breitenkreise der beiden Flächen dar. Nun sind aber Z und Z_1 zwei particulare Lösungen der linearen Differentialgleichung (70), und wir können sie in der Form (71) durch Benutzung der Hülfsfunction Ω schreiben. Setzen wir aber diese Werte (71) ein, so lassen sich die beiden Integrale auswerten. Es kommt:

$$f = i\pi(\Omega - a), \quad f_1 = -i\pi\left(\frac{1}{\Omega} - \frac{1}{a}\right),$$

wenn wir die Integrale von ω_0 an rechnen und $\Omega(\omega_0) = a$ setzen. Also ist:

$$f_1 = \frac{f}{\frac{a}{i\pi} f + a^2}$$

oder auch:

$$\frac{1}{f_1} = \frac{a^2}{f} + \frac{a}{i\pi}.$$

Werden die Flächeninhalte nicht gerade von zugeordneten Kreisen an und nicht gerade nach demselben Massstab gerechnet, so besteht also zwischen ihnen *eine allgemeine projective Beziehung* *).

Zum Schluss machen wir noch darauf aufmerksam, dass sich noch andere Probleme ähnlicher Art, wie hier, aufstellen lassen, wenn man nämlich die punktweisen Abbildungen ersetzt durch solche Abbildungen der Linienelemente der

---

*) Dies Ergebnis erklärt das Auftreten der durch Schwarz' klassische Untersuchungen so bekannt gewordenen Differentialinvariante

$$\frac{\Omega'\Omega''' - \frac{3}{2}\Omega''^2}{\Omega'^2}$$

in der oben aufgestellten linearen Differentialgleichung (70'), jener Grösse also, deren bestimmte Wahl jedesmal eine Kategorie von Flächen liefert, welche die im Texte besprochene Abbildung auf einander gestatten.

Flächen, bei denen Elementverein in Elementverein übergeht, also durch Berührungstransformationen der einen Fläche auf die andere. Man kann nach dem allgemeinsten Paar von Flächen fragen, die sich durch Berührungstransformation derart auf einander abbilden lassen, dass jedem geodätischen Kreis der einen Fläche ein geodätischer Kreis der andern entspricht. Dies Problem führt wahrscheinlich auf recht umständliche Rechnungen. Andererseits kann man nach den Flächen fragen, die in unendlich vielen Weisen auf sich selbst durch Berührungstransformationen derart abgebildet werden können, dass jedem geodätischen Kreis ein geodätischer Kreis entspricht. Dies Problem wurde in den vorhergehenden Paragraphen des gegenwärtigen Kapitels behandelt und vollständig erledigt.

Zu diesen Problemen kann man noch eines hinzufügen, das hier kurz angedeutet werden möge: Es ist bekannt, dass Schwarz, Klein, Poincaré u. A. die Frage behandelt haben, die Kugel in allen möglichen Weisen in Polygone, die von Kreisbogen begrenzt sind, derart zu zerlegen, dass diese Polygone bei einer discontinuierlichen projectiven Gruppe der Kugel unter einander vertauscht werden. Man könnte sich nun entsprechend die Aufgabe stellen, alle algebraischen Rotationsflächen zu bestimmen, die eine discontinuierliche Gruppe von conformen Transformationen ihres zweidimensionalen Gebietes gestatten, bei denen geodätische Kreise in ebensolche übergehen.

Abschnitt II.

Geometrie der Linienelemente des Raumes.

Unsere Theorie der Berührungstransformationen der Ebene, die im ersten Abschnitt in ihren Grundlagen entwickelt wurde, lässt sich als eine Transformationstheorie der Linienelemente (x, y, p) der Ebene auffassen. Es waren aber für uns nur solche Transformationen der Linienelemente von Interesse, die jeden Elementverein in einen Elementverein verwandeln. Der Hauptbegriff in jener Theorie war neben den Begriffen: Linienelement, Elementverein und Berührungstransformation der allgemeine Begriff: Schar von Linienelementen. Unter den Scharen von ∞^1 Elementen betrachteten wir nur die Elementvereine. Dagegen betrachteten wir ganz allgemeine Scharen von ∞^2 Elementen. Diese lassen sich durch eine Gleichung zwischen x, y, p analytisch definieren, und ihre Elemente ordnen sich in bestimmter Weise in ∞^1 Elementvereinen an, den Integralgebilden einer Differentialgleichung erster Ordnung: $F(x, y, p) = 0$.

Diese Theorie der Ebene lässt sich auf den *Raum* übertragen. Dabei ist aber wohl zu beachten, dass diese Übertragung in mehrfacher Weise geschehen kann. Dies ist an sich keineswegs überraschend, denn es ist ja eine altbekannte Erscheinung, dass Gebilde der Ebene mehrere Analoga im Raume haben. So giebt es im Raume auch zwei naheliegende, aber verschiedenartige Analoga zum Begriff: Linienelement der Ebene, nämlich einerseits das Linienelement des Raumes, andererseits das Flächenelement des Raumes.

Das *Linienelement im Raume* ist der Inbegriff eines Punktes und einer hindurchgehenden Geraden. Der Punkt ist durch seine drei Coordinaten x, y, z bestimmt, und die Richtung der Geraden kann durch die beiden Verhältnisse der Incremente dx, dy, dz festgelegt werden, die x, y, z beim Fortschreiten auf der Geraden erfahren. Es giebt dementsprechend ∞^5 Linienelemente im Raume. Eine Schar von ∞^4 Linienelementen im Raume wird hiernach definiert durch eine Gleichung von der Form

$$\Omega(x, y, z;\ dx, dy, dz) = 0,$$

die in dx, dy, dz homogen ist. Wir nennen solche Gleichungen *Monge'sche Gleichungen* und untersuchen sie im gegenwärtigen Abschnitt eingehend, wie wir überhaupt hier eine Geometrie der Linienelemente des Raumes entwickeln werden.

Ein *Flächenelement im Raume* ist der Inbegriff eines Punktes (x, y, z) und einer hindurchgehenden Ebene. Sind etwa die Richtungscosinus der Ebene proportional p, q, -1, so können x, y, z, p, q als Coordinaten der Flächenelemente aufgefasst werden. Es giebt also auch ∞^5 Flächenelemente im Raume. Eine Schar von ∞^4 Flächenelementen wird analytisch gegeben durch eine Gleichung von der Form

$$F(x, y, z, p, q) = 0.$$

Die Behandlung dieser Gleichungen führt zu der von Lagrange und Monge entwickelten Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Aber erst im dritten Abschnitt gehen wir hierauf sowie überhaupt auf die Geometrie der Flächenelemente des Raumes näher ein.

Wenn auch die Geometrie der Linienelemente und die Geometrie der Flächenelemente als neue und verschiedene Theorien aufgefasst werden müssen, so wird es sich doch ergeben, dass sie einerseits zu mehreren alten, classischen Theorien in enger Beziehung stehen und dass sie andererseits vielfach mit einander zusammenhängen.

In der Geometrie der Linienelemente des Raumes wird eine Curve als Ort von ∞^1 Linienelementen aufgefasst. Liegt eine *Monge'sche Gleichung*

$$\Omega(x, y, z;\ dx, dy, dz) = 0$$

vor, so giebt es unendlich viele Curven im Raume, deren Linienelemente diese Monge'sche Gleichung erfüllen. Diese Curven, in deren analytische Darstellung willkürliche Functionen eingehen, und deren Betrachtung bis auf Monge zurückgeht, nennen wir *Integralcurven der Monge'schen Gleichung.*

Eine ganz besondere Bedeutung hat der Fall, dass die Monge'sche Gleichung linear in dx, dy, dz ist:

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0.$$

Solche Gleichungen, die wir *Pfaff'sche Gleichungen* nennen, da ihre allgemeine Theorie auf Pfaff zurückgeht, sind zwar formell nur Specialfälle von Monge'schen Gleichungen. Aber sie sind doch so wesentlich verschieden von allen anderen Monge'schen Gleichungen und ihre Bedeutung ist so gross, dass man die Begriffe Monge'sche Gleichung und Pfaff'sche Gleichung gewissermassen als gleichberechtigt *neben* einander statt unter einander anzuordnen hat.

Unter den Monge'schen und Pfaff'schen Gleichungen sind ganz besonders wichtig diejenigen, unter deren Integralcurven ∞^3 Geraden enthalten sind. Dies führt uns zu dem von Plücker eingeführten Begriff *Liniencomplex* und insbesondere zu den *linearen Liniencomplexen*, die in Verbindung mit den *Nullsystemen* von Möbius eingehend behandelt werden. Unter den nicht-linearen Complexen werden wir besonders den sogenannten *tetraedralen Complex* untersuchen.

Die *Liniengeometrie*, die hiermit eng zusammenhängt und die insbesondere von Plücker begründet wurde, hat vielfache Berührungspunkte mit der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Man darf deshalb nicht übersehen, dass die Liniengeometrie sozusagen ein Teil der Theorie der Differentialgleichungen ist, wenn sie auch natürlich auf der anderen Seite ein hervorragendes und selbständiges geometrisches Interesse darbietet.

Wenn wir nun in diesem Abschnitte eine Geometrie der Linienelemente und im dritten Abschnitte eine Geometrie der Flächenelemente entwickeln, so müssen wir hervorheben, dass diese Theorien in erster Linie *Transformationstheorien* der Linien- bez. Flächenelemente sind. Wir betrachten im gegenwärtigen Abschnitt die Transformationen der Linienelemente des Raumes, welche die Linienelemente einer jeden Curve in die einer Curve überführen. Dabei ergiebt sich, dass alle derartige Transformationen die Linienelemente eines Punktes in die eines Punktes verwandeln, also *Punkt*transformationen sind. Wenn man übrigens solche Transformationen ins Auge fasst, die sich auf die Linienelemente einer vorgelegten Monge'schen Gleichung beschränken, so erkennt man, dass es Transformationen dieser ∞^4 Linienelemente giebt, die keine Punkttransformationen sind, doch aber jede Integralcurve in eine Integralcurve verwandeln.

Die Punkttransformationen des Raumes kann man auch auf *Monge'sche Ausdrücke* $\Omega(x, y, z; dx, dy, dz)$ anwenden, die natürlich in dx, dy, dz homogen sein müssen. Dies führt zu Theorien, die von Gauss und Riemann und ihren Nachfolgern aufgestellt wurden. Wir gehen auf diese allgemeinen Theorien hier nicht ein, beschränken uns vielmehr auf specielle Betrachtungen, die ein hervorragend geometrisches Interesse darbieten.

Wir werden ferner dazu geführt, ganz besonders die *logarithmische Abbildung*

$$\mathfrak{x} = \lg x, \quad \mathfrak{y} = \lg y, \quad \mathfrak{z} = \lg z$$

des Raumes (x, y, z) zu studieren. Sie stellt eine Beziehung zwischen zwei wichtigen Monge'schen Gleichungen her und liefert merkwürdige

Zusammenhänge zwischen verschiedenen Gebieten der Liniengeometrie sowie der Infinitesimalgeometrie. Insbesondere werden wir dabei den *Translationsflächen* begegnen.

Die hier flüchtig angedeuteten Untersuchungen, die der zweite Abschnitt bringen soll, gehen durch naturgemässe Verallgemeinerung eines Teiles der Entwickelungen des ersten Abschnittes auf den Raum hervor. Es ist nun aber ausserordentlich bedeutsam, dass auch ein zweiter, ganz anderer Zusammenhang zwischen diesen beiden Theorien besteht. Diesen Zusammenhang, der nachher ausführlich dargestellt wird, deuten wir hier nur in aller Kürze an:

Da das Linienelement der Ebene von drei Coordinaten x, y, p abhängt, so ist die Geometrie der Linienelemente der Ebene factisch die Geometrie eines dreidimensionalen Raumes (x, y, p). Deuten wir x, y, p als Punktcoordinaten im Raume, wie wir dies schon gelegentlich in § 3 des 4. Kap. (S. 108 u. f.) gethan haben, so wird jedes Linienelement der Ebene als ein Punkt im Raume abgebildet, jede Schar von ∞^1 Linienelementen der Ebene ferner als eine Curve im Raume. Insbesondere wird jeder Elementverein der Ebene im Raume (x, y, p) abgebildet als eine Integralcurve der Pfaff'schen Gleichung

$$dy - p\,dx = 0.$$

Demgemäss ist das geometrische Bild einer Berührungstransformation der Ebene im Raume eine solche Punkttransformation, die jede Integralcurve dieser Pfaff'schen Gleichung in eine ebensolche überführt, die also diese Pfaff'sche Gleichung invariant lässt.

Schliesslich werden wir zeigen, dass man die soeben erwähnte Pfaff'sche Gleichung in die eines linearen Liniencomplexes überführen kann. Damit ist alsdann jedem Elementverein der Ebene, also jeder Curve der Ebene, eine Curve zugeordnet, deren Tangenten Geraden des linearen Complexes sind. Man kann es so einrichten, dass jedem Kreise der Ebene eine Gerade des linearen Complexes entspricht. Dies liefert uns alsdann eine Reihe äusserst interessanter Beziehungen zur Geometrie der Kreise der Ebene, zu einer Theorie also, die wir schon in § 3 des 5. Kap. (S. 150) flüchtig gestreift haben.

Doch es erscheint unzweckmässig, in dieser Einleitung den Inhalt des gegenwärtigen Abschnittes in weiterem Massstabe vorweg anzudeuten.

Kapitel 6.

Die Pfaff'schen Gleichungen und die Nullsysteme.

Indem wir dazu übergehen, im gegenwärtigen zweiten Abschnitt eine Geometrie der Linienelemente des Raumes zu entwickeln, werden wir in diesem Kapitel ein *Bindeglied zwischen dem ersten und zweiten Abschnitt* geben.

Vom rein formellen Standpunkt aus gesehen stellen wir hier die allgemeine Theorie der linearen totalen Differentialgleichungen

$$X(x, y, z)\,dx + Y(x, y, z)\,dy + Z(x, y, z)\,dz = 0$$

dar. Diese Gleichungen bezeichnen wir in Hinblick auf Pfaff, der die entsprechende Theorie in n Veränderlichen geschaffen hat, als *Pfaff'sche Gleichungen.* Bei unserer Betrachtungsweise spielen aber diese Pfaff'schen Gleichungen eine mehrfache Rolle:

Bei Zugrundelegung der Pfaff'schen Gleichung

$$dy - p\,dx = 0$$

und Deutung von x, y, p als Punktcoordinaten des Raumes entwickeln wir *zunächst* eine folgerichtige Auffassung der im ersten Abschnitt gegebenen *Theorie der Linienelemente der Ebene als einer Geometrie des dreidimensionalen Raumes.* Dem Linienelement in der Ebene entspricht dabei im Raume der Punkt, einer Schar von ∞^1 Linienelementen der Ebene eine Curve des Raumes, insbesondere einem Elementverein der Ebene eine Integralcurve der erwähnten Pfaff'schen Gleichung im Raume. *Jeder Berührungstransformation der Ebene entspricht im Raume eine Punkttransformation, bei der die angegebene Pfaff'sche Gleichung invariant bleibt.*

Die gründliche Darstellung der hiermit angedeuteten Beziehungen stellt das Band dar, durch das hier an den ersten Abschnitt zunächst angeknüpft wird.

Auf der anderen Seite dient dies Kapitel zur *Einführung in die Geometrie der Linienelemente des Raumes.* Wir werden, wie schon erwähnt, Scharen von Linienelementen des Raumes (x, y, z) betrachten, solche Gebilde also, die durch eine oder mehrere Gleichungen zwischen x, y, z, $dx : dy : dz$ analytisch dargestellt werden. Hier nun, im gegenwärtigen Kapitel, betrachten wir insbesondere diejenigen Scharen von Linienelementen, die durch eine in dx, dy, dz *lineare* Gleichung, also durch eine *Pfaff'sche Gleichung*

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

definiert werden. Insbesondere wird uns die Reduction solcher Pfaff'scher Gleichungen und der *Pfaff'schen Ausdrücke*

$$Xdx + Ydy + Zdz$$

auf canonische Formen beschäftigen.

Die in der Geometrie längst untersuchten unter den Namen *Nullsysteme* und *lineare Complexe* bekannten Gebilde lassen sich durch Pfaff'sche Gleichungen definieren von der besonderen Form

$$A(ydz - zdy) + B(zdx - xdz) + C(xdy - ydx) + \\ + Ddx + Edy + Gdz = 0.$$

Das Studium dieser Gebilde wird daher eine Aufgabe des gegenwärtigen Kapitels sein.

Schliesslich werden wir eine wichtige Beziehung zwischen den Linienelementen der Ebene und der Pfaff'schen Gleichung eines linearen Complexes herstellen und dadurch abermals an die Theorien des ersten Abschnittes anknüpfen. Bei dieser Beziehung entspricht — um hier nur einiges vorweg anzudeuten — dem Linienelement in der Ebene der Punkt des Raumes, dem Elementverein der Ebene eine Curve des linearen Complexes, insbesondere den Linienelementen eines Kreises eine Complexgerade.

§ 1. Deutung der Gleichung $dy - pdx = 0$ im Raume.

Deutung d. Linienelem. als Pkte. des Raumes.

Sind x, y, p die Coordinaten eines *Linienelementes* der (xy)-Ebene, so wird ein Elementverein nach § 1 des 2. Kap. definiert als eine Schar von Linienelementen, die der Gleichung

$$dy - pdx = 0$$

genügen. Gelegentlich, in § 3 des 4. Kap. (S. 108), haben wir schon x, y, p als gewöhnliche *Punkt*coordinaten im Raume gedeutet. Diese Deutung werden wir hier consequent durchführen*).

Bei dieser Deutung wird jedes Linienelement (x, y, p) der (xy)-Ebene in einen Punkt im Raume (x, y, p) abgebildet. Um den Bildpunkt des Elementes (x, y, p) zu erhalten, errichten wir (vgl. Fig. 37 (S. 183)) im Punkte des Elementes das Lot auf die (xy)-Ebene und tragen auf

*) Die in diesem Paragraphen entwickelten *Anschauungen* spielen eine wichtige Rolle in Lie's älteren Untersuchungen. Vgl. Göttinger Nachrichten, Dec. 1874, S. 536—538, sowie ganz besonders Archiv for Math. og Naturv., Christiania, Bd. 3, S. 403 u. f. (1878). Wir werden später sehen, dass diese Anschauungen implicite schon in seinen Arbeiten aus den Jahren 1871 und 1872 verwertet wurden. (Vgl. Math. Annalen 5. B., S. 163, Zeile 5.)

dem Lot den Wert von p als Strecke ab. Der Endpunkt des Lotes ist der gesuchte *Bildpunkt.*

Umgekehrt gehört dann auch zu jedem Punkte (x, y, p) des Raumes ein Linienelement der (xy)-Ebene. Einer beliebigen Raumcurve als Ort von ∞^1 Punkten entspricht also in der Ebene eine Schar von ∞^1 Linienelementen. Diese Schar wird aber im allgemeinen keinen Elementverein vorstellen. Betrachten wir in der (xy)-Ebene einen Elementverein. Nach § 1 des 2. Kap. (S. 38) besteht der Verein entweder aus allen Linienelementen eines Punktes (x, y) oder aus allen Linienelementen einer Curve der Ebene. Im ersteren Falle sind die Bildpunkte der Linienelemente die Punkte der Geraden, die im Punkte (x, y) auf der (xy)-Ebene senkrecht steht. Wir können also sagen: Ein derartiger Elementverein wird in ein Lot zur (xy)-Ebene abgebildet. Im anderen Falle, wenn der Verein aus allen Elementen einer Curve der (xy)-Ebene besteht, haben wir, um die Bildpunkte dieser Elemente zu finden, in jedem Punkte der Curve das Lot zur Ebene zu errichten und darauf als Ordinate die Tangentialneigung p abzutragen. Der Ort der Endpunkte ist also eine gewisse Curve, die auf dem senkrechten Cylinder liegt, dessen Basis die gegebene Curve in der (xy)-Ebene ist.

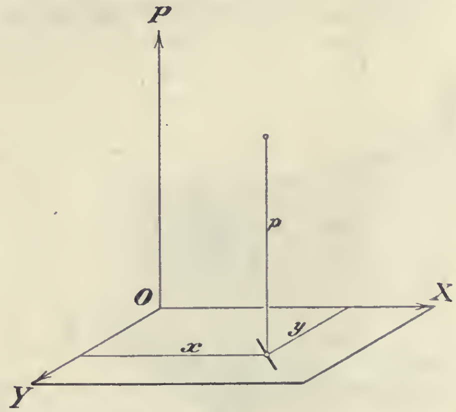

Fig. 37.

Bildcurven d. Elementvereine.

Jedem Elementverein der (xy)-Ebene entspricht also im Raume (x, y, p) eine Curve, aber umgekehrt entspricht nicht jeder Curve des Raumes eine Curve in der Ebene. Bis auf weiteres nennen wir die Curven des Raumes, die den Curven in der (xy)-Ebene entsprechen oder, allgemeiner gesagt, die den Elementvereinen der Ebene entsprechen, die *Bildcurven.*

Betrachten wir zwei Elementvereine der (xy)-Ebene: Die Elemente des einen seien die einer Curve c, die Elemente des anderen die einer Curve c'. (Siehe Fig. 38*) (S. 184).) *Schneiden* sich die Curven, so

---

*) Die folgenden Figuren sind nur schematische Darstellungen, in denen es des besseren Verständnisses halber vermieden wurde, Flächen unterhalb der (xy)-Ebene zu zeichnen.

haben sie im Schnittpunkte verschiedene Linienelemente. Die Bildpunkte dieser beiden Elemente liegen somit verschieden hoch. Die beiden Bildcurven c_1 und c_1' im Raume haben also keinen Punkt gemein. Wenn sich aber die beiden Curven c und c' *berühren* (vgl. Fig. 39),

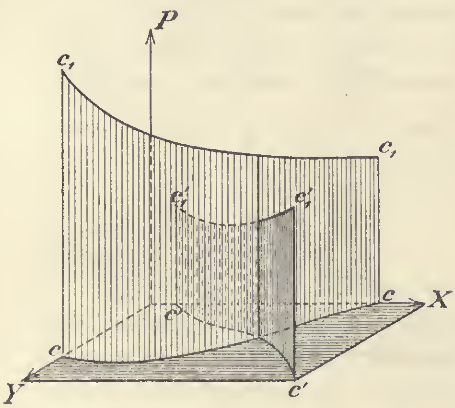

Fig. 38.

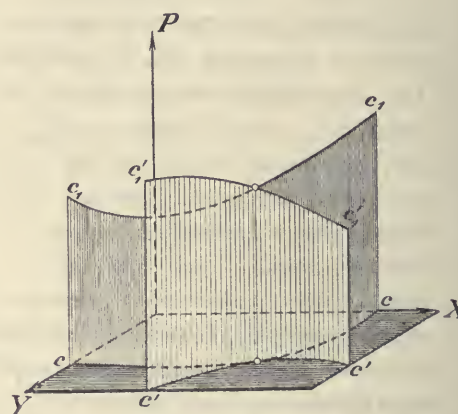

Fig. 39.

so haben die beiden Vereine im Berührpunkt ein Element gemein. Das Bild dieses Elementes ist ein Punkt. Also *schneiden* sich die Bildcurven c_1 und c_1' in einem Punkte. Allgemeiner können wir sagen: Zwei Elementvereine, die ein Element gemein haben, bilden sich ab als einander schneidende Curven, indem wir den Fall, dass der eine Verein etwa ein Punkt ist, sich daher als Lot abbildet, mitberücksichtigen.

Wenn zwei Curven in der (xy)-Ebene einander in zweiter Ordnung berühren, also *osculieren*, so haben sie *zwei consecutive Linienelemente* gemein. Die Bildcurven haben dementsprechend *zwei consecutive Punkte* gemein. Wenn wir auch im *Raume* den Inbegriff eines Punktes

Linienelement im Raume. und einer hindurchgehenden Geraden als ein *Linienelement* bezeichnen, also auch eine Curve im Raume als eine Schar von ∞^1 Linienelementen auffassen, so können wir in dem in Rede stehenden Fall sagen: *Die beiden Bildcurven haben ein Linienelement gemein.*

Allgemein: Berühren zwei Curven der (xy)-Ebene einander in n^{ter} Ordnung, so berühren ihre Bildcurven einander in $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung.

Betrachten wir nun in der (xy)-Ebene irgend eine Curve, d. h. einen Elementverein. Die Richtungscosinus der Tangente der Bildcurve sind proportional den Differentialen dx, dy, dp, um welche x, y, p längs der Curve wachsen. Da diese Differentiale die Gleichung

(1) $$dy - pdx = 0$$

erfüllen, so erkennen wir: Die durch einen Punkt (x, y, p) des Raumes gehenden Bildcurven haben in diesem Punkte Tangenten, die sämtlich in einer Ebene liegen, deren Richtungscosinus proportional $1, p, 0$ sind. *Diese Ebene steht auf der (xy)-Ebene senkrecht und schneidet sie in der Geraden des Linienelementes (x, y, p) der (xy)-Ebene.* (Siehe Fig. 40.) Die Bildcurven, die durch den Punkt (x, y, p) gehen, haben also in diesem Punkte *eine gemeinsame Tangentialebene*, sodass ihre Richtungen daselbst ein *Büschel* bilden.

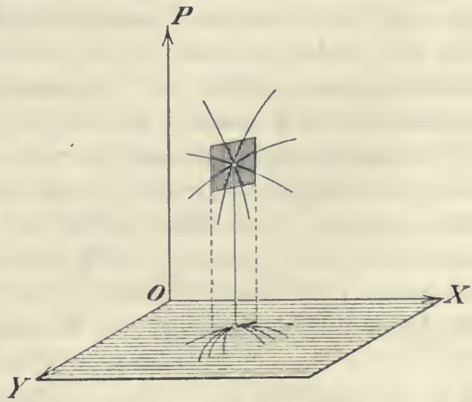

Fig. 40.

Hiermit ist jedem Punkte (x, y, p) des Raumes vermöge der Gleichung (1) eine gewisse Ebene senkrecht zur (xy)-Ebene zugeordnet. Um sich einen Überblick über diese Zuordnung zu verschaffen, muss man beachten, dass allen Punkten in gleicher Höhe über der (xy)-Ebene parallele Ebenen zugeordnet sind. Wir können auch sagen:

Die Gleichung

$$dy - pdx = 0$$

ordnet jedem Punkte (x, y, p) des Raumes ein gewisses ebenes Büschel von Fortschreitungsrichtungen oder Linienelementen im Raume zu. Wir nennen die Gleichung **Zuordg. eines Büschels zu jedem Pkt. des Raumes.**

$$dy - pdx = 0$$

eine (specielle) *Pfaff'sche Gleichung*, eine Bezeichnung, die oben in der Einleitung begründet wurde. **Pfaff'sche Gleichg.**

Wenn eine Raumcurve in jedem ihrer Punkte (x, y, p) die dem Punkte zugeordnete Ebene berührt, so erfüllt sie die Gleichung

(1) $$dy - pdx = 0.$$

Ihre Projection auf die (xy)-Ebene ist daher eine Curve, die im Punkte (x, y) die Tangentialrichtung $\frac{dy}{dx} = p$ besitzt, d. h. die Punkte der Raumcurve sind die Bilder der Linienelemente ihrer Projection. Noch anders gesagt: Die Raumcurve ist die Bildcurve ihrer Projection.

Eine Raumcurve ist somit dann und nur dann Bildcurve eines Elementvereins der Ebene, wenn sie in jedem ihrer Punkte eine der Fortschreitungsrichtungen hat, die dem Punkte durch die Gleichung

$$dy - p dx = 0$$

zugeordnet wird.

Integral-curve der Pfaff'schen Gleichg.

Unter einer *Integralcurve der Pfaff'schen Differentialgleichung*

(1) $$dy - p dx = 0$$

verstehen wir nun eine solche Curve des Raumes (x, y, p), längs deren x, y, p Incremente erhalten, die der Gleichung (1) genügen. *Mithin sind die Bildcurven der Elementvereine der (xy)-Ebene weiter nichts als die Integralcurven der Pfaff'schen Differentialgleichung* (1): Anders ausgesprochen: Jede Integralcurve und sonst keine Curve ist Bildcurve ihrer Projection auf die (xy)-Ebene.

Geometrisch erhält man also eine allgemeine Integralcurve, indem man eine beliebige Curve in der (xy)-Ebene zieht und in ihren Punkten Lote errichtet, deren Länge gleich der Richtungsgrösse p in dem betreffenden Curvenpunkte ist. Die Endpunkte der Lote bilden dann die Integralcurve. Oder auch analytisch: Die allgemeinste Integralcurve der Differentialgleichung (1) im Raume wird gegeben durch:

$$y = \varphi(x), \quad p = \varphi'(x).$$

Nebenbei merken wir an, dass die Integralcurve algebraisch ist, sobald ihre Projection algebraisch ist, und umgekehrt.

Geradlinige Integral-curven.

Unter den Integralcurven finden sich insbesondere *Geraden*. Jeder Punkt der (xy)-Ebene hat nämlich zur Bildcurve, wie schon bemerkt wurde, eine Gerade vertical zur (xy)-Ebene. Ferner jede Gerade der (xy)-Ebene hat zur Bildcurve augenscheinlich eine Parallelgerade, deren Projection sie ist, und die von der (xy)-Ebene den Abstand p hat, sobald p die Richtungsgrösse der gegebenen Geraden bedeutet. Da es ∞^2 Geraden in der Ebene giebt, so sehen wir folglich:

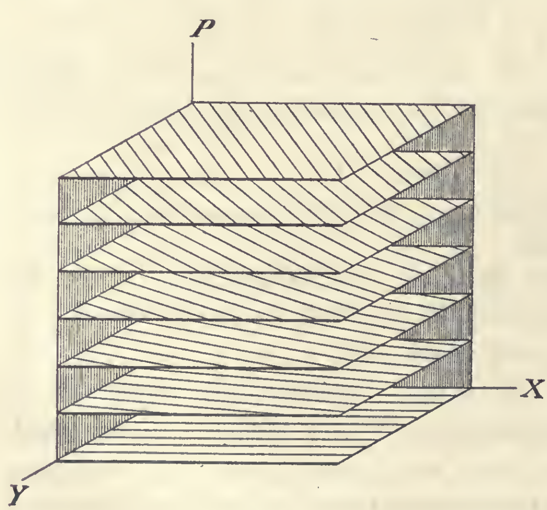

Fig. 41.

Unter den Integralcurven der Pfaff'schen Gleichung (1) befinden sich zwei Scharen von ∞^2 Geraden: Einerseits alle Geraden senkrecht zur (xy)-Ebene, andererseits gewisse ∞^2 Geraden parallel der (xy)-Ebene. (Letztere in Fig. 41 (S. 186) angedeutet.) Für die ersteren Geraden ist $dx = dy = 0$. Sie stellen also solche Integralcurven dar, für die jeder Term der Pfaff'schen Gleichung (1) einzeln verschwindet. Anders verhält es sich mit jenen ∞^2 Geraden parallel der (xy)-Ebene.

Offenbar giebt es ausser den genannten Geraden keine Integralgerade. Soll nämlich eine Gerade Bildcurve sein, so ist sie Bildcurve ihrer Projection auf die (xy)-Ebene, daher Bildcurve einer Geraden. Aber nur jene ∞^2 Geraden parallel der (xy)-Ebene sind die Bildcurven der ∞^2 Geraden der (xy)-Ebene. Durch jeden Punkt des Raumes geht eine und nur eine dieser ∞^2 Geraden, nämlich die Schnittgerade der Ebene durch den Punkt parallel zur (xy)-Ebene mit der Ebene, die dem Punkt durch die Pfaff'sche Gleichung zugeordnet ist. In einer allgemein gewählten Ebene ferner liegt auch nur eine dieser ∞^2 Geraden, nämlich in *der* Höhe p über der (xy)-Ebene, die gleich der Richtungsgrösse jener Geraden ist, in der die gewählte Ebene die (xy)-Ebene schneidet. Endlich sieht man noch: alle diese ∞^2 Geraden gehen, da sie der (xy)-Ebene parallel sind, durch die unendlich ferne Gerade der (xy)-Ebene.

Hier möge etwas eingeschaltet werden, auf das wir später zurückkommen: Eine durch algebraische Gleichungen definierte Schar von ∞^2 Geraden des Raumes, die so liegen, dass einerseits durch jeden allgemein gewählten Punkt eine und nur eine Gerade der Schar geht, und andererseits in jeder allgemein gewählten Ebene eine und nur eine Gerade der Schar liegt, heisst ein *Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe.* Z. B. alle Geraden, die zwei feste Geraden l_1, l_2 schneiden, bilden ein Strahlensystem erster Ordnung und Classe, denn durch einen beliebigen Punkt geht nur eine Gerade, die l_1 und l_2 trifft, und in einer beliebigen Ebene liegt auch nur eine Gerade, die l_1 und l_2 trifft. Wir werden später sehen, dass *jedes* Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe aus allen Geraden besteht, die gewisse zwei Geraden l_1, l_2 schneiden. Wenn insbesondere diese beiden Geraden l_1, l_2 einander unendlich nahe rücken, ohne sich zu schneiden, so heisst das Strahlensystem ein *specielles Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe.* Durchläuft ein Punkt p_1 die Gerade l_1, so beschreibt die Ebene durch p_1 und l_2 ein Ebenenbüschel, das zur Punktreihe p_1 bekanntlich projectiv ist. Ein specielles Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe besteht also aus ∞^1 Strahlenbüscheln, deren Scheitel auf einer Geraden l_1 liegen und deren Ebenen projectiv auf die Punktreihe der Scheitel bezogen sind.

Strahlensystem 1. O. u. 1. Cl.

Specielles Strahlensyst. 1. O. u. 1. Cl.

Die obigen ∞^2 Geraden (in Fig. 41) bilden nun ein specielles Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe, denn in jeder Ebene parallel der (xy)-Ebene liegt ein Büschel solcher Strahlen, nämlich ein Büschel von Parallelstrahlen, und der unendlich ferne Scheitel dieses Büschels liegt in der Richtung, die durch die zugehörige Richtungsgrösse p angegeben wird. p giebt aber zugleich die Höhe der betreffenden Ebene über der (xy)-Ebene an. Mithin sind die ∞^1 Ebenen der Büschel in der That projectiv auf die Scheitel der Büschel, nämlich auf die unendlich fernen Punkte der (xy)-Ebene bezogen.

Integralcurven auf geg. Fläche.

Kehren wir zu den allgemeinen Integralcurven der Pfaff'schen Gleichung (1) zurück. Liegt eine beliebige Fläche

$$F(x, y, p) = 0 \tag{2}$$

vor, so enthält sie ∞^1 Integralcurven, denn in jedem Punkte der Fläche wird das Büschel der Tangentenrichtungen von dem ebenen Büschel, das dem Punkte vermöge (1) zugeordnet ist, in einer Richtung geschnitten. Jedem Punkte der Fläche (2) wird hiermit eine Fortschreitungsrichtung auf der Fläche zugeordnet. Es giebt ∞^1 Curven c auf der Fläche, deren Fortschreitungsrichtungen gerade diese sind, und *dies sind die auf der Fläche liegenden ∞^1 Integralcurven der Pfaff'schen Gleichung* (1). (Siehe Fig. 42.)

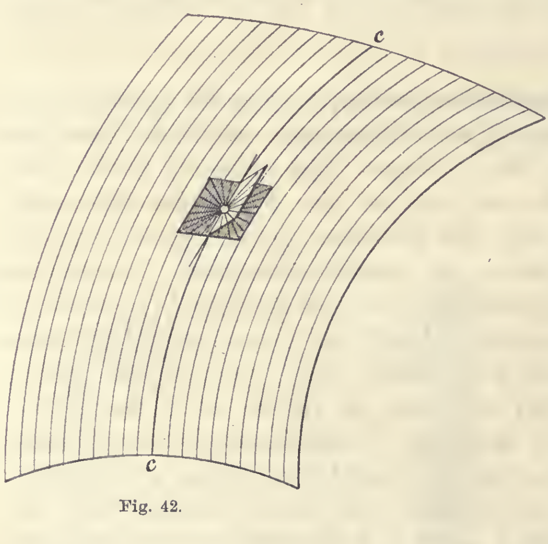

Fig. 42.

Das Problem, die auf der Fläche (2) liegenden Integralcurven zu finden, deckt sich mit dem, die Projectionen dieser Curven auf die (xy)-Ebene zu bestimmen. Dies aber kommt darauf hinaus, *die Differentialgleichung erster Ordnung in x, y*

Gew. Diffgl. 1. O. in x, y.

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \tag{3}$$

zu integrieren. Also auch:

Das Integrationsproblem einer beliebigen gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung in x, y

(3) $$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

kommt darauf hinaus, alle auf der Fläche

(2) $$F(x, y, p) = 0$$

des Raumes (x, y, p) *gelegenen Integralcurven der Pfaff'schen Gleichung* (1) *zu bestimmen.*

So wird jeder gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung in x, y eine Fläche im Raume zugeordnet, und umgekehrt.

1. Beispiel: Ist die Differentialgleichung (3) eine Gleichung zweiten Grades in $x, y, \frac{dy}{dx}$, so handelt es sich darum, die auf einer gewissen Fläche zweiten Grades gelegenen Integralcurven der Pfaff'schen Gleichung (1) zu finden. **Beispiele.**

2. Beispiel: Liegt eine lineare Differentialgleichung vor:

$$\frac{dy}{dx} - y\lambda(x) - \mu(x) = 0,$$

so ist die zugehörige Fläche:

$$p - y\lambda(x) - \mu(x) = 0$$

eine Regelfläche, deren Erzeugende der (yp)-Ebene parallel sind.

3. Beispiel: Eine Riccati'sche Gleichung

$$\frac{dy}{dx} - y^2\lambda(x) - y\mu(x) - \nu(x) = 0$$

liefert eine Fläche, deren Schnitte mit den Ebenen $x =$ Const. Parabeln sind, deren Axen der p-Axe parallel laufen.

4. Beispiel: Ist die Fläche eine Ebene (vgl. Fig. 43), so schneiden die in ihr befindlichen Integralcurven jede Parallele zur (xy)-Ebene in gleicher Richtung, da die Lage des dem Punkte (x, y, p) vermöge der Pfaff'schen Gleichung (1) zugeordneten Büschels nur von p abhängt. Hieraus folgert man, dass die Schar der Integralcurven in dieser Ebene und also auch die ihrer Projectionen eine infinitesimale Translation gestattet in der Richtung der Geraden, in der die Ebene von der (xy)-Ebene geschnitten wird. In der That gestattet die Differentialgleichung

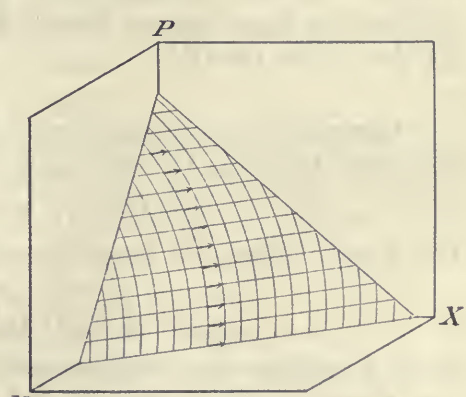

Fig. 43.

$$\frac{dy}{dx} + ax - by - c = 0$$

die infinitesimale Translation

$$\delta x = b\delta t, \quad \delta y = a\delta t.$$

Diffgl. frei von p.

5. Beispiel: Wenn die vorgelegte Differentialgleichung (3) frei von $\frac{dy}{dx}$ ist, so ist die zugehörige Fläche eine Cylinderfläche, deren Mantellinien der p-Axe parallel laufen. (Siehe Fig. 44.) Auf diesem Cylinder sind die Mantellinien Integralcurven. Aber es giebt noch eine isolierte Integralcurve: Wenn sich nämlich ein Punkt längs der Mantellinie bewegt, so dreht sich die dem Punkte durch die Pfaff'sche Gleichung zugeordnete Ebene um die Mantellinie, da sich p ändert. Einmal wird sie den Cylinder berühren. Somit liegt auf jeder Mantellinie ein Punkt, dessen sämtliche Tangentenrichtungen der Pfaff'schen Gleichung genügen. Der Ort dieser Punkte ist eine Integralcurve der Pfaff'schen Gleichung. Sie ist die Bildcurve c_1 der Grundcurve c des Cylinders, während die Mantellinien selbst die Bildcurven ihrer Fusspunkte sind. Also ergiebt sich: Eine Gleichung zwischen x, y:

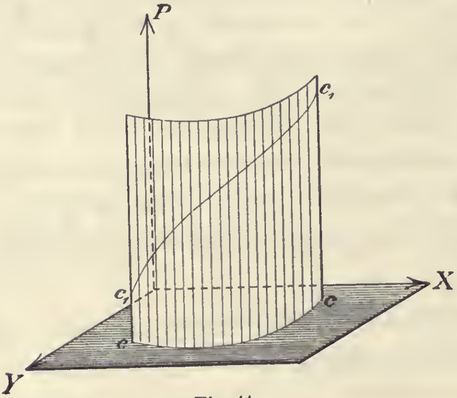

Fig. 44.

$$F(x, y) = 0,$$

aufgefasst als Differentialgleichung, besitzt als Integralgebilde alle Punkte der durch sie dargestellten Curve sowie als singuläres Integralgebilde diese Curve selbst. Hiermit decken sich die Betrachtungen in § 2 des 2. Cap. (S. 41).

Betrachten wir eine gegebene Schar von ∞^1 Integralcurven der Pfaff'schen Gleichung (1). Sie bilden eine Fläche, deren Gleichung sei:

$$F(x, y, p) = 0.$$

Wir kennen alsdann ∞^1 Integralcurven der Differentialgleichung

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

in x, y, nämlich die Projectionen der gegebenen Curven auf die (xy)-Ebene:

$$\omega(x, y, a) = 0 \qquad (a = \text{Const.}).$$

Singul. Lösung d. Diffgl.

Besitzt die Differentialgleichung $F = 0$ eine *singuläre* Lösung, so findet man sie bekanntlich durch Differentiation. Sie wird nämlich durch den Elementverein der (xy)-Ebene dargestellt, dessen Punktort durch Elimination von a aus

$$\omega(x, y, a) = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial a} = 0$$

hervorgeht. Dieser Elementverein besitzt eine Bildcurve auf der Fläche $F = 0$. Wohlbemerkt darf man aber nicht folgern, dass diese Bildcurve die gegebenen ∞^1 Integralcurven auf der Fläche $F = 0$ umhüllt, obgleich dies für die Projectionen auf die (xy)-Ebene der Fall ist, da dem Berühren in der (xy)-Ebene nur das Schneiden im Raume entspricht. (Vgl. S. 184.) In jedem Punkte der Bildcurve der singulären Lösung werden demnach zwei Tangentenrichtungen der Fläche vorhanden sein, welche zu jenen Richtungen gehören, die dem betreffenden Punkte durch die Pfaff'sche Gleichung zugeordnet sind, nämlich die Richtung der Bildcurve der singulären Lösung und die der gegebenen Integralcurve durch den Punkt. Also wird in jedem Punkte der Bildcurve der singulären Lösung die Tangentenebene der Fläche auf der (xy)-Ebene senkrecht stehen. Diese Curve ist somit die Berührcurve des um die Fläche gelegten verticalen Cylinders.

Umgekehrt, wenn eine beliebige Fläche im Raume (x, y, p) vorgelegt wird:

$$F(x, y, p) = 0,$$

so wird zwar der verticale Cylinder, der die Fläche umhüllt, eine Curve auf der Fläche bestimmen, aber diese Curve ist im allgemeinen keine Bildcurve, denn auf einem gegebenen verticalen Cylinder liegt ja nach dem Obigen (vgl. Fig. 44) nur eine ganz bestimmte krumme Bildcurve. Unsere Betrachtungen zeigen also:

Giebt man ∞^1 Integralcurven der Pfaff'schen Gleichung (1), d. h. giebt man ∞^1 Curven in der (xy)-Ebene:

$$\omega(x, y, a) = 0,$$

so giebt es allerdings im allgemeinen eine singuläre Lösung der von diesen Curven erfüllten Differentialgleichung erster Ordnung in x, y.

Wird dagegen von vornherein eine Differentialgleichung erster Ordnung in x, y gegeben:

$$F(x, y, y') = 0,$$

so besitzt sie im allgemeinen keine singuläre Lösung.

Diesen aus der Theorie der Differentialgleichungen bekannten Unterschied machen die vorstehenden Betrachtungen anschaulich klar.

Betrachten wir nunmehr irgend eine *Berührungstransformation in der (xy)-Ebene*. Sie transformiert die Linienelemente unter einander Berührgstrf. d. Ebene.

und führt jeden Elementverein der Ebene wieder in einen Elementverein über. Da nun jedes Linienelement als Punkt im Raume (x, y, p) abgebildet ist, so folgt, dass die Berührungstransformation durch die Abbildung in eine *Punkttransformation des Raumes* (x, y, p) übergeht, *bei der jede Integralcurve der Pfaff'schen Gleichung* (1) *wieder in eine solche verwandelt wird.* Dies erhellt auch analytisch daraus, dass die Pfaff'sche Gleichung (1) bei der Berührungstransformation invariant bleibt.

Ihr Bild im Raume.

Wenn wir, wie schon gelegentlich oben (S. 184), auch im Raume von Linienelementen sprechen wollen, also wie S. 185 sagen, die Pfaff'sche Gleichung ordne jedem Punkt des Raumes ein Büschel von Linienelementen zu, so können wir uns auch so ausdrücken: Jede Berührungstransformation der Ebene geht durch die Abbildung in eine solche *Punkttransformation des Raumes* (x, y, p) über, *welche alle Linienelemente der Pfaff'schen Gleichung* (1) *unter einander vertauscht. Umgekehrt:* Jede Punkttransformation des Raumes (x, y, p), die alle Linienelemente der Pfaff'schen Gleichung (1) unter einander vertauscht, lässt an sich die Gleichung (1) invariant und stellt also in der (xy)-Ebene eine Berührungstransformation dar.

Berührtrf. ausgef. auf Diffgl. 1. O.

Im ersten Abschnitt (§ 3 des 2. Kap., S. 46) sprachen wir davon, dass eine Berührungstransformation, die eine Differentialgleichung erster Ordnung

$$F(x, y, p) = 0$$

in x, y in eine neue Gleichung

$$F_1(x_1, y_1, p_1) = 0$$

überführt, gleichzeitig die Integralgebilde der Gleichung $F = 0$ in die der Gleichung $F_1 = 0$ verwandelt. Dies können wir natürlich auch durch Betrachtungen im Raume ableiten. Vielleicht wird diese Entwickelung für den einen oder anderen Leser sogar anschaulicher sein, wenn sie auch umständlicher ist: Eine Berührungstransformation der Ebene liefert im Raume eine Punkttransformation, die jede Integralcurve der Pfaff'schen Gleichung (1) in eine ebensolche überführt. Geht nun bei einer solchen Punkttransformation die *Fläche* $F(x, y, p) = 0$ in die Fläche $F_1(x_1, y_1, p_1) = 0$ über, so werden die auf der ersteren Fläche gelegenen Integralcurven der Pfaff'schen Gleichung verwandelt in die auf der letzteren Fläche gelegenen Integralcurven. Dies Ergebnis ist nichts anderes als die bildliche Auffassung des soeben angegebenen Satzes über Differentialgleichungen erster Ordnung in x, y.

§ 2. Reduction Pfaff'scher Gleichungen und Ausdrücke auf Normalformen.

Von jetzt ab wollen wir die rechtwinkligen Punktcoordinaten im Raume wie gebräuchlich mit x, y, z bezeichnen.

Eine Gleichung von der Form

$$X(x, y, z)\, dx + Y(x, y, z)\, dy + Z(x, y, z)\, dz = 0 \tag{4}$$

ist eine *totale Differentialgleichung* in x, y, z. Wir wollen sie eine *Pfaff'sche Gleichung* nennen*). Sie ordnet jedem Punkt (x, y, z) allgemeiner Lage im Raume ein Büschel von ∞^1 Fortschreitungsrichtungen $(dx : dy : dz)$ zu, die in einer Ebene liegen, nämlich in der Ebene: **Allgem. Pfaff'sche Gleichung.**

$$X(\mathfrak{x} - x) + Y(\mathfrak{y} - y) + Z(\mathfrak{z} - z) = 0$$

mit den laufenden Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$. Wenn wir wie oben (S. 184) auch im Raume den Begriff: Linienelement benutzen, so können wir sagen: Die Pfaff'sche Gleichung (4) ordnet jedem Punkte (x, y, z) des Raumes ein ebenes Büschel von Linienelementen zu. Eine Curve, die in jedem ihrer Punkte eine der Fortschreitungsrichtungen oder Linienelemente hat, die dem betreffenden Punkte zugeordnet sind, heisst nach Monge eine *Integralcurve* der Differentialgleichung (4). Die Integralcurven sind also die Curven, die in jedem ihrer Punkte die Ebene, die dem Punkte zugeordnet ist, zur Tangentialebene haben, anders ausgesprochen: *Integralcurven einer Pfaff'schen Gleichung heissen alle Curven, deren Linienelemente diese Gleichung erfüllen.* Fasst man eine ganz beliebige Fläche ins Auge, so wird sie in jedem ihrer Punkte von dem ebenen Büschel, das dem Punkte zugeordnet ist, im allgemeinen in einer Richtung geschnitten. Die Pfaff'sche Gleichung ordnet also jedem Punkte der Fläche *eine* Fortschreitungsrichtung *auf der Fläche* zu. Diese Fortschreitungsrichtungen definieren ∞^1 Curven auf der Fläche, die in jedem ihrer Punkte die betreffende Richtung als Tangentenrichtung besitzen. *Auf jeder Fläche allgemeiner Lage liegen also ∞^1 Integralcurven der Pfaff'schen Gleichung* (4).

Hieraus folgt, dass die Schar aller Integralcurven der Pfaff'schen Gleichung nicht nur von einer endlichen Anzahl von Parametern abhängen kann, dass sie also nicht durch Gleichungen von der Form

$$y = \varphi(x, a_1 \dots a_r), \quad z = \psi(x, a_1 \dots a_r)$$

darstellbar sein kann, da sonst eine beliebige Fläche

*) Vgl. Pfaff's grundlegende Abhandlung: *Methodus generalis, aequationes differentiarum partialium ... complete integrandi*, Abhandlungen d. Berl. Academie 1814—15, S. 76.

$$\Omega(x, y, z) = 0$$

nicht einmal eine einzelne, geschweige denn ∞^1 Integralcurven enthalten würde.

Die endlichen Gleichungen der Schar aller Integralcurven enthalten vielmehr willkürliche Functionen.

Wenn z. B. die Pfaff'sche Gleichung (4) die besondere Form hat:

$$\varphi_x dx + \varphi_y dy + \varphi_z dz = 0,$$

in der also X, Y, Z gleich den partiellen Ableitungen einer Function $\varphi(x, y, z)$ nach x, y, z sind, so ist die dem Punkte (x, y, z) zugeordnete Ebene

$$\varphi_x(\mathfrak{x} - x) + \varphi_y(\mathfrak{y} - y) + \varphi_z(\mathfrak{z} - z) = 0$$

die Tangentenebene der durch den Punkt (x, y, z) hindurchgehenden Fläche

$$\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = \varphi(x, y, z).$$

Daraus folgt, dass jede beliebige Curve auf dieser Fläche eine Integralcurve ist. In diesem Beispiel wird also

$$\varphi(x, y, z) = \text{Const.}, \quad \psi(x, y, z) = \text{Const.}$$

stets eine Integralcurve darstellen, wie man auch die Function ψ gewählt haben mag.

Liegt eine allgemeine Pfaff'sche Gleichung vor:

$$(4) \qquad Xdx + Ydy + Zdz = 0,$$

Zwei Fälle. so sind *zwei Fälle* denkbar:

Denkt man sich nämlich alle diejenigen Integralcurven der Pfaff'schen Gleichung construiert, die durch einen bestimmt gewählten Punkt p von allgemeiner Lage gehen, so erhält man unendlich viele Integralcurven. Es ist nun möglich, dass alle diese unendlich vielen Curven auf ein und derselben durch den Punkt (x, y, z) gehenden Fläche gelegen sind, und dass dies stets eintritt, wie auch der Punkt p allgemeiner Lage gewählt werden mag. Es ist aber andererseits auch möglich, dass die durch den Punkt p gehenden Integralcurven keine derartige Lagerung haben, mit anderen Worten, dass sie keine Fläche, sondern einen Raum erfüllen. Diese beiden Fälle sind, wie einleuchtet, die beiden einzig denkbaren.

Wir wollen zunächst annehmen, dass der erste Fall eintrete, dass also die durch einen beliebig gewählten Punkt p allgemeiner Lage gehenden Integralcurven stets eine gewisse Fläche erfüllen. Alsdann ist jedem Punkte p von allgemeiner Lage eine durch ihn gehende Fläche zugeordnet. Wenn wir in dieser Fläche einen *beliebigen* Punkt q

ins Auge fassen, so sehen wir, dass durch ihn unendlich viele Integralcurven gehen, die von p auslaufen. Wäre dies nicht der Fall, so würde die Zahl der von p ausgehenden Integralcurven nur von einer endlichen Anzahl von Parametern abhängen, was dem früher Gesagten widerspricht. Nun aber ist nach Voraussetzung auch dem Punkte q eine durch ihn gehende Fläche derart zugeordnet, dass alle von q ausgehenden Integralcurven auf dieser Fläche verlaufen. Also erhellt, dass die dem Punkte q zugeordnete Fläche identisch mit der Fläche ist, die dem Punkte p zugeordnet ist. Je ∞^2 Punkten des Raumes ist somit dieselbe Fläche, eben die von ihnen gebildete Fläche, zugeordnet. Der ganze Raum zerfällt folglich in eine Schar von ∞^1 Flächen

$$\varphi(x, y, z) = \text{Const.}$$

dergestalt, dass alle durch einen Punkt des Raumes laufenden Integralcurven der Pfaff'schen Gleichung (4) auf der Fläche $\varphi = \text{Const.}$ verlaufen, die durch den betreffenden Punkt hindurch geht. Anders ausgedrückt: Jede Integralcurve der Pfaff'schen Gleichung (4) verläuft vollständig auf einer der Flächen:

$$\varphi(x, y, z) = \text{Const.}$$

In diesem Falle wird mithin das einem Punkte (x, y, z) vermöge der Pfaff'schen Gleichung (4) zugeordnete Büschel von Fortschreitungsrichtungen (x, y, z) vollständig in der durch den Punkt gehenden Fläche $\varphi = \text{Const.}$ liegen, d. h. die Differentiale dx, dy, dz, die der Gleichung (4) genügen, erfüllen auch die Gleichung

$$d\varphi \equiv \varphi_x dx + \varphi_y dy + \varphi_z dz = 0.$$

Daher haben wir erkannt:

Unsere frühere Teilung in zwei Fälle kommt analytisch auf die beiden Fälle zurück, dass entweder die Pfaff'sche Gleichung (4) auf die Form

$$d\varphi = 0$$

reduciert werden kann oder aber nicht.

Reduction auf die Form $d\varphi = 0$.

Ist die Pfaff'sche Gleichung (4) auf die Form

$$d\varphi = 0$$

reducibel, so kann dies vorerst so eintreten, dass ihre linke Seite direct gleich $d\varphi$, also dass

$$Xdx + Ydy + Zdz$$

ein vollständiges Differential ist. Dazu ist bekanntlich notwendig und hinreichend, dass die drei Relationen

$$Y_z - Z_y = 0, \quad Z_x - X_z = 0, \quad X_y - Y_x = 0 \tag{5}$$

identisch bestehen.

Aber allgemein ist die Pfaff'sche Gleichung (4), die wie $d\varphi = 0$ linear und homogen in dx, dy, dz ist, dann und nur dann reducibel auf die Form $d\varphi = 0$, wenn ihre linke Seite sich nur um einen von x, y, z abhängigen Factor $\Phi(x, y, z)$ von $d\varphi$ unterscheidet. Wir fragen daher nach den notwendigen und hinreichenden Kriterien dafür, dass zwei Functionen $\varphi(x, y, z)$ und $\Phi(x, y, z)$ vorhanden sind, für die identisch

$$Xdx + Ydy + Zdz = \Phi d\varphi$$

wird.

Diese Frage erledigen wir nach einander auf zwei Wegen. *Der erste Weg ist elementarer*, während der zweite, der sich auf die Theorie der vollständigen Systeme stützt, kürzer ist. Es bleibt dem Leser überlassen, welchen Weg er vorziehen will.

Um den ersten, elementareren Weg einzuschlagen, gehen wir davon aus, dass es stets eine Function ϱ giebt, für die $\varrho(Xdx + Ydy)$ das vollständige Differential einer Function Ω von x, y ist. Da X, Y noch z enthalten, so werden auch ϱ und Ω noch z enthalten. Es giebt also zwei Functionen $\varrho(x, y, z)$ und $\Omega(x, y, z)$, für die

$$\varrho(Xdx + Ydy) \equiv \Omega_x dx + \Omega_y dy \tag{6}$$

ist. Also ist, wenn ϱZdz beiderseits addiert wird:

$$\varrho(Xdx + Ydy + Zdz) \equiv d\Omega + (\varrho Z - \Omega_z)\, dz.$$

Unsere Frage kommt folglich darauf hinaus, zu fragen, welches die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür sind, dass es zwei Functionen $\varphi(x, y, z)$, $\Phi(x, y, z)$ gebe, für die

$$d\Omega + (\varrho Z - \Omega_z)\, dz \equiv \varrho \Phi d\varphi$$

wird. Links steht eine in den Differentialen $d\Omega$ und dz lineare homogene Function. Zum Bestehen einer Identität von vorstehender Form ist mithin *notwendig* und *hinreichend*, dass sich links der Coefficient $\varrho Z - \Omega_z$ als Function von Ω und z allein ausdrücken lässt, dass also

$$\varrho Z - \Omega_z = \omega(\Omega, z)$$

ist. Die drei Functionen Ω, z und $\varrho Z - \Omega_z$ müssen also von einander abhängig sein, d. h. es muss ihre Functionaldeterminante hinsichtlich x, y, z identisch verschwinden. Die notwendige und hinreichende Bedingung ist also diese:

$$\begin{vmatrix} \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ 0 & 0 & 1 \\ (\varrho Z - \Omega_z)_x & (\varrho Z - \Omega_z)_y & (\varrho Z - \Omega_z)_z \end{vmatrix} \equiv 0$$

oder, da nach (6) $\Omega_x \equiv \varrho X$, $\Omega_y \equiv \varrho Y$ ist, während ϱ nicht identisch Null ist:

$$\begin{vmatrix} X & Y \\ (\varrho Z - \Omega_z)_x & (\varrho Z - \Omega_z)_y \end{vmatrix} \equiv 0$$

oder, ausgerechnet:

$$\varrho \begin{vmatrix} X & Y \\ Z_x & Z_y \end{vmatrix} + Z \begin{vmatrix} X & Y \\ \varrho_x & \varrho_y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} X & Y \\ \Omega_{xz} & \Omega_{yz} \end{vmatrix} \equiv 0. \tag{7}$$

Da die linke Seite von (6) ein vollständiges Differential hinsichtlich x, y ist, so ist:

$$\frac{\partial(\varrho X)}{\partial y} \equiv \frac{\partial(\varrho Y)}{\partial x},$$

also

$$\begin{vmatrix} X & Y \\ \varrho_x & \varrho_y \end{vmatrix} \equiv \varrho(Y_x - X_y).$$

Wenn wir ferner in (7) für Ω_x und Ω_y die aus (6) folgenden Werte ϱX und ϱY einsetzen, so folgt als notwendige und hinreichende Bedingung diese:

$$\begin{vmatrix} X & Y \\ Z_x & Z_y \end{vmatrix} + Z(Y_x - X_y) - \begin{vmatrix} X & Y \\ X_z & Y_z \end{vmatrix} \equiv 0$$

oder schliesslich diese:

$$X(Y_z - Z_y) + Y(Z_x - X_z) + Z(X_y - Y_x) \equiv 0. \tag{8}$$

Nunmehr leiten wir dasselbe Kriterium auf dem zweiten Wege ab: Es handelt sich um das notwendige und hinreichende Kriterium dafür, dass eine Function $\varphi(x, y, z)$ existiere, für die identisch **Andere Ableitung desselben Ergebnisses.**

$$\frac{X}{\varphi_x} = \frac{Y}{\varphi_y} = \frac{Z}{\varphi_z}$$

ist. Es müsste also φ eine gemeinsame Lösung f der beiden linearen partiellen Differentialgleichungen in x, y, z sein:

$$\begin{cases} Uf \equiv X\dfrac{\partial f}{\partial y} - Y\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0, \\ Vf \equiv X\dfrac{\partial f}{\partial z} - Z\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Sie haben nach der Theorie der vollständigen Systeme dann und nur dann eine gemeinsame Lösung, wenn sie ein vollständiges System bilden, d. h. wenn sie die Gleichung

$$U(Vf) - V(Uf) = 0$$

nach sich ziehen. Diese lautet ausgerechnet (vgl. hierzu § 5 des 4. Kap., S. 123):

$$\{X(Y_z - Z_y) + YZ_x - ZY_x\}\frac{\partial f}{\partial x} +$$
$$+ (ZX_x - XX_z)\frac{\partial f}{\partial y} + (XX_y - YX_x)\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Diese Gleichung sollte also eine Folge der beiden Gleichungen (9) sein. Aber setzen wir hierin die aus (9) folgenden Werte von $\frac{\partial f}{\partial y}$ und $\frac{\partial f}{\partial z}$ ein, so ergiebt sich eine Gleichung, die nur $\frac{\partial f}{\partial x}$ als Factor enthält, der mit einem Coefficienten behaftet ist. Dieser Coefficient müsste also identisch Null sein. Er ist aber gerade die linke Seite der Gleichung (8). Wir kommen also auch hier zu dem notwendigen und hinreichenden Kriterium (8).

Hiermit ist bewiesen:

Satz 1: *Die Pfaff'sche Gleichung*

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0,$$

in der X, Y, Z Functionen von x, y, z bedeuten, lässt sich dann und nur dann auf die Form bringen

$$d\varphi(x, y, z) = 0,$$

wenn die Identität besteht:

$$X(Y_z - Z_y) + Y(Z_x - X_z) + Z(X_y - Y_x) \equiv 0.$$

Bisher haben wir die *Gleichung* (4) ins Auge gefasst. Wir wollen uns aber jetzt auf einen höheren Standpunkt stellen und den *Ausdruck*

$$Xdx + Ydy + Zdz$$

Pfaff'scher Ausdruck. betrachten. Wir nennen ihn einen allgemeinen *Pfaff'schen Ausdruck*. Wir werden zeigen, dass jeder solche Ausdruck auf gewisse *Normalformen* gebracht werden kann *).

Der Ausdruck $\Phi d\varphi$. Soeben haben wir schon erkannt, dass der Pfaff'sche *Ausdruck* dann und nur dann auf die Form

$$\Phi(x, y, z)\, d\varphi(x, y, z)$$

gebracht werden kann, wenn die Identität (8) besteht. Die Function φ bestimmt sich dann aus dem vollständigen System (9), und es ist ferner

$$\Phi = \frac{X}{\varphi_x} = \frac{Y}{\varphi_y} = \frac{Z}{\varphi_z}.$$

Man sieht, dass dann φ auch der partiellen Differentialgleichung für f:

$$Af \equiv (Y_z - Z_y)\frac{\partial f}{\partial x} + (Z_x - X_z)\frac{\partial f}{\partial y} + (X_y - Y_x)\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

genügt, da ihre linke Seite für $f = \varphi$ infolge von (9) und (8) identisch Null wird.

Insbesondere ist der Pfaff'sche Ausdruck ein vollständiges Differential $d\varphi$, wenn die obigen Bedingungen (5) identisch erfüllt sind. Sobald diese Bedingungen (5) nicht erfüllt sind, aber die Bedingung (8) identisch erfüllt ist, d. h. sobald der Pfaff'sche Ausdruck auf die Form $\Phi d\varphi$, nicht aber auf die Form $d\varphi$ gebracht werden kann, ist die Function Φ unabhängig von φ, denn wenn $\Phi \equiv \omega(\varphi)$ wäre, so würde $\Phi d\varphi \equiv \omega'(\varphi) d\varphi$ doch wieder ein vollständiges Differential sein, was wir aber ausgeschlossen haben.

---

*) Die folgende Betrachtung ist für das Verständnis der späteren Entwickelungen zunächst nicht nötig, wenn auch nützlich. Wir haben sie daher in kleinerem Druck gegeben, um hervorzuheben, dass sie vorläufig überschlagen werden kann.

Nunmehr wollen wir von diesen besonderen Fällen absehen, also annehmen, dass die Bedingung (8) *nicht* identisch erfüllt sei. Es soll also sein:

$$X(Y_z - Z_y) + Y(Z_x - X_z) + Z(X_y - Y_x) \neq 0. \tag{10}$$

Allgemeiner Fall.

Wir behaupten, dass es alsdann stets drei von einander unabhängige Functionen φ, ψ, Φ von x, y, z giebt derart, dass identisch:

$$Xdx + Ydy + Zdz = d\psi + \Phi d\varphi \tag{11}$$

Der Ausdruck: $d\psi + \Phi d\varphi$.

wird, dass sich also der Pfaff'sche Ausdruck im Allgemeinen auf die Form $d\psi + \Phi d\varphi$ bringen lässt.

Von vornherein ist dies deshalb wahrscheinlich, weil der neue Ausdruck $d\psi + \Phi d\varphi$ ebenso wie der vorgelegte Pfaff'sche Ausdruck drei Functionen enthält, sodass zu vermuten ist, dass man durch passende Wahl von φ, ψ, Φ die Bedingung (11) erfüllen kann.

Um dies nun wirklich zu beweisen, zerlegen wir die Forderung (11) in die drei einzelnen:

$$\begin{cases} X = \psi_x + \Phi\varphi_x, \\ Y = \psi_y + \Phi\varphi_y, \\ Z = \psi_z + \Phi\varphi_z. \end{cases} \tag{12}$$

Bestehen diese drei Gleichungen identisch, so ist offenbar auch:

$$\begin{cases} Y_z - Z_y = \Phi_z\varphi_y - \Phi_y\varphi_z, \\ Z_x - X_z = \Phi_x\varphi_z - \Phi_z\varphi_x, \\ X_y - Y_x = \Phi_y\varphi_x - \Phi_x\varphi_y. \end{cases} \tag{13}$$

Wenn es umgekehrt zwei Functionen φ und Φ giebt, die den letzteren drei Relationen (13) identisch genügen, so giebt es auch immer eine dritte Function ψ, sodass die Gleichungen (12) und also auch die ihnen äquivalente Gleichung (11), identisch erfüllt werden, denn die Gleichungen (12) bestimmen die ersten partiellen Differentialquotienten von ψ und bestimmen daher ψ selbst, sobald die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial\psi_y}{\partial z} - \frac{\partial\psi_z}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\psi_z}{\partial x} - \frac{\partial\psi_x}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial\psi_x}{\partial y} - \frac{\partial\psi_y}{\partial x} = 0$$

erfüllt sind. Diese Integrabilitätsbedingungen sind aber wegen der aus (12) folgenden Werte von ψ_x, ψ_y, ψ_z gerade die Relationen (13).

Es hat sich somit ergeben, dass nur bewiesen zu werden braucht, dass es stets zwei Functionen φ und Φ von x, y, z giebt derart, dass die drei Relationen (13) identisch erfüllt werden. Diesen Nachweis werden wir nunmehr führen.

Bedingg. der Reduction auf diese Form.

Multiplicieren wir die Gleichungen (13) bez. mit $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ und addieren sie, so kommt:

$$(Y_z - Z_y)\varphi_x + (Z_x - X_z)\varphi_y + (X_y - Y_x)\varphi_z = 0. \tag{14}$$

Multiplicieren wir sie der Reihe nach mit Φ_x, Φ_y, Φ_z, so giebt ihre Addition:

$$(Y_z - Z_y)\Phi_x + (Z_x - X_z)\Phi_y + (X_y - Y_x)\Phi_z = 0. \tag{15}$$

Es werden also die gesuchten Functionen φ, Φ Lösungen f der linearen partiellen Differentialgleichung sein:

$$(Y_z - Z_y)\frac{\partial f}{\partial x} + (Z_x - X_z)\frac{\partial f}{\partial y} + (X_y - Y_x)\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \tag{16}$$

deren linke Seite wir schon oben mit Af bezeichneten. Wegen der Voraussetzung (10) sind die Coefficienten dieser Differentialgleichung nicht einzeln Null.

Diese partielle Differentialgleichung (16) schreiben wir nun zur Abkürzung so:

$$Af \equiv \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \tag{16'}$$

indem wir also die Bezeichnungen einführen:

$$Y_z - Z_y \equiv \alpha, \quad Z_x - X_z \equiv \beta, \quad X_y - Y_x \equiv \gamma. \tag{17}$$

Die Coefficienten α, β, γ besitzen hiernach die Eigenschaft, dass

$$\alpha_x + \beta_y + \gamma_z \equiv 0 \tag{18}$$

Anderer Ausdruck der Bedingg.

ist, aber α, β, γ nicht alle drei verschwinden. Wir behaupten nun, dass es unter den Lösungen einer solchen partiellen Differentialgleichung (16'), *welche die Bedingung* (18) *erfüllt*, stets zwei solche von einander unabhängige φ, Φ giebt, dass identisch

$$\begin{cases} \Phi_z \varphi_y - \Phi_y \varphi_z = \alpha, \\ \Phi_x \varphi_z - \Phi_z \varphi_x = \beta, \\ \Phi_y \varphi_x - \Phi_x \varphi_y = \gamma \end{cases} \tag{19}$$

wird. Wäre dies bewiesen, so wäre sicher, dass es zwei Functionen φ, Φ giebt, die den früheren Bedingungsgleichungen (13) genügen *).

Nachweis, dass die Bedingg. erfüllt ist.

Um unsere soeben ausgesprochene Behauptung zu beweisen, verstehen wir unter u, v irgend zwei von einander unabhängige Lösungen der partiellen Differentialgleichung $Af = 0$, sodass

$$\alpha u_x + \beta u_y + \gamma u_z \equiv 0,$$

$$\alpha v_x + \beta v_y + \gamma v_z \equiv 0$$

wird. Hiernach ist dann:

$$\frac{v_z u_y - v_y u_z}{\alpha} \equiv \frac{v_x u_z - v_z u_x}{\beta} \equiv \frac{v_y u_x - v_x u_y}{\gamma}.$$

Diese Brüche sind nicht Null, da sonst u und v von einander abhängig sind. Auch sind sie nicht unendlich, da α, β, γ nicht sämtlich Null sind. Wir bezeichnen den endlichen Wert dieser Brüche mit ω, sodass

$$\omega \not\equiv 0$$

ist. Dann kommt:

$$\begin{cases} v_z u_y - v_y u_z \equiv \alpha\omega, \\ v_x u_z - v_z u_x \equiv \beta\omega, \\ v_y u_x - v_x u_y \equiv \gamma\omega. \end{cases} \tag{20}$$

Differenzieren wir diese Gleichungen der Reihe nach partiell nach x, y, z und addieren sie darauf, so kommt:

$$\frac{\partial(\alpha\omega)}{\partial x} + \frac{\partial(\beta\omega)}{\partial y} + \frac{\partial(\gamma\omega)}{\partial z} \equiv 0$$

oder:

$$\alpha\omega_x + \beta\omega_y + \gamma\omega_z + (\alpha_x + \beta_y + \gamma_z)\,\omega \equiv 0,$$

also nach (18):

$$\alpha\omega_x + \beta\omega_y + \gamma\omega_z \equiv 0.$$

---

*) Wir unterlassen nicht, darauf hinzuweisen, dass wir hier wie an anderen Stellen in diesem Paragraphen implicite Jacobi's *Theoria novi multiplicatoris etc.* (Crelle's Journal Bd. 27, S. 199 (1844), Werke 4. Bd. S. 317) benutzen.

Es ist daher auch

$$A\omega \equiv 0.$$

Nun aber besitzt die Gleichung $Af = 0$ in den *drei* Veränderlichen x, y, z nur *zwei* von einander unabhängige Lösungen. Jede andere, so auch ω, ist daher eine Function von u, v allein. Also nehmen die Gleichungen (20) die Form an:

$$\begin{aligned} v_z u_y - v_y u_z &\equiv \alpha \Omega(u, v), \\ v_x u_z - v_z u_x &\equiv \beta \Omega(u, v), \\ v_y u_x - v_x u_y &\equiv \gamma \Omega(u, v), \end{aligned}$$

in der $\Omega \mathrel{\ddagger} 0$ ist.

Hieraus lässt sich nun ohne Mühe schliessen, dass es möglich ist, zwei solche von einander unabhängige Functionen $\varphi(u, v)$ und $\Phi(u, v)$ zu finden, die den Bedingungen (19) genügen. Wir brauchen zu dem Zwecke φ und Φ nur so zu wählen, dass

$$\left(\Phi_v \varphi_u - \Phi_u \varphi_v\right) \Omega(u, v) \equiv 1$$

wird. Mit diesem Ergebnis ist der gewünschte Nachweis beendet.

Hiermit steht also fest, dass es zwei von einander unabhängige Functionen φ, Φ giebt, welche die Gleichungen (13) identisch erfüllen. Wie schon gesagt wurde, lässt sich infolgedessen eine Function ψ bestimmen, die den Bedingungen (12) genügt.

Schliesslich zeigen wir, dass ψ von φ und Φ unabhängig ist. Da φ, Φ zwei von einander unabhängige Lösungen der Differentialgleichung $Af = 0$ sind, so kann die allgemeinste von φ und Φ abhängige Function definiert werden als Lösung der Differentialgleichung $Af = 0$. Es genügt also, zu zeigen, dass $A\psi \mathrel{\ddagger} 0$ ist. Bilden wir $A\psi$, indem wir aus (12) die Werte von ψ_x, ψ_y, ψ_z entnehmen, so kommt

$$A\psi \equiv X\left(Y_z - Z_y\right) + Y\left(Z_x - X_z\right) + Z\left(X_y - Y_x\right) - \Phi A\varphi.$$

Das letzte Glied $A\varphi$ ist Null, das andere aber nach (10) nicht. Also ist wirklich $A\psi \mathrel{\ddagger} 0$.

Hiermit ist bewiesen:

Theorem 6: *Der Ausdruck* — Theorem über Pfaff'sche Ausdrücke.

$$Xdx + Ydy + Zdz,$$

in dem X, Y, Z Functionen von x, y, z bedeuten, ist ein vollständiges Differential $d\varphi$ dann und nur dann, wenn

$$Y_z - Z_y \equiv 0, \quad Z_x - X_z \equiv 0, \quad X_y - Y_x \equiv 0$$

ist. Sind diese Bedingungen nicht sämtlich erfüllt, so ist der Ausdruck dann und nur dann auf die Form $\Phi d\varphi$ zu bringen, in der Φ eine von φ unabhängige Function ist, wenn

$$X\left(Y_z - Z_y\right) + Y\left(Z_x - X_z\right) + Z\left(X_y - Y_x\right) \equiv 0$$

ist. Ist auch diese Bedingung nicht erfüllt, so lässt sich der Ausdruck auf die Form

$$d\psi + \Phi d\varphi$$

bringen, in der φ, ψ, Φ drei von einander unabhängige Functionen bedeuten.

Im *ersten* Fall findet man φ durch die Quadratur: — Die zur Reduct. nötigen Operationen.

$$\varphi = \int (Xdx + Ydy + Zdz).$$

Im *zweiten* Fall ist φ Lösung des vollständigen Systems

$$X\frac{\partial f}{\partial y} - Y\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad X\frac{\partial f}{\partial z} - Z\frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

das die Gleichung

$$Af \equiv (Y_z - Z_y)\frac{\partial f}{\partial x} + (Z_x - X_z)\frac{\partial f}{\partial y} + (X_y - Y_x)\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

nach sich zieht. Φ bestimmt sich aus:

$$\Phi = \frac{X}{\varphi_x} = \frac{Y}{\varphi_y} = \frac{Z}{\varphi_z}.$$

Im *dritten* Fall endlich ist φ eine beliebige Lösung der Gleichung $Af = 0$, während Φ aus den drei Relationen

$$(13) \qquad \begin{cases} Y_z - Z_y = \Phi_z\varphi_y - \Phi_y\varphi_z, \\ Z_x - X_z = \Phi_x\varphi_z - \Phi_z\varphi_x, \\ X_y - Y_x = \Phi_y\varphi_x - \Phi_x\varphi_y \end{cases}$$

gewonnen wird, von denen eine offenbar eine Folge der beiden anderen ist. Denn werden die Gleichungen der Reihe nach mit φ_x, φ_y, φ_z multipliciert und darauf addiert, so ergiebt sich rechts identisch Null, während links $A\varphi$ kommt, das auch identisch Null ist. Es genügt daher, die beiden letzten Gleichungen (13) allein zu berücksichtigen. Es muss also Φ eine Lösung f der beiden Differentialgleichungen sein:

$$(21) \qquad \begin{cases} \varphi_x\dfrac{\partial f}{\partial y} - \varphi_y\dfrac{\partial f}{\partial x} = X_y - Y_x, \\ \varphi_x\dfrac{\partial f}{\partial z} - \varphi_z\dfrac{\partial f}{\partial x} = X_z - Z_x. \end{cases}$$

Nehmen wir an, φ sei schon gefunden, und φ sei etwa von x nicht frei. Dann führen wir neue Veränderliche x_1, y_1, z_1 ein, indem wir setzen:

$$x_1 = \varphi, \quad y_1 = y, \quad z_1 = z,$$

sodass

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \varphi_x\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \varphi_y\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \varphi_z\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial z_1}$$

wird und die Differentialgleichungen (21) die Form annehmen:

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = \frac{X_y - Y_x}{\varphi_x}, \quad \frac{\partial f}{\partial z_1} = \frac{X_z - Z_x}{\varphi_x},$$

in der man natürlich rechts alles durch x_1, y_1, z_1 auszudrücken hat. Dann findet man durch eine Quadratur, indem man dabei x_1 als constant betrachtet, eine Particularlösung:

$$f = \int\left(\frac{X_y - Y_x}{\varphi_x}\,dy_1 + \frac{X_z - Z_x}{\varphi_x}\,dz_1\right),$$

aus der durch Addition einer beliebigen Function U von φ die allgemeine Lösung Φ hervorgeht:

$$\Phi = \int\left(\frac{X_y - Y_x}{\varphi_x}\,dy_1 + \frac{X_z - Z_x}{\varphi_x}\,dz_1\right) + U(\varphi).$$

Man kann übrigens als Φ direct die particulare Lösung benutzen.

Endlich ψ ergiebt sich durch Quadratur, da ja nach (12):

$$\psi = \int \left\{ \left(X - \Phi\varphi_x\right) dx + \left(Y - \Phi\varphi_y\right) dy + \left(Z - \Phi\varphi_z\right) dz \right\}$$

ist.

Satz 2: *Ist der Pfaff'sche Ausdruck*

$$Xdx + Ydy + Zdz$$

auf die Normalform

$$d\psi + \Phi d\varphi$$

reducibel, so findet man φ als eine beliebige particulare Lösung einer homogenen linearen partiellen Differentialgleichung mit den drei unabhängigen Veränderlichen x, y, z, darauf Φ durch eine Quadratur und schliesslich ψ durch eine neue Quadratur.

Ist der Pfaff'sche Ausdruck auf die Normalform $d\psi + \Phi d\varphi$ reducibel, so können wir die Functionen φ, $-\Phi$, ψ als neue Veränderliche x, y, z benutzen, sodass er die Form $dz - ydx$ erhält. Ebenso können wir ihn in den anderen Fällen $d\varphi$, $\Phi d\varphi$ auf die Form dx bez. ydx bringen. Dies liefert also den

Einführung neuer Veränderlicher.

Satz 3: *Durch Einführung passender neuer Veränderlicher lässt sich jeder Pfaff'sche Ausdruck in drei Veränderlichen auf eine der drei Formen bringen*

$$dx, \quad ydx, \quad dz - ydx,$$

und diese drei Formen können nicht in einander übergeführt werden.

Insbesondere folgt hieraus für die Pfaff'schen *Gleichungen* der

Satz 4: *Jede Pfaff'sche Gleichung*

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

lässt sich durch Einführung passender neuer Veränderlicher x, y, z auf eine der beiden Formen bringen:

$$dx = 0, \quad dz - ydx = 0.$$

Diese beiden Formen können nicht in einander übergeführt werden.

Wir kehren jetzt zu der zu Anfang dieses Paragraphen gegebenen geometrischen Deutung der *Pfaff-schen Gleichung*

$$(22) \quad Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

im Raume mit den rechtwinkligen Coordinaten x, y, z zurück.

Nehmen wir an, es seien uns ∞^2 Integralcurven der Pfaff'schen Gleichung bekannt. Wie wir schon wissen, liegen auf jeder allgemein gewählten Fläche ∞^1 Integralcurven. Wir greifen nun umgekehrt aus den bekannten ∞^2 Integralcurven eine Schar von ∞^1 Curven c heraus und betrachten die von ihnen gebildete Fläche. (Siehe Fig. 45.) Da die Pfaff'sche Gleichung jedem Punkt, also insbesondere

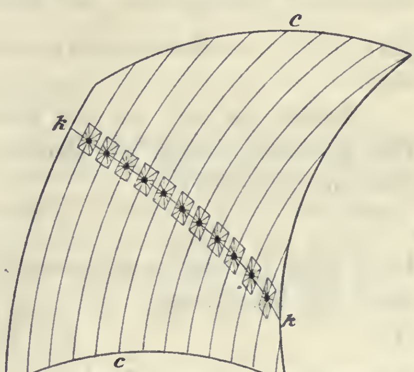

Fig. 45.

Zur Integration d. Pfaff'schen Gleichung.

jedem Punkte dieser Fläche, ein ebenes Büschel von ∞^1 Fortschreitungsrichtungen zuordnet, so wird sich dies Büschel, wenn der Punkt eine Integralcurve auf der Fläche durchläuft, drehen und es wird einmal der Fall eintreten, dass die Ebene des Büschels die Tangentenebene der Fläche wird. So wird im Allgemeinen auf jeder der ∞^1 Integralcurven c der Fläche ein Punkt existieren, dessen Büschel die Fläche berührt. Es ist dann geometrisch selbstverständlich, dass der Ort k dieser ∞^1 Punkte auch eine Integralcurve sein wird.

Wir wollen nun diese Andeutungen *analytisch* durchführen:

Die ∞^2 gegebenen Integralcurven werden durch zwei Gleichungen in x, y, z dargestellt sein, die zwei Parameter a, b enthalten, nach denen wir sie auflösen wollen. Es seien also

$$u(x, y, z) = a, \quad v(x, y, z) = b \tag{23}$$

die Gleichungen der bekannten ∞^2 Integralcurven. Durch den beliebig gewählten Punkt (x, y, z) des Raumes geht eine Integralcurve der Schar. Ihre Tangentialrichtung $(dx : dy : dz)$ wird bestimmt durch die beiden Gleichungen

$$du \equiv u_x dx + u_y dy + u_z dz = 0,$$

$$dv \equiv v_x dx + v_y dy + v_z dz = 0.$$

Da diese Richtung auch der Pfaff'schen Gleichung

$$X dx + Y dy + Z dz = 0$$

genügen muss, so muss letztere eine Folge der beiden vorhergehenden Gleichungen sein, und zwar für jedes Wertsystem x, y, z. Es muss daher zwei Functionen α und β von x, y, z geben derart, dass

$$X dx + Y dy + Z dz \equiv \alpha\, du + \beta\, dv \tag{24}$$

wird.

Greifen wir nun aus der Schar (23) ∞^1 Integralcurven c heraus. Dies geschieht, indem wir zwischen den beiden Parametern a, b eine Relation herstellen:

$$b = \omega(a).$$

Dann wird die Fläche der ausgewählten ∞^1 Integralcurven dargestellt durch die Gleichung:

$$v - \omega(u) = 0. \tag{25}$$

Wir suchen nun jeden Punkt (x, y, z) dieser Fläche, dessen Tangentenebene mit der Ebene zusammenfällt, die dem Punkte vermöge der Pfaff'schen Gleichung (22) zugeordnet ist. Wir erhalten diese Punkte, indem wir die Gleichung (22) vergleichen mit der Relation, welche die Fortschreitungsrichtungen $(dx:dy:dz)$ auf der Fläche (25) definiert, also mit dieser:

$$(v_x - \omega' u_x)\, dx + (v_y - \omega' u_y)\, dy + (v_z - \omega' u_z)\, dz = 0.$$

Als die Bedingungen für die gesuchten Punkte ergeben sich daher folgende:

$$\frac{v_x - \omega' u_x}{X} = \frac{v_y - \omega' u_y}{Y} = \frac{v_z - \omega' u_z}{Z}$$

oder, wenn wir eine Hülfsgrösse ϱ einführen:

$$\begin{aligned} X &= \varrho(v_x - \omega' u_x), \\ Y &= \varrho(v_y - \omega' u_y), \\ Z &= \varrho(v_z - \omega' u_z). \end{aligned}$$

Nach (24) ist aber:

$$\begin{aligned} X &\equiv \alpha u_x + \beta v_x, \\ Y &\equiv \alpha u_y + \beta v_y, \\ Z &\equiv \alpha u_z + \beta v_z. \end{aligned}$$

Also lassen sich unsere Forderungen auch so ausdrücken:

$$\begin{aligned} (\alpha + \varrho\omega')\, u_x + (\beta - \varrho)\, v_x &= 0, \\ (\alpha + \varrho\omega')\, u_y + (\beta - \varrho)\, v_y &= 0, \\ (\alpha + \varrho\omega')\, u_z + (\beta - \varrho)\, v_z &= 0. \end{aligned}$$

Diese drei Gleichungen lassen sich nun dadurch erfüllen, dass man die beiden Gleichungen ansetzt:

$$\alpha = -\varrho\omega', \quad \beta = \varrho$$

oder, nach Elimination der Hülfsgrösse ϱ, nur die eine Gleichung:

$$\alpha + \beta\omega' = 0.$$

Diese Gleichung zusammen mit der Gleichung unserer Fläche

$$v - \omega(u) = 0$$

stellt analytisch eine Curve dar, wenn sie überhaupt mit einander vereinbar sind. Nun aber lässt sich die oben willkürlich ausgewählte Function $\omega(u)$ immer so annehmen, dass die beiden letzten Gleichungen wirklich eine Curve darstellen. Diese Curve ist alsdann eine Integralcurve, da ihre Fortschreitungsrichtung in jedem Punkte als Tangentenrichtung der Fläche in dem Büschel liegt, das dem Punkte durch die Pfaff'sche Gleichung (22) zugeordnet wird.

Die beiden Gleichungen:

$$v - \omega(u) = 0, \quad \alpha + \beta\omega'(u) = 0$$

stellen also unendlich viele Integralcurven vor, da sie eine willkürliche

Function ω enthalten, was ja bei den ursprünglich als bekannt vorausgesetzten ∞^2 Integralcurven (23) nicht der Fall war.

Hiermit haben wir den folgenden Satz erhalten, der von Pfaff herrührt:

Satz 5: *Kennt man ∞^2 Integralcurven*

$$u(x, y, z) = \text{Const.}, \quad v(x, y, z) = \text{Const.}$$

der Pfaff'schen Gleichung

$$X dx + Y dy + Z dz = 0,$$

anders ausgesprochen: besteht identisch eine Gleichung von der Form:

$$X dx + Y dy + Z dz = \alpha(x, y, z)\, du + \beta(x, y, z)\, dv,$$

so findet man beliebig viele Integralcurven der Pfaff'schen Gleichung in der Form:

$$v - \omega(u) = 0, \quad \alpha + \beta\omega'(u) = 0.$$

*Hierin bedeutet ω eine willkürliche Function von u**).

§ 3. Nullsysteme.

In den verschiedenen Gebieten der reinen und angewandten Mathematik haben specielle Pfaff'sche Gleichungen eine Rolle gespielt, wenn dies auch selten explicite hervortrat. Insbesondere gilt dies auch von der Kinematik, und auf die hier auftretende Pfaff'sche Gleichung wollen wir jetzt eingehen.

Inf. Bewegung im Raume.

Wir gehen dabei aus von einer *infinitesimalen Bewegung des Raumes* (x, y, z). Unter einer infinitesimalen Bewegung ist eine solche infinitesimale Transformation des Raumes

$$(26) \quad \delta x = \xi(x, y, z)\, \delta t, \quad \delta y = \eta(x, y, z)\, \delta t, \quad \delta z = \zeta(x, y, z)\, \delta t$$

zu verstehen, die jede Strecke in eine Strecke von gleicher Länge überführt. Sie kann also analytisch definiert werden als eine solche infinitesimale Transformation, die das Quadrat des Bogenelementes

$$dx^2 + dy^2 + dz^2$$

invariant lässt, für die daher

$$\delta(dx^2 + dy^2 + dz^2) = 0$$

oder also

$$dx\, d\delta x + dy\, d\delta y + dz\, d\delta z = 0$$

ist. Hierbei machen wir, wie schon gelegentlich früher, davon Gebrauch,

*) Die Entwickelungen dieses Paragraphen, die, abgesehen von der geometrischen Form, von Pfaff und Jacobi herrühren, finden, wie Clebsch zeigte, in v. Helmholtz' *Wirbeltheorie* eine schöne Illustration und Verwertung. (Siehe Crelle's Journal 55. Bd. (1858) S. 25 sowie 56. Bd. (1859) S. 1.)

dass das Differentiationszeichen d und das Variationszeichen δ in ihrer Aufeinanderfolge vertauscht werden können.

Nach (26) ist nun unsere Forderung für die infinitesimale Bewegung folgende:

$$dx\,d\xi + dy\,d\eta + dz\,d\zeta = 0.$$

Da ξ, η, ζ Functionen von x, y, z sind, ist die linke Seite dieser Gleichung in dx, dy, dz homogen vom zweiten Grade und liefert also die sechs Bedingungen:

$$(27) \qquad \begin{gathered} \xi_x = \eta_y = \zeta_z = 0, \\ \eta_z + \zeta_y = \zeta_x + \xi_z = \xi_y + \eta_x = 0. \end{gathered}$$

Nach den drei ersten Gleichungen ist ξ frei von x, η frei von y, ζ frei von z. Wenn wir also die letzte Gleichung (27) nochmals partiell nach y differenzieren, so ergiebt sich sofort, dass

$$\xi_{yy} = 0,$$

d. h. ξ in y linear ist. Ebenso folgt, dass alle drei Grössen ξ, η, ζ linear in den Veränderlichen sind, die sie enthalten. Wegen der drei Gleichungen (27) finden wir also für ξ, η, ζ die Werte:

$$\xi = Bz - Cy + D, \quad \eta = Cx - Az + E, \quad \zeta = Ay - Bx + G.$$

Hierbei bedeuten A, B, C, D, E, G beliebige Constanten.

Die allgemeinste infinitesimale Bewegung des Raumes (x, y, z) wird mithin gegeben durch die Formeln:

$$(28) \qquad \begin{cases} \delta x = (Bz - Cy + D)\,\delta t, \\ \delta y = (Cx - Az + E)\,\delta t, \\ \delta z = (Ay - Bx + G)\,\delta t. \end{cases}$$

Wenn wir insbesondere $A \neq 0$, aber alle anderen Constanten gleich Null wählen, so liegt die infinitesimale Bewegung vor:

$$\delta x = 0, \quad \delta y = -Az\,\delta t, \quad \delta z = Ay\,\delta t,$$

bei der offenbar jeder Punkt der x-Axe in Ruhe bleibt. Diese Bewegung ist also eine infinitesimale *Rotation* um die x-Axe. Wenn wir $B \neq 0$ oder $C \neq 0$, aber alle anderen Constanten gleich Null setzen, so ergeben sich infinitesimale Rotationen um die y- bez. z-Axe. Wenn wir eine der drei Constanten $D, E, G \neq 0$, aber alle anderen gleich Null wählen, so geht augenscheinlich eine infinitesimale *Translation* längs einer der drei Axen hervor.

Da nun die Incremente (28) linear aus denen zusammengesetzt sind, die sich bei Ausführung dieser einzelnen Bewegungen ergeben, so folgt der bekannte Satz der Kinematik, *dass sich jede infinitesimale*

Reduct. auf inf Trl. und Rotat. *Bewegung ersetzen lässt durch passende infinitesimale Rotationen um die Coordinatenaxen und passende infinitesimale Translationen längs der Coordinatenaxen* *).

Bestimmg. d. inv. Geraden. Betrachten wir die ∞^1 Ebenen:

$$Ax + By + Cz = \text{Const.} \tag{29}$$

Da die linke Seite dieser Gleichung vermöge der infinitesimalen Bewegung (28) ein constantes Increment erfährt, so folgt, dass jede Ebene (29) bei der infinitesimalen Bewegung (28) *parallel mit sich verschoben wird.* Fragen wir nun nach den Punkten (x, y, z) des Raumes, die sich *senkrecht* zu diesen Ebenen bewegen, so haben wir zu fordern, dass δx, δy, δz proportional A, B, C werden. Dies liefert drei Bedingungen:

$$\begin{cases} Bz - Cy + D = \varrho A, \\ Cx - Az + E = \varrho B, \\ Ay - Bx + G = \varrho C. \end{cases} \tag{30}$$

Multiplicieren wir sie der Reihe nach mit A, B, C und addieren, so ergiebt sich zur Bestimmung des Factors ϱ die Gleichung:

$$AD + BE + CG = \varrho(A^2 + B^2 + C^2).$$

Sobald also $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ ist, kann man die Constante ϱ so wählen, dass sich die drei in x, y, z linearen Gleichungen (30) auf nur zwei reducieren, also eine Gerade im Raume darstellen. Diese Gerade steht auf der Ebene (29) senkrecht, da die Incremente dx, dy, dz längs der Geraden (30) die Bedingungen erfüllen:

$$B\,dz - C\,dy = 0, \quad C\,dx - A\,dz = 0, \quad A\,dy - B\,dx = 0.$$

Sobald also

$$A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$$

ist, giebt es eine Gerade (30), die bei der infinitesimalen Bewegung (28) in sich verschoben wird, und zwar ist diese Gerade keine solche, die nach dem imaginären unendlich fernen Kugelkreis geht, also keine Minimalgerade.

Dass nicht mehrere mit der gefundenen parallele Geraden invariant bleiben, zeigen unsere Entwickelungen. Es ist aber denkbar, dass Geraden von anderer Richtung in Ruhe bleiben. Wäre eine solche keine Minimalgerade, so blieben zwei unendlich ferne Punkte invariant, die nicht auf dem imaginären Kugelkreis

---

*) Der Satz, dass jede Bewegung durch Rotation und Translation ersetzt werden kann, rührt von Euler (1775) und d'Alembert (1780) her. Dass sie durch eine *Schraubung* ersetzbar ist, zeigte Mozzi (*Discorso matematico sopra il rotamento momentaneo dei corpi,* 1763). Wir citieren dies nach Schell, *Theorie der Bewegung und der Kräfte,* 2. Aufl., 1. Bd., Leipzig 1879, S. 311.

liegen. Daraus würde folgen, dass alle unendlich fernen Punkte in Ruhe blieben. Dann aber läge eine Translation vor, was durch die Annahme:

$$A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$$

ausgeschlossen ist. Es giebt also nur eine invariante Gerade, die keine Minimalgerade ist.

Ist, wie wir jetzt voraussetzen wollen,

$$A^2 + B^2 + C^2 \neq 0,$$

so giebt es, wie wir sahen, eine Gerade, die bei der infinitesimalen Bewegung (28) invariant bleibt und keine Minimalgerade ist. Ihre Gleichungen sind die obigen Gleichungen (30). Da nun wegen der vorausgesetzten Ungleichung die drei Constanten A, B, C nicht sämtlich gleich Null sein können, so sehen wir, dass diese invariante Gerade sicher im Endlichen gelegen ist. Die invariante Gerade können wir nun in einem neuen Coordinatensystem als z-Axe benutzen und die x- und y-Axe als zu ihr senkrechte Geraden wählen. Nach wie vor ist (28) der Ausdruck einer allgemeinen infinitesimalen Bewegung. Aber jetzt soll $\delta x = \delta y = 0$ sein für $x = y = 0$, d. h. es soll $A = B = D = E = 0$ sein, sodass die infinitesimale Bewegung die folgende einfache analytische Form annimmt:

$$(31) \qquad \delta x = -y\,\delta t, \quad \delta y = x\,\delta t, \quad \delta z = k\,\delta t.$$

Hierbei haben wir $C\delta t$ als neues δt eingeführt und das alte $G\delta t$ nunmehr mit $k\,\delta t$ bezeichnet.

Diese Gleichungen aber stellen eine *infinitesimale Schraubung* um die z-Axe dar, denn die beiden ersten Gleichungen geben eine infinitesimale Rotation um die z-Axe, während die letzte eine infinitesimale Translation längs der z-Axe bezeichnet. Also sind wir zu dem aus der Kinematik bekannten Ergebnis gelangt, *dass eine infinitesimale Bewegung im Allgemeinen eine Schraubung ist.* (Vgl. Fussnote S. 208.) Bei der Schraubung (31) dreht sich jede Gerade, welche die z-Axe senkrecht trifft, um den Winkel δt und hebt sich um die Strecke $k\,\delta t$. Es ist daher k das Mass der Steighöhe dieser infinitesimalen Schraubenbewegung.

Infinit. Schraubung um die z-Axe.

Wir könnten nun sogleich an eine beliebige infinitesimale Bewegung (28) anknüpfen. Für die Verständlichkeit ist es aber besser, zuerst eine solche Bewegung zu betrachten, mit der sich eine ganz bestimmte Anschauung verbindet. Daher wollen wir zunächst mit der infinitesimalen Schraubung (31) eine Pfaff'sche Gleichung in Verbindung setzen. Vermöge der infinitesimalen Schraubung (31) wird jedem Punkte (x, y, z) eine Fortschreitungsrichtung $(\delta x : \delta y : \delta z)$ zugeordnet. Nun gehen durch jeden Punkt (x, y, z) des Raumes ∞^2 *Linienelemente* $(x, y, z, dx : dy : dz)$. Man kann insbesondere diejenigen *Linienelemente des Raumes* betrachten, *die senkrecht stehen auf der Fortschreitungsrichtung, die ihre Punkte bei der Schraubung erfahren.* (Zur Veranschaulichung diene Fig. 46.) Sie werden bestimmt durch die Gleichung:

Linienelem. senkrecht zur Schraubung.

$$\delta x \cdot dx + \delta y \cdot dy + \delta z \cdot dz = 0.$$

Setzen wir hierin die Werte (31) ein, so kommt:

Pfaff'sche Gl. i. d. Kinematik.

$$xdy - ydx + kdz = 0, \tag{32}$$

und dies ist eine *Pfaff'sche Gleichung.*

Im ganzen giebt es im Raume ∞^5 Linienelemente $(x, y, z, dx : dy : dz)$. Darunter sind also ∞^4 enthalten, die der Pfaff'schen Gleichung (32) genügen.

Diese Pfaff'sche Gleichung (32) hat nun viele merkwürdige Eigenschaften, die schon vielfach untersucht worden sind. Einige dieser Eigenschaften wollen wir ableiten.

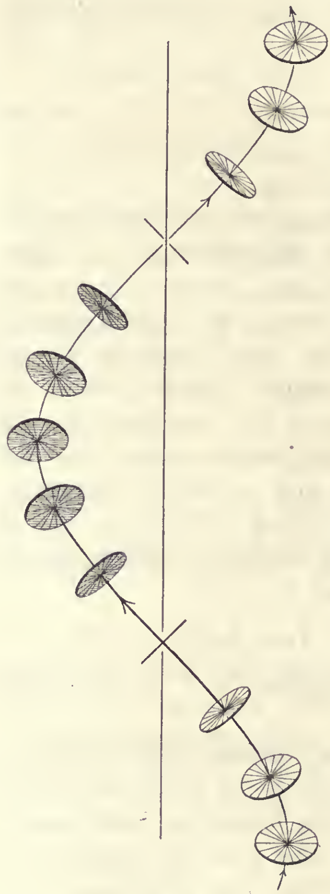

Fig. 46.

∞^3 Integralgeraden.

Zunächst behaupten wir, dass unter den *Integralcurven* der Pfaff'schen Gleichung (32) gerade ∞^3 *Geraden*, also *Integralgeraden*, enthalten sind. In der That, allgemein stellen die Gleichungen

$$x = rz + \varrho, \quad y = sz + \sigma \tag{33}$$

eine Gerade im Raume dar. Längs dieser Geraden ist

$$dx = rdz, \quad dy = sdz.$$

Setzen wir die Werte (33) und diese letzteren Werte in (32) ein, so kommt *eine* Gleichung zwischen den Parametern r, ϱ, s, σ allein, nämlich:

$$s\varrho - r\sigma + k = 0. \tag{34}$$

Im ganzen Raume giebt es ∞^4 Geraden und es sind r, ϱ, s, σ ihre wesentlichen Bestimmungsstücke. Durch die Gleichung (34) werden also gerade ∞^3 Geraden bestimmt, die Integralgeraden der Pfaff'schen Gleichung (32) sind. Hiermit haben wir den in der Kinematik wohlbekannten Satz bewiesen:

Satz 6: *Bei jeder infinitesimalen Schraubung giebt es ∞^3 Geraden, deren Punkte sich sämtlich nach Richtungen senkrecht zu der betreffenden Geraden bewegen.*

Durch jeden Punkt (x, y, z) des Raumes gehen ∞^1 dieser Geraden. Denn wählen wir x, y, z bestimmt, so werden durch die drei Gleichungen (33) und (34) drei der vier Bestimmungsstücke r, ϱ, s, σ der Geraden als Functionen des letzten ausgedrückt. Diese ∞^1 Geraden durch einen Punkt (x, y, z) haben in diesem Punkte sämtlich Fortschreitungsrichtungen $(dx : dy : dz)$, die der Gleichung (32) genügen, d. h. sie stehen senkrecht auf der Fortschreitungsrichtung, die dem Punkte durch die Schraubung erteilt wird. Sie bilden daher *ein ebenes Büschel.*

Wir kennen somit eine *Schar von ∞^3 Geraden im Raume, die so beschaffen ist, dass durch jeden Punkt des Raumes ∞^1 Geraden der Schar hindurchgehen, die ein Büschel bilden.*

Wir kehren jetzt zur Betrachtung der allgemeinen infinitesimalen Bewegung bei Zugrundelegung eines beliebigen rechtwinkligen Coordinatensystems zurück. Wie wir wissen, stellt sie sich durch die Formeln dar: Allg. inf. Bewegung.

$$(28)\qquad \begin{cases} \delta x = (Bz - Cy + D)\,\delta t, \\ \delta y = (Cx - Az + E)\,\delta t, \\ \delta z = (Ay - Bx + G)\,\delta t. \end{cases}$$

Alle Linienelemente $(x, y, z, dx : dy : dz)$ durch den Punkt (x, y, z), die senkrecht stehen auf der dem Punkte durch die infinitesimale Bewegung zuerteilten Fortschreitung, erfüllen die Relation

$$\delta x \cdot dx + \delta y \cdot dy + \delta z \cdot dz = 0,$$

die nach (28) die Form annimmt:

$$(Bz - Cy + D)\,dx + (Cx - Az + E)\,dy + (Ay - Bx + G)\,dz = 0$$

oder, übersichtlicher geschrieben:

$$(35)\qquad \begin{aligned} A(ydz - zdy) + B(zdx - xdz) + C(xdy - ydx) &+ \\ + Ddx + Edy + Gdz &= 0. \end{aligned}$$

Diese Pfaff'sche Gleichung (35) ergiebt sich also bei Zugrundelegung einer beliebigen infinitesimalen Bewegung. Wie leicht zu erkennen, gehören *immer* zu ihren Integralcurven ∞^3 Geraden

$$x = rz + \varrho, \quad y = sz + \sigma. \tag{33}$$

Denn wenn wir diese Werte und die Werte

$$dx = r dz, \quad dy = s dz$$

in (35) eintragen, so finden wir, dass die Bestimmungsstücke r, ϱ, s, σ einer Integralgeraden der *einen* Bedingung genügen müssen:

$$A\sigma - B\varrho + C(s\varrho - r\sigma) + Dr + Es + G = 0. \tag{36}$$

Sie wird mithin von ∞^3 Geraden erfüllt; und diese Geraden liegen so, dass die durch einen beliebigen Punkt gehenden Integralgeraden das durch die Pfaff'sche Gleichung (35) bestimmte Büschel bilden.

Die Pfaff'sche Gleichung (35) enthält sechs Constanten, deren Verhältnisse aber nur in betracht kommen. Wir kennen somit ∞^5 Scharen von je ∞^3 Geraden, die so beschaffen sind, dass durch jeden Punkt des Raumes ∞^1 dieser Geraden gehen, die ein ebenes Büschel bilden.

Liegt eine beliebige Schar von ∞^3 Geraden im Raume vor, so können wir sofort abzählen, wie viele dieser Geraden durch einen allgemein gewählten Punkt gehen. Sind es nämlich ∞^p, so würde, da es ∞^3 Punkte giebt, von denen je ∞^1 auf einer Geraden liegen, die Schar aus ∞^{p+2} Geraden bestehen. Es ist mithin $p + 2 = 3$, d. h. durch jeden Punkt allgemeiner Lage gehen ∞^1 Geraden der Schar. Es ist aber sehr wohl denkbar, dass durch gewisse ausgezeichnete Punkte deren mehr, also alle ∞^2 Geraden, gehen.

Nullsystem. Wir wollen nun überhaupt Scharen von ∞^3 Geraden untersuchen von der Beschaffenheit, dass alle durch einen beliebigen Punkt allgemeiner Lage gehenden Geraden ein ebenes Büschel bilden. Derartige Scharen bestimmen ein sogenanntes *Nullsystem.* Die Geraden heissen *Nullgeraden,* und die Ebene des Büschels eines Punktes heisst die *Nullebene* des gewählten Punktes *).

Die obigen Betrachtungen haben uns nach dieser Definition ∞^5 Nullsysteme geliefert. Wir werden uns nachher das Problem stellen, alle Nullsysteme überhaupt zu bestimmen. Die Erledigung dieses Problems wird uns genau zu den obigen ∞^5 Nullsystemen führen.

Zunächst aber müssen wir einige vorbereitende Betrachtungen anstellen.

---

*) Die Bezeichnung: *Nullebene* sowie die nachher einzuführende Bezeichnung *Nullpunkt* rühren von Möbius her. (Siehe *Lehrbuch der Statik*, 1. Teil, Leipzig 1837, § 84, in den Ges. Werken 3. Bd. S. 118.) Später bedienen wir uns für die Nullgeraden der Plücker'schen Bezeichnung: *linearer Complex.*

Die Schar aller ∞^3 Geraden, die eine feste Gerade schneiden, definiert offenbar ein Nullsystem. Ein solches nennen wir ein *specielles Nullsystem.* Es giebt deren gerade soviel als Geraden im Raume, also ∞^4. Im Folgenden nehmen wir bis auf weiteres an, dass das zu betrachtende Nullsystem *kein specielles* sei. **Specielles Nullsystem.**

Wie gesagt, wäre es denkbar, dass gewissen ausgezeichneten Punkten kein ebenes Büschel von Nullgeraden zugeordnet wäre, sondern vielmehr alle Geraden durch den Punkt Nullgeraden wären. Wenn überhaupt durch einen Punkt drei Nullgeraden gehen, die nicht in einer Ebene liegen, so ist er notwendig ein solcher ausgezeichneter Punkt.

Es liege nun ein nicht-specielles Nullsystem vor. Wir wählen irgend eine Gerade g von allgemeiner Lage, die also keine Nullgerade ist. Sind p, q irgend zwei Punkte allgemeiner Lage auf g, so ordnet das Nullsystem jedem dieser Punkte nach Definition eine Nullebene zu, in der g nicht liegt. (Siehe Fig. 47.) Diese beiden Nullebenen schneiden sich also in einer zu g windschiefen Geraden h. Diese Gerade ist keine Nullgerade, denn sonst würden durch jeden Punkt r von h drei Nullgeraden gehen, die nicht in einer Ebene liegen, nämlich ausser h noch rp und rq. Alle Punkte von h wären also ausgezeichnet. Das Nullsystem bestände mithin aus allen Geraden, die h treffen, und wäre somit entgegen der Voraussetzung ein specielles.

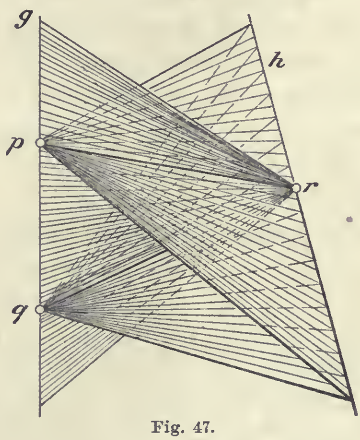

Fig. 47.

Ist r ein beliebiger Punkt von h, so ist also diesem Punkte die Nullebene zugeordnet, die rp und rq enthält. Daher sind diejenigen Geraden durch h, die g treffen, alle Nullgeraden überhaupt, die h schneiden. Wir können nun von h statt von g ausgehen und erkennen so, dass alle Nullgeraden, die g treffen, auch h treffen.

Wie wir in § 1, S. 187, bemerkten, bilden alle Geraden, die zwei windschiefe Geraden g, h treffen, ein *Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe.* Jeder Geraden g des Raumes ordnet das Nullsystem ein solches zu. Da es insgesamt ∞^4 Geraden g giebt, so erhalten wir ∞^4 derartige Systeme. Unsere Ergebnisse sind diese: **Strahlensyst. 1. O. u. 1. Cl.**

Satz 7: *Ein nicht specielles Nullsystem ordnet jeder Geraden g, die keine Nullgerade ist, eine zweite zu ihr windschiefe Gerade h zu, die* *ebenfalls keine Nullgerade ist. Nullgeraden, die g treffen, treffen auch h, und umgekehrt. Alle Geraden, die g und h treffen, sind Nullgeraden.*

Ferner gilt, und zwar offenbar auch für specielle Systeme, der

Satz 8: *Jedes Nullsystem enthält ∞^4 Strahlensysteme erster Ordnung und erster Classe.*

Die Beziehung zwischen der beliebig gewählten Geraden g und der durch g völlig bestimmten Geraden h ist eine völlig umkehrbare. Zwei solche Geraden sollen daher *reciproke Polaren* heissen. Jede Gerade, die keine Nullgerade ist, hat also eine Polare; letztere Gerade ist ebenfalls keine Nullgerade und hat erstere zur Polaren. Zwei reciproke Polaren werden auch *conjugierte Geraden* genannt*).

Reciproke Polaren.

Nehmen wir nun an, es sei l eine Nullgerade, und untersuchen wir, wie die Nullgeraden gelegen sind, die l schneiden. Es sei g eine zu l windschiefe Gerade, die nicht zu den Nullgeraden gehört: Die Gerade g hat eine Polare h, und h wird nach Satz 7 zu g und l windschief sein. Durch jeden Punkt p von l geht nun eine Gerade, die g und h trifft, also nach Satz 7 eine Nullgerade ist. Alle diese Geraden sind die Erzeugenden der einen Schar des Hyperboloids, von dem g, h und l Erzeugende der andern Schar sind. In jedem Punkt p von l kennen wir also ausser l noch eine zweite Nullgerade, demnach auch die dem Punkte zugeordnete Nullebene, die Tangentenebene des Hyperboloids im Punkte p. Diese Tangentenebenen bilden aber bekanntlich ein Büschel, das der Punktreihe der Punkte p projectiv zugeordnet ist. Mithin ergiebt sich, dass alle durch l gehenden Nullgeraden ein *specielles Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe* bilden. (Vgl. § 1, S. 187.) Es gilt somit der

Specielles Strahlensyst. 1. O. u. 1. Cl.

Satz 9: *In einem nicht-speciellen Nullsystem bilden alle Nullgeraden, die eine bestimmte Nullgerade treffen, ein specielles Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe. Das Nullsystem enthält also ∞^3 specielle Strahlensysteme erster Ordnung und erster Classe.*

Diese Betrachtung lehrt noch, dass die Nullgeraden, die eine bestimmte Nullgerade l schneiden, als Tangenten jenes Hyperboloids längs l nicht sämtlich eine zweite Gerade schneiden ausser der zu l unendlich benachbarten Erzeugenden des Hyperboloids. Wenn wir den Polarenbegriff auch auf die Nullgeraden ausdehnen wollen, müssen wir daher sagen, *dass die Nullgeraden ihre eigenen Polaren sind.*

*) Die reciproken Polaren treten schon bei Poinsot auf. (*Sur la composition des momens et la composition des aires*, Journ. de l'École polyt. 6. Bd., 13. Heft (1806), S. 182.)

Die Beziehung zwischen reciproken Polaren kann noch etwas anders aufgefasst werden: Sind g, h reciproke Polaren, so lehrt das Obige, dass die Nullebenen aller Punkte von g die Gerade h enthalten. Wenn man insbesondere vier Punkte von g in's Auge fasst: p_1, p_2, p_3, p_4 (siehe Fig. 48), so zeigt dies ferner, dass die zugehörigen Nullebenen e_1, e_2, e_3, e_4 dasselbe Doppelverhältnis wie p_1, p_2, p_3, p_4 bilden. Also haben wir den

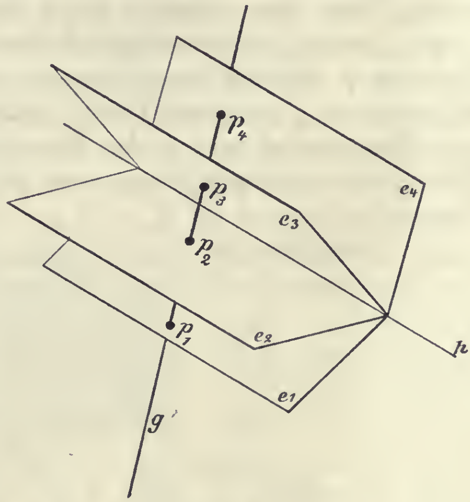

Fig. 48.

Satz 10: *Die den Punkten einer Geraden zugeordneten Nullebenen eines Nullsystems bilden ein zu dieser Punktreihe projectives Büschel, dessen Axe die Polare jener Geraden ist.*

Dass dies auch dann gilt, wenn die gegebene Gerade selbst Nullgerade ist, zeigt unsere vorhergehende Betrachtung.

Es seien nun l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 fünf zu einander windschiefe Nullgeraden, die nicht alle fünf ein und demselben der im Nullsysteme enthaltenen Strahlensysteme erster Classe und erster Ordnung angehören. Kennen wir fünf derartige Nullgeraden, so lässt sich aus ihnen das ganze Nullsystem wieder herstellen. Zu diesem Zwecke construieren wir das Hyperboloid, das l_1, l_2, l_3 als Erzeugende der einen Schar enthält. (Siehe Fig. 49 (S. 216).) Die Erzeugenden der zweiten Schar des Hyperboloids sind dann alle Geraden, die l_1, l_2, l_3 treffen. Unter ihnen giebt es zwei, die auch l_4 treffen. Denn l_4 wird das Hyperboloid in zwei Punkten schneiden und die Erzeugenden der zweiten Schar, g, h, die durch diese Punkte gehen, werden l_1, l_2, l_3, l_4 schneiden. Allerdings wäre es zunächst denkbar, dass l_4 ganz auf dem Hyperboloid liegt. Aber wir wollen vorerst diese Möglichkeit beiseite lassen ebenso wie die, dass l_5 ganz auf dem Hyperboloid liegt. Unsere Betrachtung lehrt nun, dass g, h die beiden einzigen Geraden sind, die l_1, l_2, l_3, l_4 schneiden. Daraus folgt, dass g und h reciproke Polaren sind. Alle Geraden also, die g und h schneiden, sind Nullgeraden. Sie bilden eines der besprochenen Strahlensysteme. Ist p ein beliebiger

Construction des Nullsyst. aus fünf Nullgeraden.

Punkt des Raumes, so giebt es eine einzige Gerade γ durch p, welche die beiden zu einander windschiefen Geraden g und h trifft. Sie ist eine Nullgerade. Dies gilt auch dann, wenn l_4 das Hyperboloid berührt. Denn dann rücken g und h einander unendlich nahe und das durch g und h bestimmte Strahlensystem wird ein specielles. In diesem Falle ist γ diejenige einzige Gerade von p aus, die das Hyperboloid in einem auf g gelegenen Punkte berührt.

Entsprechend wird l_5 das Hyperboloid in zwei Punkten treffen. Die durch sie gelegten Erzeugenden der zweiten Schar, g' und h', sind

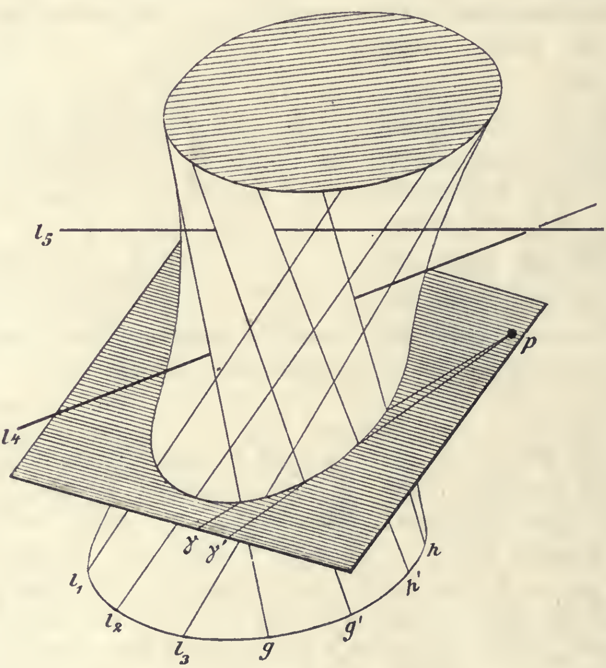

Fig. 49.

die einzigen Geraden, die l_1, l_2, l_3 und l_5 treffen. Sie fallen sicher nicht mit g, h zusammen, weil sonst l_5 dem durch g und h bestimmten Strahlensystem angehören würde, in dem schon l_1, l_2, l_3, l_4 enthalten sind. Dies widerspräche der Voraussetzung. Von dem beliebig gewählten Punkte p geht wieder nur eine Nullgerade γ' aus, die g' und h' trifft. γ und γ' fallen nicht zusammen, denn sonst würden g, h, g', h' sämtlich γ schneiden, d. h. γ wäre eine Erzeugende der ersten Art, p läge also auf dem Hyperboloid.

Mithin können wir durch jeden allgemeinen Punkt p des Raumes zwei verschiedene Nullgeraden γ, γ' construieren. Ihre Ebene ist die dem Punkte p zugeordnete Nullebene.

Wir sahen vorhin davon ab, dass l_4 oder l_5 auf dem Hyperboloid liegt. Wenn aber etwa l_5 auf dem Hyperboloid läge, also eine Erzeugende wäre, so müsste sie eine Erzeugende der ersten Schar sein, da sie zu l_1, l_2, l_3 nach Voraussetzung windschief ist. Dann aber würden alle fünf Geraden l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 die Geraden g, h schneiden, also alle demselben Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe angehören, was ausdrücklich ausgeschlossen wurde.

Wir setzten voraus, dass l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 zu einander windschiefe Nullgeraden seien, die nicht sämtlich einem Strahlensystem erster Ordnung oder erster Classe angehören. Solche fünf Nullgeraden sind sicher vorhanden. Denn wir könnten vier der Geraden als windschiefe Nullgeraden wählen, die nicht alle vier auf einer Fläche zweiten Grades liegen. Dann leuchtet ein, dass sie alle vier nur einem Strahlensystem angehören. Da dies aber nur ∞^2 Nullgeraden enthält, da ferner das Nullsystem nicht aus allen ∞^3 Geraden besteht, die eine dieser vier Geraden schneiden, so giebt es unter allen ∞^3 Nullgeraden sicher eine fünfte, die zu diesen vier Nullgeraden windschief ist und nicht zu ihrem Strahlensystem gehört. Also erfüllen alle fünf die Voraussetzungen.

Wir haben gefunden:

Satz 11: *Jedes nicht specielle Nullsystem ist eindeutig bestimmt durch Angabe von fünf zu einander windschiefen Nullgeraden, die nicht sämtlich einem Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe angehören.*

Unsere früheren Überlegungen haben uns nun ∞^5 Nullsysteme geliefert: Wir fanden (S. 212), dass alle Geraden

$$x = rz + \varrho, \quad y = sz + \sigma, \tag{33}$$

deren Bestimmungsstücke durch eine Gleichung von der Form

$$A\sigma - B\varrho + C(s\varrho - r\sigma) + Dr + Es + G = 0 \tag{36}$$

verknüpft sind, ein Nullsystem definieren.

Nehmen wir an, es seien uns fünf Geraden im Raume gegeben. Verlangen wir dann, dass sie einem dieser Nullsysteme angehören sollen, so erhalten wir nach (36) *fünf* in A, B, C, D, E, G lineare homogene Gleichungen zur Bestimmung von A, B, C, D, E, G. Es giebt aber stets solche endliche und nicht sämtlich verschwindende Werte dieser sechs Grössen, welche den fünf Gleichungen genügen. Es giebt mithin stets mindestens eines unter jenen früher bestimmten Nullsystemen (33), (36), dem fünf beliebig gegebene Geraden angehören.

Andererseits haben wir erkannt, dass sich nur ein Nullsystem ergiebt, sobald die fünf gewählten Geraden windschief sind und nicht sämtlich einem Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe angehören. Beides zusammen ergiebt das

Allgemeines Nullsystem.

Theorem 7: *Das allgemeinste Nullsystem wird definiert durch solche ∞^3 Geraden*

$$x = rz + \varrho, \quad y = sz + \sigma,$$

deren Bestimmungsstücke r, ϱ, s, σ einer Gleichung von der Form genügen:

$$A\sigma - B\varrho + C(s\varrho - r\sigma) + Dr + Es + G = 0,$$

in der A, B, C, D, E, G irgend welche Constanten bedeuten.

Insbesondere sind hierunter nach den letzten Betrachtungen auch alle *speciellen* Nullsysteme enthalten.

Nach Gleichung (35) (S. 211) ergiebt sich ferner

Allgem. Pfaff'sche Gl. mit ∞^3 Integralgeraden.

Satz 12: *Die allgemeinste Pfaff'sche Gleichung im Raume (x, y, z), die ∞^3 Integralgeraden besitzt, hat die Form:*

$$A(ydz - zdy) + B(zdx - xdz) + C(xdy - ydx) + \\ + Ddx + Edy + Gdz = 0,$$

in der A, B, C, D, E, G irgend welche Constanten bedeuten. Die ∞^3 Integralgeraden definieren ein Nullsystem.

Ausserdem ist jetzt bewiesen:

Satz 13: *Es giebt insgesamt ∞^5 Nullsysteme.*

Nach Definition ordnet ein Nullsystem jedem Punkte eine Nullebene zu, nämlich die Ebene der durch den Punkt gehenden Nullgeraden.

Ausgezeichnete Pkte. u. Ebenen.

Wir haben oben hervorgehoben, dass es denkbar ist, dass durch ausgezeichnete Punkte ∞^2 Nullgeraden gehen. Ebenso könnte es ausgezeichnete Ebenen geben, in denen alle ∞^2 Geraden Nullgeraden wären. Aber es ist nicht schwer einzusehen, dass dies bei einem nichtspeciellen Nullsystem nie eintritt. Denn wenn p ein ausgezeichneter Punkt wäre und l irgend eine nicht durch p gehende Nullgerade, so würden in der Ebene durch p und l ausser l noch alle Geraden durch p Nullgeraden sein, d. h. jede Gerade der Ebene wäre Nullgerade, also die Ebene ausgezeichnet. Jede nicht in der Ebene liegende Nullgerade trifft die Ebene dann in einem Punkte, durch den drei nicht in einer Ebene liegende Nullgeraden gehen, d. h. in einem ausgezeichneten

Punkte. Da es nur ∞^3 Nullgeraden giebt, so dürfen sie die Ebene folglich nur in ∞^1 Punkten, also in einer Curve treffen. Aber alle ∞^3 Geraden, die eine Curve treffen, bilden offenbar nur dann ein Nullsystem, wenn die Curve eine Gerade ist. Dann liegt jedoch ein specielles Nullsystem vor.

Also giebt es bei einem nicht-speciellen Nullsystem weder ausgezeichnete Punkte noch ausgezeichnete Ebenen. Wir können dies auch so aussprechen: In einem nicht-speciellen Nullsystem giebt es keinen Punkt, durch den drei nicht in einer Ebene liegende Nullgeraden gehen, und keine Ebene, in der drei nicht durch einen Punkt gehende Nullgeraden liegen.

Das Nullsystem ordnet auch jeder Ebene einen Punkt zu. Da es nämlich ∞^3 Nullgeraden giebt und jede in ∞^1 Ebenen liegt, so enthält eine Ebene ∞^1 Nullgeraden. Bei einem nicht-speciellen Nullsystem müssen diese nach dem soeben Gesagten ein *einziges Büschel* bilden. Der Scheitel dieses Büschels heisst der *Nullpunkt* der Ebene. Die Nullebene eines Punktes hat also den Punkt zum Nullpunkt.

Wir wenden uns jetzt einer anderen Betrachtung zu: Eine beliebige Punkttransformation des Raumes wird die ∞^3 Geraden eines Nullsystems in ∞^3 Curven verwandeln, derart, dass durch jeden Punkt ∞^1 der Curven gehen, die dann eine gewisse Fläche bilden, nämlich eine der ∞^3 Flächen, in welche die Ebenen übergehen. Soll nun aber die Transformation die Nullgeraden wieder in Nullgeraden eines Nullsystems verwandeln, so müssen die durch einen Punkt gehenden Nullgeraden, die ja ein Büschel bilden, wieder in ein Büschel übergehen. Daraus folgt, dass *jede* Ebene des Raumes in eine Ebene übergehen muss. Anders ausgedrückt: Die Transformation muss *projectiv* sein. Trf. des Nullsyst. in ein Nullsyst.

Eine *projective Transformation* des Raumes (x, y, z) hat bekanntlich die Form: Project. Transf.

$$(37)\qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1}{a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4}, \\ y_1 = \dfrac{a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2}{a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4}, \\ z_1 = \dfrac{a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3}{a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4}, \end{cases}$$

in der alle drei Brüche denselben Nenner haben und die a_i, b_i, c_i, d_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ beliebige Constanten bedeuten, deren Determinante nicht verschwindet. Da eine projective Transformation jedes ebene Büschel in ein ebenes Büschel verwandelt, so führt sie in der That jedes Nullsystem in ein Nullsystem über. Es hat sich somit ergeben:

Satz 14: *Soll eine Punkttransformation des Raumes die Geraden eines gegebenen Nullsystems wieder in die Geraden eines Nullsystems verwandeln, so muss sie projectiv sein. Eine projective Transformation führt überhaupt jedes Nullsystem in ein Nullsystem über.*

Da die Nullgeraden die Integralgeraden der zugehörigen Pfaff'schen Gleichung sind und diese Gleichung völlig bestimmen, so können wir auch sagen:

Satz 15: *Jede Pfaff'sche Gleichung von der Form:*

$$A(y\,dz - z\,dy) + B(z\,dx - x\,dz) + C(x\,dy - y\,dx) + \\ + D\,dx + E\,dy + G\,dz = 0$$

geht in eine Pfaff'sche Gleichung von derselben Form über, sobald man auf die Veränderlichen x, y, z irgend eine projective Transformation ausübt.

Dies lässt sich ohne Mühe analytisch verificieren, indem man untersucht, wie sich die Ausdrücke $y_1\,dz_1 - z_1\,dy_1, \dots$ sowie dx_1, dy_1, dz_1 selbst infolge von (37) darstellen. Zur Vermeidung von Irrtümern sei aber darauf hingewiesen, dass wir *nicht* bewiesen haben, dass die projectiven Transformationen die einzigen wären, die eine gegebene *Pfaff'sche Gleichung* von obiger Form wieder in eine solche verwandeln. Man kann vielmehr zeigen, dass es eine viel grössere Kategorie von Transformationen der Veränderlichen x, y, z giebt, die dies thun. Wir kommen auf diesen Punkt später zu sprechen.

Die allgemeine projective Transformation (37) enthält 16 willkürliche Constanten, von denen aber nur ihre 15 Verhältnisse als wesentlich in betracht kommen. Es giebt daher ∞^{15} projective Transformationen im Raume. Andererseits giebt es nach Satz 13 nur ∞^5 Nullsysteme. Hieraus kann man nun folgern, dass jedes Nullsystem bei mindestens ∞^{10} projectiven Transformationen invariant bleibt. Wenn nämlich die Pfaff'sche Gleichung eines Nullsystems:

$$(38)\quad \begin{cases} A(y\,dz - z\,dy) + B(z\,dx - x\,dz) + C(x\,dy - y\,dx) + \\ \qquad + D\,dx + E\,dy + G\,dz = 0 \end{cases}$$

bei der projectiven Transformation (37) übergeht in diese:

$$(39)\quad \begin{cases} A_1(y_1\,dz_1 - z_1\,dy_1) + B_1(z_1\,dx_1 - x_1\,dz_1) + C_1(x_1\,dy_1 - y_1\,dx_1) + \\ \qquad + D_1\,dx_1 + E_1\,dy_1 + G_1\,dz_1 = 0, \end{cases}$$

so sind die fünf Coefficientenverhältnisse $A_1 : B_1 : C_1 : D_1 : E_1 : G_1$ von (39) Functionen der fünf Coefficientenverhältnisse $A : B : C : D : E : G$ von (38) sowie der 15 Coefficientenverhältnisse der Transformation (37). Verlangen wir nun, dass (39) dieselben Coefficientenverhältnisse wie (38) habe, so giebt dies *fünf* Bedingungsgleichungen für die 15 Verhältnisse der Coefficienten der Transformation. Es bleiben also mindestens 10 dieser Verhältnisse willkürlich. *Jedes Nullsystem gestattet somit mindestens* ∞^{10} *projective Transformationen.* Wir werden nachher sehen, dass es, sobald es nicht-speciell ist, *nur* ∞^{10} gestattet.

Vorher wollen wir jedoch ein beliebiges nicht-specielles Nullsystem durch Ausführung einer passenden projectiven Transformation auf eine besonders einfache Form bringen. **Reduction eines Nullsystems.**

Ein allgemeines Nullsystem wird nach Theorem 7 definiert durch die ∞^3 Nullgeraden:

(40) $$x = rz + \varrho, \quad y = sz + \sigma,$$

deren Bestimmungsstücke die Gleichung erfüllen:

(41) $$A\sigma - B\varrho + C(s\varrho - r\sigma) + Dr + Es + G = 0.$$

Wie jede Ebene, so besitzt auch die unendlich ferne einen Nullpunkt. Wir können ihn durch eine passende projective, nämlich durch eine *lineare* Transformation in den unendlich fernen Punkt der z-Axe verlegen. Alsdann liegen also alle zur z-Axe parallelen Nullgeraden unendlich fern. Nehmen wir an, diese lineare Transformation sei schon ausgeführt und dadurch seien die Nullgeraden in die Geraden (40), (41) verwandelt. Alsdann darf es keine im Endlichen gelegene Nullgerade parallel der z-Axe geben:

$$x = \varrho, \quad y = \sigma,$$

d. h. es darf kein endliches Wertepaar ϱ, σ geben, für das (41) bei der Annahme $r = s = 0$ erfüllt wird. Dies ist aber nur dann der Fall, wenn $A = B = 0$ und $G \neq 0$ ist, sodass (41) die einfachere Form hat:

(41') $$C(s\varrho - r\sigma) + Dr + Es + G = 0 \quad (G \neq 0).$$

Wäre $C = 0$, so würden die Geraden (40), die dieser Gleichung (41') genügen, sämtlich der Ebene

$$Dx + Ey + Gz = 0$$

parallel sein. Sie schnitten dann sämtlich die unendlich ferne Gerade dieser Ebene, sodass das Nullsystem ein specielles wäre. Mithin ist

$$C \neq 0$$

anzunehmen. Wir können durch C dividieren, d. h. $C = 1$ setzen.

Wir führen nun abermals eine *lineare* Transformation aus, indem wir den ganzen Raum parallel der (xy)-Ebene verschieben. Da in (40) r, s die Richtung der Geraden, ϱ, σ ihren Schnittpunkt mit der (xy)-Ebene bestimmen, so bleiben r, s dabei ungeändert, während

ϱ und σ etwa um die Constanten a, b wachsen, sodass anstelle von (41′), worin $C = 1$ ist, die Gleichung tritt:

$$s\varrho - r\sigma - as + br + Dr + Es + G = 0.$$

Wählen wir $a = E$, $b = -D$, so haben wir also statt (41′) die noch einfachere Gleichung:

$$(41'') \qquad s\varrho - r\sigma + G = 0,$$

in der $G \neq 0$ ist.

Nun üben wir schliesslich die *lineare* Transformation

$$x_1 = x, \quad y_1 = y, \quad z_1 = \frac{z}{c}$$

aus. Dabei geht die Gerade (40) über in die Gerade:

$$x_1 = crz_1 + \varrho, \quad y_1 = csz_1 + \sigma,$$

d. h. für die neue Gerade ist

$$r_1 = cr, \quad s_1 = cs, \quad \varrho_1 = \varrho, \quad \sigma_1 = \sigma,$$

sodass (41″) giebt:

$$s_1\varrho_1 - r_1\sigma_1 + cG = 0.$$

G war verschieden von Null. Wir dürfen also $c = \frac{1}{G}$ wählen, sodass kommt:

$$s_1\varrho_1 - r_1\sigma_1 + 1 = 0.$$

Wir haben nach einander drei lineare Transformationen ausgeführt. Ihre Aufeinanderfolge ist durch eine einzige lineare Transformation zu ersetzen. Also kommt:

Normalform des allg. Nullsystems.

Satz 16: *Jedes nicht-specielle Nullsystem lässt sich durch Ausführung einer passenden linearen Transformation überführen in das Nullsystem, dessen Nullgeraden:*

$$x = rz + \varrho, \quad y = sz + \sigma$$

der Gleichung

$$s\varrho - r\sigma + 1 = 0$$

genügen.

Hieraus folgt noch:

Satz 17: *Jedes nicht-specielle Nullsystem lässt sich durch lineare Transformation in jedes andere nicht-specielle Nullsystem überführen.*

Was die speciellen Nullsysteme anbetrifft, so sind sie in zwei Classen einzuteilen: Entweder liegt die Gerade, die von allen Nullgeraden geschnitten wird, im Endlichen oder aber unendlich fern. Im ersteren Fall kann sie durch *lineare* Transformation in die z-Axe, im letzteren in die unendlich ferne Gerade der (xy)-Ebene übergeführt werden. Alle Geraden

$$x = rz + \varrho, \quad y = sz + \sigma$$

aber, welche die z-Axe schneiden, sind gegeben durch:

$$s\varrho - r\sigma = 0,$$

alle Geraden, welche die unendlich ferne Gerade der (xy)-Ebene schneiden, durch:

$$z = \text{Const.}$$

Wenn wir jedesmal die zugehörige Pfaff'sche Gleichung aufstellen, so finden wir den

Satz 18: *Die Pfaff'sche Gleichung eines Nullsystems:* Normalformen d. Pfaff'schen Gl. bei linearer Trf.

$$A(y\,dz - z\,dy) + B(z\,dx - x\,dz) + C(x\,dy - y\,dx) + \\ + D\,dx + E\,dy + G\,dz = 0$$

lässt sich durch lineare Transformation überführen entweder in:

$$x\,dy - y\,dx + dz = 0$$

oder in:

$$x\,dy - y\,dx = 0$$

oder endlich in:

$$dz = 0.$$

Diese drei Typen sind durch lineare Transformation nicht in einander überführbar.

Wohl aber kann man durch *projective* Transformation mehr erreichen. Zwar lässt sich ein nicht-specielles Nullsystem nie durch eine solche in ein specielles verwandeln, aber alle speciellen lassen sich in Systeme überführen, deren Nullgeraden die z-Axe treffen. Also folgt: Normalformen bei project. Trf.

Satz 19: *Die Pfaff'sche Gleichung eines Nullsystems*

$$A(y\,dz - z\,dy) + B(z\,dx - x\,dz) + C(x\,dy - y\,dx) + \\ + D\,dx + E\,dy + G\,dz = 0$$

kann durch projective Transformation überführt werden entweder in

$$x\,dy - y\,dx + dz = 0$$

oder aber in

$$x\,dy - y\,dx = 0.$$

Hieran reiht sich noch der

Satz 20: *Jedes Nullsystem ist durch projective Transformation überführbar in das System aller der Geraden*

$$x = rz + \varrho, \quad y = sz + \sigma,$$

die entweder der Bedingung

$$s\varrho - r\sigma + 1 = 0$$

oder aber der Bedingung

$$s\varrho - r\sigma = 0$$

genügen. Die Systeme der letzten Art sind die speciellen.

Proj. Trfn. eines Nullsystems.

Wollen wir *alle projectiven Transformationen* bestimmen, *die ein Nullsystem invariant lassen*, so können wir uns mithin auf die beiden im letzten oder vorigen Satze aufgestellten Typen beschränken.

Suchen wir zunächst alle projectiven Transformationen, die das specielle Nullsystem

$$s\varrho - r\sigma = 0$$

in sich überführen, so handelt es sich um die Bestimmung derer, die die z-Axe invariant lassen. Dies sind nach (37) diejenigen, bei denen die Constanten c_1, d_1, c_2, d_2 gleich Null sind, sodass noch 11 Verhältnisse der Constanten willkürlich bleiben.

Satz 21: *Jedes specielle Nullsystem gestattet gerade ∞^{11} projective Transformationen.*

Wir kommen zu dem nicht-speciellen Nullsystem, dessen Pfaff'sche Gleichung wir nach Satz 19 in der Form zugrunde legen dürfen:

$$x\,dy - y\,dx + dz = 0. \tag{42}$$

Bei der projectiven Transformation (37) ist*)

$$x_1\,dy_1 - y_1\,dx_1 + dz_1 = \frac{PdQ - QdP + NdR - RdN}{N^2},$$

wenn wir für den Augenblick die Zähler der Ausdrücke (37) mit P, Q, R, den gemeinsamen Nenner mit N bezeichnen. Wir haben also zu fordern, dass

$$PdQ - QdP + NdR - RdN$$

gleich Null sei infolge von (42). Da dieser Ausdruck wie die linke Seite von (42) homogen und linear in dx, dy, dz, sowie linear in x, y, z ist, so muss er also die Form

$$\text{Const.}\,(x\,dy - y\,dx + dz)$$

haben. Wir fordern somit, dass für alle Werte von x, y, z, dx, dy, dz die Gleichung

$$PdQ - QdP + NdR - RdN = k(x\,dy - y\,dx + dz)$$

bestehe, in der k eine Constante bedeutet. Dies liefert zunächst 12 Bedingungen, von denen aber drei identisch erfüllt sind. Von den übrigen

*) Der folgende Nachweis, dass ein nicht-specielles System gerade ∞^{10} projective Transformationen gestattet, wird hier mit möglichst elementaren Hülfsmitteln geführt. Kürzer würde er sich gestalten, wenn begriffliche Betrachtungen benutzt würden.

sind drei sofort als überzählig auszuscheiden, und es bleiben die sechs Bedingungen:

$$(43)\qquad \begin{cases} a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_4 b_3 - a_3 b_4 = k, \\ d_1 c_2 - d_2 c_1 + d_4 c_3 - d_3 c_4 = k, \\ a_1 c_2 - a_2 c_1 + a_4 c_3 - a_3 c_4 = 0, \\ b_1 c_2 - b_2 c_1 + b_4 c_3 - b_3 c_4 = 0, \\ a_1 d_2 - a_2 d_1 + a_4 d_3 - a_3 d_4 = 0, \\ b_1 d_2 - b_2 d_1 + b_4 d_3 - b_3 d_4 = 0. \end{cases}$$

Wenn wir die in der projectiven Transformation (37) nicht auftretende Constante k dadurch fortschaffen, dass wir die beiden ersten Gleichungen von einander subtrahieren, so erhalten wir schliesslich *fünf* Gleichungen für die 15 Verhältnisse der Constanten a_i, b_i, c_i, d_i $(i = 1, 2, 3, 4)$. Dies sind die oben (S. 221) erwähnten Bedingungen. Zur Berechnung der Constanten wird man jedoch die sechs Gleichungen (43) beibehalten können. Sie sind z. B. nach den sechs Grössen $a_1, b_1, c_1, d_1, a_3, b_3$ auflösbar. Denn sie sind in ihnen linear und ihre Determinante hinsichtlich dieser Grössen ist nicht identisch Null. Also lassen sich sechs der Constanten durch die übrigen zehn und die willkürliche Grösse k ausdrücken, oder auch: fünf der Constantenverhältnisse lassen sich durch die übrigen zehn ausdrücken. Damit ist aber bewiesen:

Satz 22: *Jedes nicht-specielle Nullsystem gestattet gerade ∞^{10} projective Transformationen.*

Die Aufeinanderfolge zweier solcher Transformationen lässt ebenfalls das Nullsystem invariant; da sie einer projectiven Transformation äquivalent ist, muss diese also ebenfalls zu den ∞^{10} Transformationen gehören. Jene ∞^{10} projectiven Transformationen bilden mithin eine *Gruppe*, und zwar, wie wir sagen, eine *zehngliedrige Gruppe.* Entsprechendes gilt von den ∞^{11} projectiven Transformationen eines speciellen Nullsystems. Wir sagen daher:

Satz 23: *Jedes nicht-specielle Nullsystem gestattet eine zehngliedrige, jedes specielle eine elfgliedrige Gruppe von projectiven Transformationen.*

Fragen wir insbesondere nach den *infinitesimalen* projectiven Transformationen eines Nullsystems in sich. Inf. proj. Trfn. eines Nullsystems

Soll die projective Transformation (37) infinitesimal sein, so müssen die in (37) auftretenden Brüche unendlich wenig von x, y, z verschieden sein. Dies ist der Fall, wenn a_1, b_2, c_3, d_4 unendlich wenig von einander oder, was auf dasselbe hinauskommt, von Eins und die übrigen Constanten unendlich wenig von Null verschieden sind. Wir setzen also

$$\begin{array}{lll} a_1 = 1 + \alpha_1 \delta t, & b_1 = \beta_1 \delta t, & c_1 = \gamma_1 \delta t, \quad \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ a_2 = \alpha_2 \delta t, & b_2 = 1 + \beta_2 \delta t, & \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot & & \end{array}$$

Wenn wir dann nach Potenzen von δt entwickeln und nur die Glieder erster Ordnung berücksichtigen, so übersehen wir, dass sich ergiebt:

$$(37') \begin{cases} x_1 = x + [\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 - x(\alpha_4 x + \beta_4 y + \gamma_4 z + \delta_4)]\, \delta t, \\ y_1 = y + [\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2 - y(\alpha_4 x + \beta_4 y + \gamma_4 z + \delta_4)]\, \delta t, \\ z_1 = z + [\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z + \delta_3 - z(\alpha_4 x + \beta_4 y + \gamma_4 z + \delta_4)]\, \delta t \end{cases}$$

als *allgemeinste infinitesimale projective Transformation.* Soll sie die Pfaff'sche Gleichung (42) invariant lassen, so müssen die Gleichungen (43) für die obigen Werte $a_1 = 1 + \alpha_1 \delta t$, $b_1 = \beta_1 \delta t$ u. s. w. erfüllt sein. Dies liefert zunächst, dass auch k die Form $1 + \varkappa \delta t$ hat, und ausserdem, wenn nur die Glieder erster Ordnung in δt berücksichtigt werden:

$$\alpha_1 + \beta_2 = \gamma_3 + \delta_4 = \varkappa,$$

$$\alpha_4 + \gamma_2 = \beta_4 - \gamma_1 = \alpha_3 - \delta_2 = \beta_3 + \delta_1 = 0.$$

Es ist also:

$$\beta_2 = \varkappa - \alpha_1, \quad \gamma_1 = \beta_4, \quad \gamma_2 = -\alpha_4, \quad \gamma_3 = \varkappa - \delta_4,$$

$$\delta_1 = -\beta_3, \quad \delta_2 = \alpha_3$$

zu setzen. Führen wir diese Werte in (37′) ein, so sehen wir, dass sich die Incremente, die x, y, z erfahren, linear aus Gliedern zusammensetzen, die mit den elf Factoren behaftet sind: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_1, \beta_3, \beta_4, \gamma_4, \delta_3, \delta_4$ und $\varkappa$. Setzt man je eine dieser Constanten, die ganz beliebig sind, gleich Eins, aber alle anderen gleich Null, so findet man also elf einzelne infinitesimale Transformationen. Eine von ihnen lässt sich jedoch linear aus zwei anderen ableiten, sodass nur zehn verbleiben. Aus diesen lässt sich alsdann die allgemeine infinitesimale projective Transformation des vorgelegten Nullsystems linear (mit beliebigen constanten Coefficienten) wieder ableiten. (Vgl. § 5 des 4. Kap., S. 123.) Die Symbole der einzelnen zehn infinitesimalen projectiven Transformation sind — wenn wir einige noch mit -1 multiplicieren — diese:

$$\boxed{\begin{array}{c}
\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + x\frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}, \\
x\frac{\partial f}{\partial y}, \quad x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y}, \quad y\frac{\partial f}{\partial x}, \\
x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + 2z\frac{\partial f}{\partial z}, \\
z\frac{\partial f}{\partial x} - y\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}\right), \\
z\frac{\partial f}{\partial y} + x\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}\right), \\
z\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}\right).
\end{array}}$$

Sie sind von einander unabhängig. Also gilt der

Satz 24: *Jedes nicht-specielle Nullsystem gestattet zehn von einander unabhängige infinitesimale projective Transformationen. Die allgemeinste, die es gestattet, ist die allgemeinste aus diesen zehn linear ableitbare.*

Nach Satz 18 lässt sich die Pfaff'sche Gleichung eines nicht-speciellen Nullsystems durch lineare Transformation auf die Form bringen:

(44) $$x\,dy - y\,dx + dz = 0.$$

In dieser Form steht es in enger Beziehung zu einer *infinitesimalen Schraubung*, die wir schon oben (S. 210) betrachteten und auf die wir hier noch einmal zurückkommen wollen.

Die Nullgeraden sind alle diejenigen Geraden, die man in allen Punkten senkrecht errichten kann auf die Fortschreitungsrichtungen, die den Punkten vermöge der infinitesimalen Schraubung

(45) $$\delta x = -y\delta t, \quad \delta y = x\delta t, \quad \delta z = \delta t$$

zukommen. Bei dieser Schraubung bewegt sich jeder Punkt auf einer Schraubenlinie:

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = t + b.$$

a, b bedeuten hierbei Constanten. Die Nullgeraden sind alle ∞^3 Geraden, welche die ∞^2 Schraubenlinien senkrecht schneiden. Die invariante Axe der Schraubung, die z-Axe, heisst die *Centralaxe* des Nullsystems. Centralaxe d. Nullsystems.
Unter den ∞^{10} projectiven Transformationen des Nullsystems in sich befinden sich nun einige besonders einfache: Zunächst die Rotationen um die Centralaxe, denn diese führen die Schraubenlinien in einander über und daher auch die Nullgeraden. Ferner die Translationen

längs der z-Axe, von denen dasselbe gilt. Endlich die Transformationen:

(46) $$x_1 = \lambda x, \quad y_1 = \lambda y, \quad z_1 = \lambda^2 z \quad (\lambda = \text{Const.}).$$

Dies letztere ist sofort zu verificieren, da

$$x_1\,dy_1 - y_1\,dx_1 + dz_1 = \lambda^2(x\,dy - y\,dx + dz)$$

ist. Wir können daher, sobald uns eine einzige Nullgerade bekannt ist, alle Nullgeraden aus ihr folgendermassen ableiten: Wir führen auf die gegebene Nullgerade alle Rotationen um die Centralaxe sowie alle Translationen längs der Centralaxe aus, d. h. also überhaupt alle Schraubungen um die z-Axe. Dies liefert ∞^2 Nullgeraden. Unterwerfen wir sie allen ∞^1 linearen Transformationen (46), so ergeben sich alle ∞^3 Nullgeraden.

Der Überblick, den man hierdurch von der Gesamtheit der Nullgeraden erhält, kann noch durch folgende Bemerkung klarer werden: Schneiden wir alle Nullgeraden

$$x = rz + \varrho, \quad y = sz + \sigma,$$

für die ja nach S. 222

(47) $$s\varrho - r\sigma + 1 = 0$$

ist, durch die Ebene $z = 0$ und die Parallelebene $z = 1$, so werden auf ihnen Strecken abgeschnitten. Diese projicieren wir auf die Ebene $z = 0$. So erhalten wir ∞^3 *Strecken*, die das Nullsystem bildlich wiedergeben. Es sind ϱ, σ die Coordinaten des einen und $r + \varrho$, $s + \sigma$

Abbildg. der Nullgeraden als Strecken.

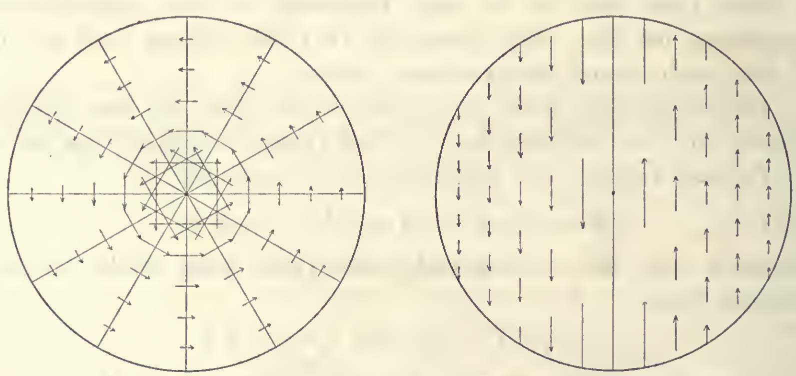

Fig. 50.

die des anderen Endpunktes einer solchen Strecke. Die Relation (47), die sich auch so schreiben lässt:

$$(s + \sigma)\,\varrho - (r + \varrho)\,\sigma = -1,$$

sagt aus, dass die Dreiecke, die von den Strecken und dem Anfangspunkt bestimmt werden, alle gleichen Inhalt haben. Oder auch: *Das*

Drehungsmoment aller dieser ∞^3 *Strecken hinsichtlich des Anfangspunktes ist constant.* In den beiden Figuren 50 (S. 228) sind je ∞^2 dieser Strecken durch eine Anzahl Pfeile angedeutet, einmal solche, die aus ∞^1 durch Rotation um den Anfangspunkt hervorgehen, und dann solche, die aus ∞^1 durch Verschiebung in ihren Geraden hervorgehen. Beide Figuren zusammen geben einen Überblick über alle ∞^3 Strecken und demnach über alle ∞^3 Nullgeraden.

Schliesslich sei bemerkt: Ersetzen wir die infinitesimale Schraubung (45) durch eine infinitesimale Rotation um die z-Axe:

$$\delta x = -y\delta t, \quad \delta y = x\delta t, \quad \delta z = 0,$$

so treten an die Stelle der Schraubenlinien Kreise und anstelle des allgemeinen Nullsystems das specielle, dessen Pfaff'sche Gleichung lautet:

$$x\,dy - y\,dx = 0,$$

und dessen Nullgeraden sämtlich die z-Axe schneiden.

Als Abschluss des Paragraphen wollen wir noch angeben, wie man ausgehend von einer *bilinearen Relation* in x, y, z, x_1, y_1, z_1 nach Möbius*) zu dem allgemeinen Nullsystem gelangt:

Eine allgemeine bilineare Gleichung:

$$(48)\quad \begin{cases} (a_1x + b_1y + c_1z + d_1)\,x_1 + (a_2x + b_2y + c_2z + d_2)\,y_1 + \\ + (a_3x + b_3y + c_3z + d_3)\,z_1 + (a_4x + b_4y + c_4z + d_4) = 0 \end{cases}$$

ordnet jedem Punkte (x, y, z) des Raumes eine Ebene zu, geschrieben in den laufenden Coordinaten x_1, y_1, z_1, und umgekehrt jedem Punkt (x_1, y_1, z_1) eine Ebene, geschrieben in den laufenden Coordinaten x, y, z. Diese Zuordnung heisst bekanntlich die allgemeine *Dualität im Raume***). **Dualität im Raume.**

Verlangt man nun, dass die dem Punkte (x, y, z) zugeordnete Ebene stets den Punkt enthalte, so muss (48) identisch für alle Werte von x, y, z bestehen, sobald man x_1, y_1, z_1 durch x, y, z ersetzt. Dies liefert Bedingungen für die Coefficienten, und man findet als allgemeinste bilineare Relation (48), die der Forderung genügt, folgende:

$$(49)\quad \begin{cases} (Bz - Cy + D)\,x_1 + (Cx - Az + E)\,y_1 + \\ + (Ay - Bx + G)\,z_1 - (Dx + Ey + Gz) = 0. \end{cases}$$

---

*) Möbius, *Über eine besondere Art dualer Verhältnisse zwischen Figuren im Raume*, Crelle's Journ. 10. Bd. (1833), S. 317, Ges. Werke 1. Bd., S. 489.

**) Es entspricht dies der in § 5 des 2. Kap., S. 56, behandelten allgemeinen Dualität in der Ebene. Wie letztere factisch eine Berührungstransformation in der Ebene ist, so ist erstere eine Berührungstransformation im Raume. Da wir aber die Berührungstransformationen im Raume erst im zweiten Teile dieses Werkes ausführlich besprechen, so deuten wir es hier nur nebenbei an.

Diese Relation ändert sich nicht, wenn x, y, z mit x_1, y_1, z_1 vertauscht werden. Die beiden Zuordnungen von Punkten und Ebenen, die durch die allgemeine bilineare Relation bestimmt werden, sind hier also mit einander identisch. Die bilineare Relation (49) bestimmt mithin eine *involutorische Dualität*. (Vgl. S. 7.)

Involut. Dualität.

In der Ebene nun, welche die Relation (49) einem Punkte (x, y, z) zuordnet, und die, wie wir es eingerichtet haben, den Punkt enthält, sei $(x + dx,\ y + dy,\ z + dz)$ ein dem Punkt (x, y, z) unendlich benachbarter Punkt. Alsdann muss die Relation (49) erfüllt werden, wenn darin x_1, y_1, z_1 durch $x + dx,\ y + dy,\ z + dz$ ersetzt werden. Dies giebt:

$$(Bz - Cy + D)\,dx + (Cx - Az + E)\,dy + (Ay - Bx + G)\,dz = 0$$

oder, anders geordnet:

$$A(y\,dz - z\,dy) + B(z\,dx - x\,dz) + C(x\,dy - y\,dx) + \\ + D\,dx + E\,dy + G\,dz = 0.$$

Hiermit aber sind wir auf die Pfaff'sche Gleichung eines allgemeinen Nullsystems geführt. Die involutorische Dualität, die durch die bilineare Relation (49) vermittelt wird, ist also nichts anderes als die Zuordnung von Nullpunkt und Nullebene in einem Nullsystem.

§ 4. Über die Curven eines Nullsystems*).

Es liege ein Nullsystem vor, und es sei

$$(50)\qquad A(y\,dz - z\,dy) + B(z\,dx - x\,dz) + C(x\,dy - y\,dx) + \\ + D\,dx + E\,dy + G\,dz = 0$$

oder, anders geordnet,

$$(50')\quad (Bz - Cy + D)\,dx + (Cx - Az + E)\,dy + (Ay - Bx + G)\,dz = 0$$

seine Pfaff'sche Gleichung. Diese Pfaff'sche Gleichung besitzt nach § 2 (S. 193) unendlich viele Integralcurven, die definiert sind als die Curven, die in jedem ihrer Punkte eine der Richtungen zur Tangente haben, die dem Punkte durch die Pfaff'sche Gleichung zugeordnet sind. Da nun im jetzigen Falle diese Richtungen durch die Nullgeraden gegeben sind, die durch den Punkt gehen, so folgt, dass die Integralcurven der Pfaff'schen Gleichung (50) die Curven sind, deren Tangenten sämtlich Nullgeraden sind. Wir nennen sie auch *Curven des Nullsystems*. Sind x, y, z die Coordinaten der Punkte einer solchen Curve, so werden

Curven des Nullsystems.

*) Die Entwickelungen dieses Paragraphen rühren von Lie her. Vgl. Verhandlg. d. Ges. d. Wiss. zu Christiania 1871, Mathem. Annalen 5. Bd. (1872), S. 154 (Z. 20 v. o.) u. S. 179, Verhandlg. d. Ges. d. Wiss. zu Christiania 1883.

sie solche Functionen einer Hülfsveränderlichen t sein, deren Incremente dx, dy, dz der Gleichung (50′) genügen. Wenn wir also durch Accent die Differentiation nach t bezeichnen, so werden diese Functionen von t der einzigen Bedingung unterworfen sein:

$$(51)\quad (Bz - Cy + D)\,x' + (Cx - Az + E)\,y' + (Ay - Bx + G)\,z' = 0.$$

Wie wir aus § 2 wissen, bestimmt diese Differentialgleichung x, y, z nur bis auf willkürliche Functionen. Zu den Curven des Nullsystems gehören insbesondere auch die Nullgeraden.

Durch jeden Punkt (x, y, z) gehen unendlich viele Curven des Nullsystems. Sie berühren daselbst sämtlich die Nullebene, die dem Punkte (x, y, z) durch das Nullsystem zugeordnet ist. Es ist leicht einzusehen, dass diese Ebene sogar ihre *Schmiegungsebene* ist. Es geht nämlich aus (51) durch Differentiation nach t, wie man am bequemsten übrigens mit Rücksicht auf die Form (50) der Pfaff'schen Gleichung erkennt, die Gleichung hervor: Schmiegungsebene.

$$(Bz - Cy + D)\,x'' + (Cx - Az + E)\,y'' + (Ay - Bx + G)\,z'' = 0.$$

Aus dieser Gleichung und (51) folgt also:

$$(52)\qquad \frac{Bz - Cy + D}{y'z'' - y''z'} = \frac{Cx - Az + E}{z'x'' - z''x'} = \frac{Ay - Bx + G}{x'y'' - x''y'}.$$

Die Nenner sind bekanntlich proportional den Richtungscosinus der Schmiegungsebene. Da die Zähler frei von den Ableitungen von x, y, z sind, so folgt, dass die Schmiegungsebene in jedem Punkte (x, y, z) eine ganz bestimmte, nämlich offenbar die Nullebene des Punktes ist.

Satz 25: *Alle Curven eines Nullsystems, die durch einen bestimmt gewählten Punkt gehen, haben daselbst eine gemeinsame Schmiegungsebene, nämlich die dem Punkte zugeordnete Nullebene.*

Dieser Satz lässt sich geometrisch leicht plausibel machen: Sind t und t' zwei consecutive Tangenten einer Curve des Nullsystems, so schneiden sie sich in einem Punkte p der Curve und ihre Ebene ist die Schmiegungsebene der Curve. Andererseits aber sind t, t' Nullgeraden. Ihre Ebene ist also die Nullebene des Punktes p.

Wir können dem Satz 25 noch einen zweiten analogen Satz an die Seite stellen:

Satz 26: *Alle Curven eines Nullsystems, die durch einen bestimmt gewählten Punkt gehen, haben daselbst die gleiche Torsion*).* Torsion der Curven des Nullsystems.

---

*) Siehe Verhdl. (Sitzungsber.) d. Ges. d. Wiss. zu Christiania 1883, S. 20.

Dieser Satz ist deshalb besonders merkwürdig, weil wir das Nullsystem *projectiv* definiert haben, während die Torsion ihrer Natur nach ein *metrischer* Begriff ist.

Zum Beweise entnehmen wir aus den Formeln (52), dass die Richtungscosinus der Schmiegungsebene oder Binormalen der Curve des Nullsystems im Punkte (x, y, z) proportional sind den Grössen:

$$(53)\qquad \alpha = Bz - Cy + D, \quad \beta = Cx - Az + E, \quad \gamma = Ay - Bx + G.$$

Bei Benutzung dieser Bezeichnung lautet die Differentialgleichung (51) der Curve des Nullsystems

$$(51') \qquad \alpha x' + \beta y' + \gamma z' = 0$$

und die Pfaff'sche Gleichung

$$(50'') \qquad \alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz = 0.$$

Ist nun

$$(54) \qquad \varrho^2 = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2},$$

so sind die Richtungscosinus der Schmiegungsebene oder Binormale:

$$\lambda = \varrho\alpha, \quad \mu = \varrho\beta, \quad \nu = \varrho\gamma.$$

Noch merken wir an, dass aus (53) unmittelbar folgt:

$$d\alpha\, dx + d\beta\, dy + d\gamma\, dz = 0,$$

sodass diese Gleichung und (50'') liefern:

$$(55) \qquad \begin{cases} dx = \sigma(\beta\, d\gamma - \gamma\, d\beta), \qquad dy = \sigma(\gamma\, d\alpha - \alpha\, d\gamma), \\ \qquad\qquad dz = \sigma(\alpha\, d\beta - \beta\, d\alpha). \end{cases}$$

Nachher wird sich zeigen, dass σ eine *Constante* ist. Nun ist das Quadrat des Winkels zweier benachbarter Schmiegungsebenen:

$$d\tau^2 = d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2 = S(\varrho\, d\alpha + \alpha\, d\varrho)^2 =$$
$$= \varrho^2 S d\alpha^2 + 2\varrho\, d\varrho\, S\alpha\, d\alpha + d\varrho^2 S\alpha^2,$$

wenn nämlich das Summenzeichen S jedesmal über alle drei Ausdrücke zu erstrecken ist, die durch cyklische Vertauschung von α, β, γ hervorgehen. Nach (54) ist aber:

$$\varrho^2 = \frac{1}{S\alpha^2}, \quad \varrho\, d\varrho = -\frac{S\alpha\, d\alpha}{(S\alpha^2)^2},$$

sodass kommt:

$$d\tau^2 = \frac{S\alpha^2 \cdot S d\alpha^2 - (S\alpha\, d\alpha)^2}{(S\alpha^2)^2}.$$

Bezeichnet ds das Bogenelement der Curve, so ist also das Quadrat der Torsion:

$$\left(\frac{d\tau}{ds}\right)^2 = \frac{S\alpha^2 \cdot S d\alpha^2 - (S\alpha\, d\alpha)^2}{(S\alpha^2)^2\, ds^2}.$$

Der Zähler lässt sich aber so schreiben:

$$(\beta d\gamma - \gamma d\beta)^2 + (\gamma d\alpha - \alpha d\gamma)^2 + (\alpha d\beta - \beta d\alpha)^2,$$

ist also nach (55) gleich $\frac{ds^2}{\sigma^2}$, sodass wir erhalten:

$$\left(\frac{d\tau}{ds}\right)^2 = \frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2 \sigma^2}. \tag{56}$$

α, β, γ hängen nach (53) nur von x, y, z ab. Dasselbe gilt von σ, denn aus der ersten Gleichung (55) folgt nach (53):

$$\frac{dx}{\sigma} = A\{A(y\,dz - z\,dy) + B(z\,dx - x\,dz) + C(x\,dy - y\,dx)\} + \\ + E(A\,dy - B\,dx) - G(C\,dx - A\,dz)$$

oder wegen der Pfaff'schen Gleichung (50):

$$\frac{dx}{\sigma} = -A(D\,dx + E\,dy + G\,dz) + E(A\,dy - B\,dx) - G(C\,dx - A\,dz),$$

d. h.:

$$\frac{1}{\sigma} = -(AD + BE + CG).$$

Die Torsion ist also nach (56):

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{-(AD + BE + CG)}{(Bz - Cy + D)^2 + (Cx - Az + E)^2 + (Ay - Bx + G)^2}. \tag{57}$$

Sie hängt nur von x, y, z ab, sodass alle Curven des Nullsystems durch den Punkt (x, y, z) daselbst die gleiche Torsion haben. Hiermit ist Satz 25 bewiesen.

Wir wissen, dass das Nullsystem, sobald die invariante Centralaxe keine Minimalgerade ist, bei passender Wahl des rechtwinkligen Coordinatensystems die Gleichung erhält (vgl. § 3, S. 210):

$$x\,dy - y\,dx + k\,dz = 0. \tag{58}$$

Hier ist insbesondere:

$$A = B = 0, \quad C = 1, \quad D = E = 0, \quad G = k,$$

sodass (57) liefert:

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{-k}{x^2 + y^2 + k^2}. \tag{59}$$

Auch ist jetzt die z-Axe die Centralaxe des Nullsystems. Wir sehen hieraus: Die Curven des Nullsystems haben in allen den Punkten, in denen sie einen Rotationscylinder um die Centralaxe schneiden, die gleiche Torsion. Ist r der Radius des Cylinders, so ist die Torsion gleich:

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{-k}{r^2 + k^2}.$$

Dasselbe gilt für alle Nullsysteme, bei denen $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ ist (S. 209). Daraus folgt wegen (57), dass die Gleichung

$$(Bz - Cy + D)^2 + (Cx - Az + E)^2 + (Ay - Bx + G)^2 = \text{Const.}$$

Rotationscylinder um die Axe des Nullsystems vorstellt.

Anknüpfend an (58) und (59) bemerken wir noch: Das Nullsystem (58) wurde zu Anfang des § 3 (S. 210) durch Ausgang von einer infinitesimalen Schraubung

$$\delta x = -y\delta t, \quad \delta y = x\delta t, \quad \delta z = k\delta t$$

erhalten. Wenn wir unter δt ein Zeitelement verstehen, so können wir sagen, dass diese Schraubung die *Geschwindigkeit* hat:

$$v = \frac{\delta s}{\delta t} = \frac{\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2}}{\delta t} = \sqrt{x^2 + y^2 + k^2}.$$

Nach (59) besteht also zwischen der Torsion $\frac{d\tau}{ds}$ der durch den Punkt (x, y, z) gehenden Curven des Complexes und der Geschwindigkeit v, die dem Punkte durch die Schraubung erteilt wird, die Relation:

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{-k}{v^2}.$$

In § 2 haben wir erkannt, wie man unendlich viele von einer willkürlichen Function abhängende Integralcurven einer vorgelegten Pfaff'schen Gleichung durch Differentiation aus ∞^2 bekannten Integralcurven ableiten kann (vgl. Satz 5, S. 206). Von der jetzt vorliegenden Pfaff'schen Gleichung (50) sind uns nun sogar ∞^3 Integralcurven bekannt, nämlich die Nullgeraden des zugehörigen Nullsystems. Wir werden *direct* ableiten, wie man aus ihnen unendlich viele Integralcurven zu finden vermag, die von willkürlichen Functionen abhängen.

Regelfläche v. Nullgeraden. Zu diesem Zwecke betrachten wir eine von ∞^1 Nullgeraden gebildete *Regelfläche*. Die Tangentenebenen der Regelfläche in den Punkten einer ihrer Erzeugenden g enthalten sämtlich diese Erzeugende und bilden also ein Büschel, dessen Axe die Erzeugende ist. Aus der Flächentheorie ist bekannt, dass die Ebenen dieses Büschels projectiv auf die jeweiligen Berührpunkte, also auf die Punktreihe der Erzeugenden g bezogen sind.

Andererseits ordnet das Nullsystem jedem Punkte von g eine Ebene zu. Dieselbe enthält g, da g eine Nullgerade ist. Nach Satz 10 des § 3 (S. 215) sind auch diese Nullebenen projectiv auf ihre Nullpunkte bezogen.

Um die Erzeugende g der Regelfläche, die aus ∞^1 Nullgeraden gebildet ist, legen sich somit zwei Büschel von Ebenen, die auf die Punkte der Geraden g projectiv bezogen sind. Mithin sind auch diese Ebenenbüschel projectiv auf einander bezogen. Da aber zwei projectiv aufeinander bezogene einförmige Gebilde im Allgemeinen zwei Doppelelemente (im besonderen eines) haben, so folgt: Auf der Geraden g wird es zwei Punkte p und q geben, in denen die Tangentenebene der Regelfläche zugleich die Ebene ist, die dem Punkte p bez. q durch das Nullsystem zugeordnet wird. So erhalten wir auf jeder Geraden g der Regelfläche zwei Punkte p, q. Der Ort dieser Punkte ist eine Curve, die also im allgemeinen jede Erzeugende in zwei Punkten trifft. Diese Curve ist eine Curve des Nullsystems, da sie in jedem Punkte p die dem Punkte zugeordnete Ebene berührt. Nach Satz 25 hat sie zu Schmiegungsebenen lauter Tangentenebenen der Regelfläche und ist daher eine *Haupttangentencurve der Regelfläche.* Wir finden somit eine die Erzeugende in je zwei Punkten schneidende Haupttangentencurve der Regelfläche ohne weiteres. **Haupttangentencurve.**

Da nun bei der Auswahl der Regelfläche willkürliche Functionen auftreten, so erkennt man, dass wir hiermit unendlich viele Curven des Nullsystems finden. Umgekehrt betrachten wir irgend eine Curve des Nullsystems. Es giebt stets Regelflächen von Nullgeraden, die durch sie hindurchgehen. Also folgt, *dass die soeben angegebene Construction alle Curven des Nullsystems liefert.*

Nach einem Satze von Bonnet sind die Haupttangentencurven einer Regelfläche bei Einführung passender Flächencoordinaten u, v durch eine Riccati'sche Gleichung: **Bestimmg. aller Haupttgcurven.**

$$\frac{dv}{du} + U(u) + U_1(u)\,v + U_2(u)\,v^2 = 0$$

bestimmt. Die Flächencoordinate u ist dabei längs jeder Erzeugenden constant, während v variiert. Wir können nun eine passende Function von v so als neue Flächencoordinate v einführen, dass v auf den Haupttangentencurven nach wie vor durch eine Riccati'sche Gleichung mit u verknüpft ist und dass überdies $v = 0$ und $v = \infty$ die Schnittpunkte der allgemeinen Erzeugenden (u) mit der bekannten Haupttangentencurve liefert. Alsdann aber reduciert sich die Integration der Riccatischen Gleichung, von der $v = 0$ und $v = \infty$ zwei particulare Lösungen sind, bekanntlich auf die durch eine Quadratur zu erledigende Integration einer homogenen linearen Differentialgleichung

$$\frac{dv}{du} + U_1(u)\,v = 0.$$

Auch wenn — ausnahmsweise — die eine bekannte Haupttangentencurve, die Curve des Nullsystems ist, jede Erzeugende der Regelfläche nur in einem Punkte $v = \infty$ trifft, so reduciert sich die Riccati'sche Gleichung auf eine lineare, die bekanntlich durch Quadratur integrierbar ist. Also:

Satz 27: *Auf jeder Regelfläche, deren geradlinige Erzeugende Nullgeraden eines gegebenen Nullsystems sind, findet man durch Differentiation eine Haupttangentencurve, die jede Erzeugende zweimal schneidet, und sodann durch Quadratur alle Haupttangentencurven* *).

Analyt. Durchführung.

Um die obigen Überlegungen zum Teil auch analytisch wiederzugeben, betrachten wir eine beliebige Regelfläche, deren Geraden Nullgeraden des zur Pfaff'schen Gleichung

$$x\,dy - y\,dx + k\,dz = 0 \tag{60}$$

gehörenden Nullsystems sind. Dies ist keine Specialisierung, weil sich jedes Nullsystem durch lineare Transformation auf diese Form bringen lässt (nach Satz 18 des § 3, S. 223). Die Geraden $u =$ Const. der Regelfläche

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u) + \lambda(u)\,v, \\ y &= \psi(u) + \mu(u)\,v, \\ z &= \chi(u) + \nu(u)\,v \end{aligned}$$

gehören diesem Nullsystem nur dann an, wenn die Gleichung (60) durch diese Werte und die aus ihnen durch partielle Differentiation nach v folgenden Werte von dx, dy, dz identisch erfüllt wird. Dies liefert sofort:

$$\nu = \frac{\lambda\psi - \mu\varphi}{k},$$

sodass die allgemeinste Regelfläche, deren Geraden Nullgeraden sind, hier die Gleichungen hat:

$$\left\{\begin{aligned} x &= \varphi(u) + \lambda(u)\,v, \\ y &= \psi(u) + \mu(u)\,v, \\ z &= \chi(u) + \frac{1}{k}(\lambda\psi - \mu\varphi)\,v. \end{aligned}\right. \tag{61}$$

Die Tangentenebene der Fläche im Punkte (u, v) hat Richtungscosinus proportional den zweireihigen Unterdeterminanten der Matrix:

$$\left|\begin{matrix} \varphi' + \lambda' v & \psi' + \mu' v & \chi' + \frac{1}{k}(\lambda\psi - \mu\varphi)'\,v \\ \lambda & \mu & \frac{1}{k}(\lambda\psi - \mu\varphi) \end{matrix}\right|.$$

*) Siehe Verhandl. d. Ges. d. Wiss. zu Christiania 1871, S. 102; Math. Annalen 5. Bd. (1872), S. 179.

Ferner hat die dem Punkte (u, v) oder (x, y, z) durch das Nullsystem zugeordnete Ebene Richtungscosinus proportional

$$-y, \qquad x, \qquad k$$

oder nach (61):

$$-\psi - \mu v, \quad \varphi + \lambda v, \quad k.$$

Sollen beide Ebenen übereinstimmen, so sind die einen Grössen den anderen proportional zu setzen. Dies liefert anscheinend zwei, in Wahrheit nur die eine Bedingung:

$$(62) \quad \varphi\psi' - \psi\varphi' + k\chi' + 2(\lambda\psi' - \mu\varphi')\, v + (\lambda\mu' - \mu\lambda')\, v^2 = 0.$$

Die Gleichung liefert für v zwei Functionen von u. Sie stellt diejenige Haupttangentencurve der Fläche dar, die Curve des Nullsystems ist. Die Gleichungen (61) stellen uns die *allgemeinste Curve des Nullsystems* dar, sobald wir darin für v einen aus (62) folgenden Wert setzen, während φ, ψ, χ, λ, μ beliebige Functionen von u sind. Durch Quadratur findet man alle Haupttangentencurven der Fläche (61).

Dies sei an einem speciellen Beispiel durchgeführt: Die Regelflächen, deren Geraden dem *speciellen* Nullsystem

$$y\,dx - x\,dy = 0$$

angehören, haben allgemein eine Gleichung von der Form:

$$z = F\left(\frac{y}{x}\right).$$

Hier ist:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -F' \cdot \frac{y}{x^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = F' \cdot \frac{1}{x},$$

also

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = F'' \cdot \frac{y^2}{x^4} + 2F' \frac{y}{x^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = -F'' \cdot \frac{y}{x^3} - F' \cdot \frac{1}{x^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = F'' \cdot \frac{1}{x^2},$$

sodass die Differentialgleichung der Haupttangentencurven lautet:

$$(F''y^2 + 2F'yx)\, dx^2 - 2(F''y + F'x)\, x\, dx\, dy + F''x^2\, dy^2 = 0$$

oder:

$$(y\,dx - x\,dy)(F''(y\,dx - x\,dy) + 2F'x\,dx) = 0.$$

Der erste Factor giebt die Geraden der Regelfläche. Der zweite liefert eine in x, y homogene Differentialgleichung. Setzen wir

$$y = ux,$$

so kommt:

$$-xF''(u)\,du + 2F'\,dx = 0,$$

also integriert:

$$F'\left(\frac{y}{x}\right) = \text{Const.}\, x^2.$$

Diese Gleichung stellt zusammen mit

$$F\left(\frac{y}{x}\right) = z$$

die krummen Haupttangentencurven der vorgelegten Fläche dar.

Schliesslich sei noch hervorgehoben, dass, wenn die vorgelegte Regelfläche *algebraisch* ist, auch die Haupttangentencurve, die Curve des Nullsystems ist und jede Erzeugende zweimal trifft, *algebraisch* ist, was unmittelbar einleuchtet.

§ 5. Beziehung zwischen den Geraden eines Nullsystems und den Kreisen in der Ebene *).

Wir haben die Pfaff'sche Gleichung eines allgemeinen Nullsystems auf die typische Form gebracht (vgl. Satz 19, § 3, S. 223):

$$x\,dy - y\,dx + dz = 0. \tag{63}$$

Diese Gleichung können wir auch so schreiben:

$$d(z + xy) - 2y\,dx = 0.$$

Setzen wir daher:

$$\mathfrak{x} = x, \quad \mathfrak{y} = z + xy, \quad \mathfrak{p} = 2y, \tag{64}$$

so kommt in den neuen Veränderlichen die Pfaff'sche Gleichung:

$$d\mathfrak{y} - \mathfrak{p}\,d\mathfrak{x} = 0. \tag{65}$$

Es ist dies aber die Pfaff'sche Gleichung, die wir in § 1 untersuchten, mit dem Unterschiede, dass wir jetzt ihre Veränderlichen zur Unterscheidung statt mit x, y, p mit $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p}$ bezeichnet haben. Wohlbemerkt definiert diese Pfaff'sche Gleichung, wenn $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p}$ als rechtwinklige Punktcoordinaten im Raume gedeutet werden, durchaus kein Nullsystem, da sie nicht die in Satz 12 des § 3 (S. 218) angegebene Form hat. Dies war aber auch nicht anders zu erwarten, da die Transformation (64) im Raume nicht projectiv ist.

Abbildung d. Pkte. d. Raumes als Linienel. d. Ebene.

Deuten wir $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ als rechtwinklige Punktcoordinaten in der Ebene und dementsprechend $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p}$ als Coordinaten der Linienelemente der Ebene, so entspricht jedem Linienelement $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p})$ der Ebene infolge von (64) ein Punkt (x, y, z) des Raumes. Diese Beziehung ist nach (64) *ein-eindeutig*. Es werden also wie in § 1 die Linienelemente der Ebene als Punkte des Raumes abgebildet. Die jetzige Abbildungsart hat einen besonderen Vorzug:

*) Die Entwickelungen dieses Paragraphen rühren von Lie her. Vgl. Math. Ann. 5. Bd. (1872), Göttinger Nachrichten 1874 und ausführlicher die *Theorie der Transformationsgruppen*, Bd. 2, 24. Kap.

Jeder Schar von ∞^1 Linienelementen der $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$-Ebene entspricht eine Curve des Raumes (x, y, z) und umgekehrt, also gerade so wie in § 1. Aber *jedem Elementverein der Ebene*, jeder Schar also, die (65) erfüllt, *entspricht* eine Integralcurve der Pfaff'schen Gleichung (63), also *eine Curve des zugehörigen Nullsystems.* Umgekehrt ist *jede Curve des Nullsystems das Bild eines Elementvereines der Ebene.* Vermöge dieser Abbildung kann man also ohne weiteres, da man alle Elementvereine der Ebene kennt, alle Curven des Nullsystems bestimmen. Eine andere Bestimmung derselben gaben wir im vorigen Paragraphen (S. 237).

Wenn der Elementverein in der Ebene aus allen Linienelementen eines Punktes $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ besteht, so ist seine Bildcurve im Raume (x, y, z) nach (64) eine Curve:

$$x = \text{Const.}, \quad z + xy = \text{Const.},$$

also eine gewisse Gerade. Besteht der Elementverein aus allen Elementen einer Curve, so wird er gegeben durch zwei Gleichungen von der Form:

$$\omega(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0, \quad \mathfrak{p} = -\frac{\omega_{\mathfrak{x}}}{\omega_{\mathfrak{y}}}.$$

Wenn wir hierin für $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p}$ ihre Werte (64) einsetzen, so ergiebt sich die allgemeinste Curve unseres Nullsystems.

Man kann sich fragen, welchen Curven der Ebene — aufgefasst als Elementvereinen — die Nullgeraden im Raume entsprechen. Eine Nullgerade **Bilder der Nullgeraden.**

(66) $$x = rz + \varrho, \quad y = sz + \sigma$$

wird bestimmt durch die Gleichung (vgl. Satz 20, § 3, S. 223):

(67) $$s\varrho - r\sigma + 1 = 0.$$

Setzen wir in (66) die aus (64) folgenden Werte:

(64′) $$x = \mathfrak{x}, \quad y = \frac{1}{2}\mathfrak{p}, \quad z = \mathfrak{y} - \frac{1}{2}\mathfrak{x}\mathfrak{p}$$

ein, so kommt:

(68) $$\mathfrak{x} = r\mathfrak{y} - \frac{1}{2}r\mathfrak{x}\mathfrak{p} + \varrho, \quad \mathfrak{p} = 2s\mathfrak{y} - s\mathfrak{x}\mathfrak{p} + 2\sigma.$$

Wählen wir die Constanten r, s, ϱ, σ hierin so, dass (67) erfüllt ist, so müssen diese beiden Gleichungen also einen Elementverein in der Ebene darstellen. Um die Curve zu finden, der die Elemente $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p})$ angehören, eliminieren wir $\mathfrak{p}$ aus (68). Dies giebt mit Rücksicht auf (67):

$$\mathfrak{y} = -\frac{\varrho}{r} + \frac{2}{r}\mathfrak{x} + \frac{s}{r}\mathfrak{x}^2,$$

also eine *Parabel.* Da durch (67) ϱ, r, s nicht gebunden werden, so sind die drei Coefficienten der letzten Gleichung ganz beliebig. Wir sehen somit: *Die* ∞^3 *Parabeln*

Parabeln.

$$\mathfrak{y} = a + 2b\mathfrak{x} + c\mathfrak{x}^2 \tag{69}$$

der $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$*-Ebene werden als die* ∞^3 *Nullgeraden im Raume abgebildet.*

Bild einer Pkttrf. des Raumes.

Betrachten wir irgend eine *Punkttransformation* im Raume:

$$x_1 = X(x, y, z), \quad y_1 = Y(x, y, z), \quad z_1 = Z(x, y, z). \tag{70}$$

Sie führt jeden Punkt (x, y, z) in einen Punkt (x_1, y_1, z_1) über. Diese Punkte sind die Bilder von Linienelementen $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p})$ und $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{p}_1)$ der $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$-Ebene. Also wird auch jedes Linienelement der Ebene in ein Linienelement übergeführt. Jeder Punkttransformation des Raumes entspricht somit eine Transformation der Linienelemente der Ebene, und dies lässt sich umkehren. Will man die Transformation der Linienelemente aufstellen, die der Transformation (70) des Raumes entspricht, so hat man nach (64′) in (70) die Werte

$$\tag{71} \begin{cases} x = \mathfrak{x}, \quad y = \frac{1}{2}\mathfrak{p}, \quad z = \mathfrak{y} - \frac{1}{2}\mathfrak{x}\mathfrak{p} \\ \text{und analog} \\ x_1 = \mathfrak{x}_1, \quad y_1 = \frac{1}{2}\mathfrak{p}_1, \quad z_1 = \mathfrak{y}_1 - \frac{1}{2}\mathfrak{x}_1\mathfrak{p}_1 \end{cases}$$

einzusetzen und nach $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{p}_1$ aufzulösen. Dies liefert die gesuchten Gleichungen:

$$\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{X}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p}), \quad \mathfrak{y}_1 = \mathfrak{Y}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p}), \quad \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{P}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p}). \tag{70′}$$

Berührgstrf. i. d. Ebene.

Ist letztere Transformation eine *Berührungstransformation,* so ist bei ihr, wie bekannt (vgl. § 3 des 2. Kap., S. 44):

$$d\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{p}_1 d\mathfrak{x}_1 = \tau(d\mathfrak{y} - \mathfrak{p}\, d\mathfrak{x}).$$

Vermöge (71) geht aber hieraus hervor:

$$x_1 dy_1 - y_1 dx_1 + dz_1 = \tau(x\, dy - y\, dx + dz),$$

d. h. die Transformation (70) lässt die Pfaff'sche Gleichung (63) unseres Nullsystems invariant.

Jeder Berührungstransformation der Ebene entspricht also eine solche Punkttransformation des Raumes, bei der die Pfaff'sche Gleichung des Nullsystems invariant bleibt, d. h. jede Curve des Nullsystems wieder in eine Curve des Nullsystems übergeht. Dies lässt sich selbstverständlich umkehren.

Da die allgemeinste Berührungstransformation in der Ebene von willkürlichen Functionen abhängt, so folgt, dass die allgemeinste

Punkttransformation des Raumes, bei der die Pfaff'sche Gleichung eines Nullsystems invariant bleibt, ebenfalls von willkürlichen Functionen abhängt. (Vgl. § 1, S. 192.)

Im allgemeinen wird eine derartige Transformation insbesondere die geradlinigen Integralcurven der Pfaff'schen Gleichung, d. h. die Nullgeraden, nicht wieder in Nullgeraden, sondern in krumme Curven des Nullsystems überführen. Wir haben aber in § 3 in Satz 14 (S. 220) gesehen, dass jede Punkttransformation des Raumes, die jede Nullgerade in eine Nullgerade verwandelt, projectiv ist, und in Satz 22 (S. 225), dass es deren insgesamt gerade ∞^{10} giebt. Da den Nullgeraden in der $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$-Ebene die Parabeln (69) entsprechen, so folgt daraus, dass es gerade ∞^{10} Berührungstransformationen in der Ebene giebt, die jede dieser Parabeln wieder in eine solche Parabel verwandeln. Project. Trfn. im Raume.

Da die ∞^3 Parabeln

$$\mathfrak{y} = a + 2b\mathfrak{x} + c\mathfrak{x}^2 \tag{69}$$

die Integralcurven der gewöhnlichen Differentialgleichung dritter Ordnung in $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$:

$$\frac{d^3\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}^3} = 0$$

sind, so folgt:

Satz 28: *Es giebt gerade ∞^{10} Berührungstransformationen in der $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$-Ebene, bei denen die gewöhnliche Differentialgleichung dritter Ordnung*

$$\frac{d^3\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}^3} = 0$$

invariant bleibt.

Insbesondere sagte Satz 24 des § 3 (S. 227) aus, dass es zehn von einander unabhängige *infinitesimale* projective Transformationen des Raumes giebt, bei denen jede Nullgerade in eine Nullgerade übergeht. Daraus können wir schliessen:

Satz 29: *Die gewöhnliche Differentialgleichung dritter Ordnung*

$$\frac{d^3\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}^3} = 0$$

gestattet gerade zehn von einander unabhängige infinitesimale Berührungstransformationen der $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$-Ebene und jede aus ihnen linear ableitbare.

Wir stellten damals auf S. 227 die zehn infinitesimalen projectiven Transformationen auf. Wenn wir nun in sie die Veränderlichen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{p}$ einführen, so erhalten wir die im letzten Satze genannten infinitesimalen Berührungstransformationen. Es kommt (vgl. § 3 des 4. Kap., S. 115):

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}}, \quad 2\mathfrak{x}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}} + 2\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{p}}, \quad \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}}, \\ \mathfrak{x}^2\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}} + 2\mathfrak{x}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{p}}, \quad \mathfrak{x}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} - \mathfrak{p}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{p}}, \quad \frac{\mathfrak{p}}{2}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} + \frac{\mathfrak{p}^2}{4}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}}, \\ \mathfrak{x}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} + 2\mathfrak{y}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}} + \mathfrak{p}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{p}}, \\ (\mathfrak{y} - \mathfrak{x}\mathfrak{p})\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} - \frac{1}{2}\mathfrak{x}\mathfrak{p}^2\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}} - \frac{1}{2}\mathfrak{p}^2\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{p}}, \\ \mathfrak{x}^2\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} + 2\mathfrak{x}\mathfrak{y}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}} + 2\mathfrak{y}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{p}}, \\ \mathfrak{x}\left(\mathfrak{y} - \frac{1}{2}\mathfrak{x}\mathfrak{p}\right)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} + \left(\mathfrak{y}^2 - \frac{1}{4}\mathfrak{x}^2\mathfrak{p}^2\right)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}} + \mathfrak{p}\left(\mathfrak{y} - \frac{1}{2}\mathfrak{x}\mathfrak{p}\right)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{p}}.\end{gathered}}$$

Die charakteristischen Functionen dieser infinitesimalen Berührungstransformationen sind die folgenden:

$$\begin{gathered}\mathfrak{p}, \qquad -2\mathfrak{x}, \qquad -1, \\ -\mathfrak{x}^2, \qquad \mathfrak{x}\mathfrak{p}, \qquad \frac{1}{4}\mathfrak{p}^2, \\ \mathfrak{x}\mathfrak{p} - 2\mathfrak{y}, \quad \mathfrak{y}\mathfrak{p} - \frac{1}{2}\mathfrak{x}\mathfrak{p}^2, \quad \mathfrak{x}^2\mathfrak{p} - 2\mathfrak{x}\mathfrak{y}, \\ \mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{p} - \frac{1}{4}\mathfrak{x}^2\mathfrak{p}^2 - \mathfrak{y}^2.\end{gathered}$$

Statt ihrer können wir folgende benutzen, die aus diesen linear ableitbar sind:

$$\boxed{\begin{gathered}1, \quad \mathfrak{x}, \quad \mathfrak{p}, \quad \mathfrak{x}^2, \quad \mathfrak{x}\mathfrak{p}, \quad \mathfrak{p}^2, \\ \mathfrak{y} - \frac{1}{2}\mathfrak{x}\mathfrak{p}, \\ \mathfrak{x}\left(\mathfrak{y} - \frac{1}{2}\mathfrak{x}\mathfrak{p}\right), \quad \mathfrak{p}\left(\mathfrak{y} - \frac{1}{2}\mathfrak{x}\mathfrak{p}\right), \\ \left(\mathfrak{y} - \frac{1}{2}\mathfrak{x}\mathfrak{p}\right)^2.\end{gathered}}$$

Im Vorhergehenden haben wir eine ein-eindeutige Abbildung der Punkte des Raumes in die Linienelemente $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p})$ der $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$-Ebene besprochen, bei der die Nullgeraden eines Nullsystems als die Parabeln

$$\mathfrak{y} = a + 2b\mathfrak{x} + c\mathfrak{x}^2 \tag{69}$$

der $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$-Ebene abgebildet werden. Diese Parabeln lassen sich als diejenigen Kegelschnitte der $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$-Ebene charakterisieren, welche die unendlich ferne Gerade in ihrem Schnittpunkt mit der $\mathfrak{y}$-Axe berühren, also daselbst ein Linienelement gemein haben.

Es gelingt nun, durch eine Berührungstransformation in der ($\mathfrak{x}\mathfrak{y}$)-*Ebene diese* ∞^3 *Parabeln überzuführen in die* ∞^3 *Kegelschnitte, welche durch die unendlich fernen Punkte der beiden Axen gehen,* also in alle gleichseitigen *Hyperbeln,* deren Asymptoten den Coordinatenaxen parallel sind. Zu dieser Berührungstransformation können wir auf folgendem Wege gelangen: **Trf. d. Parabeln in Hyperbeln.**

In der Schar jener ∞^3 Parabeln (69) sind alle ∞^2 Geraden der Ebene enthalten, gegeben durch die Gleichung, die hervorgeht, wenn $c = 0$ gesetzt wird:

(72) $$\mathfrak{y} = a + 2b\mathfrak{x}.$$

Andererseits enthält die Schar aller jener Hyperbeln, die wir zur Unterscheidung in den laufenden Coordinaten $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$ schreiben:

$$A\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1 + B\mathfrak{x}_1 + C\mathfrak{y}_1 + D = 0$$

ebenfalls alle ∞^2 Geraden der Ebene. Zunächst stellen wir nun eine Berührungstransformation auf, die die Geraden der Ebene wieder in die Geraden überführt, also eine Geradentransformation. (Vgl. § 3 des 3. Kap., S. 84, 85.) Dieselbe ist vollständig bestimmt (vgl. Satz 14, § 3 des 3. Kap., S. 83), sobald man angiebt, in welche Gerade jede bestimmte Gerade

(72) $$\mathfrak{y} = a + 2b\mathfrak{x}$$

übergehen soll. Wir wollen verlangen, dass sie in die Gerade

(73) $$\mathfrak{y}_1 = a - 4b^2\mathfrak{x}_1$$

übergehe. Um diese Berührungstransformation aufzustellen, beachten wir, dass die Differentialgleichung $\mathfrak{y}'' = 0$ aller Geraden die beiden intermediären Integrale $\mathfrak{y}'$ und $\mathfrak{y} - \mathfrak{x}\mathfrak{y}'$ besitzt. Bei der Geraden (72) ist

$$\mathfrak{y}' = 2b, \quad \mathfrak{y} - \mathfrak{x}\mathfrak{y}' = a$$

oder:

$$a = \mathfrak{y} - \mathfrak{x}\mathfrak{y}', \quad b = \frac{\mathfrak{y}'}{2}$$

und bei den Geraden (73) entsprechend

$$\mathfrak{y}_1' = -4b^2, \quad \mathfrak{y}_1 - \mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1' = a$$

oder:

$$a = \mathfrak{y}_1 - \mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1', \quad b = \frac{i}{2}\sqrt{\mathfrak{y}_1'}.$$

Nach den Formeln (34) des § 3 des 3. Kap. (S. 82) wird also die gesuchte Berührungstransformation der Linienelemente ($\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{y}'$) in die Linienelemente ($\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{y}_1'$) bestimmt durch die drei Gleichungen

$$(74)\qquad \mathfrak{y}_1 - \mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1' = \mathfrak{y} - \mathfrak{x}\mathfrak{y}', \quad \frac{i}{2}\sqrt{\mathfrak{y}_1'} = \frac{1}{2}\mathfrak{y}',$$

$$\frac{d(\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1')}{d\left(\frac{i}{2}\sqrt{\mathfrak{y}_1'}\right)} = \frac{d(\mathfrak{y} - \mathfrak{x}\mathfrak{y}')}{d\left(\frac{1}{2}\mathfrak{y}'\right)}.$$

Die letzte Gleichung giebt ausgerechnet, indem $\mathfrak{y}''$ und $\mathfrak{y}_1''$, wie es sein muss, fortfallen:

$$2i\mathfrak{x}_1\sqrt{\mathfrak{y}_1'} = -\mathfrak{x}.$$

Lösen wir diese und die beiden Gleichungen (74) nach $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{y}_1'$ auf, so erhalten wir die gesuchte Berührungstransformation. Von jetzt ab wollen wir wieder, wie gebräuchlich, $\mathfrak{y}'$ mit $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{y}_1'$ mit $\mathfrak{p}_1$ bezeichnen, sodass die Berührungstransformation lautet:

$$(75)\qquad \mathfrak{x}_1 = -\frac{1}{2}\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{p}}, \quad \mathfrak{y}_1 = \mathfrak{y} - \frac{1}{2}\mathfrak{x}\mathfrak{p}, \quad \mathfrak{p}_1 = -\mathfrak{p}^2.$$

Wenn wir nun diese Berührungstransformation auf alle ∞^3 Parabeln (69) ausüben, deren Linienelemente $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p})$ die beiden Gleichungen erfüllen:

$$\mathfrak{y} = a + 2b\mathfrak{x} + c\mathfrak{x}^2, \quad \mathfrak{p} = 2b + 2c\mathfrak{x},$$

so gehen ∞^3 Vereine von Linienelementen $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{p}_1)$ hervor, deren Punktorte sich durch Elimination von $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1$ aus den beiden letzten Gleichungen und aus (75) in der Form ergeben:

$$(76)\qquad 4c\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1 + 4(b^2 - ac)\,\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{y}_1 - a = 0.$$

Diese Gleichung aber stellt alle ∞^3 Kegelschnitte dar, die durch die unendlich fernen Punkte der Coordinatenaxen gehen.

Es ist ferner bekannt, dass die *Kreise der Ebene* definiert werden können als die ∞^3 Kegelschnitte, die durch die Kreispunkte der Ebene gehen. Indem wir durch eine *lineare Transformation* die unendlich fernen Punkte der $\mathfrak{x}_1$- und $\mathfrak{y}_1$-Axe in die Kreispunkte überführen, *werden wir also die ∞^3 Hyperbeln* (76) *in die Kreise der Ebene verwandeln.* Wir wählen die lineare Transformation in der Form:

Trf. d. Hyperbeln in die Kreise.

$$x_1 = \frac{\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{y}_1}{2i}, \quad y_1 = \frac{\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{y}_1}{2},$$

indem wir die neuen Punktcoordinaten in der Ebene mit x_1, y_1 bezeichnen. Erweitern wir diese Punkttransformation (vgl. § 1 des 1. Kap., S. 10 bis 12), so erhalten wir die Berührungstransformation:

$$(77)\qquad x_1 = \frac{\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{y}_1}{2i}, \quad y_1 = \frac{\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{y}_1}{2}, \quad p_1 = i\,\frac{1 + \mathfrak{p}_1}{1 - \mathfrak{p}_1}.$$

Wenn wir nacheinander die beiden Berührungstransformationen (75), (77) ausüben, so werden also die ∞^3 Parabeln (69) in die Kreise der Ebene verwandelt. Diese Aufeinanderfolge ist aber nach Satz 5 des 2. Kap. (S. 46) einer einzigen Berührungstransformation äquivalent, nämlich der, die durch Elimination der Veränderlichen $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{p}_1$ aus (75) und (77) hervorgeht:

$$(78)\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{-2\mathfrak{y}\mathfrak{p} + (\mathfrak{p}^2 - 1)\,\mathfrak{x}}{4i\mathfrak{p}}, \quad y_1 = \dfrac{2\mathfrak{y}\mathfrak{p} - (\mathfrak{p}^2 + 1)\,\mathfrak{x}}{4\mathfrak{p}}, \\ p_1 = i\,\dfrac{1 - \mathfrak{p}^2}{1 + \mathfrak{p}^2}. \end{cases}$$

Bei dieser Berührungstransformation ist, wie man leicht ausrechnet:

$$(78')\qquad dy_1 - p_1\,dx_1 = \frac{1}{1 + \mathfrak{p}^2}\,(d\mathfrak{y} - \mathfrak{p}\,d\mathfrak{x}).$$

Berührgs-trfn. d. Kreise der Ebene

Jetzt sind wir soweit, um von diesen Betrachtungen eine wichtige Anwendung zu machen. Wir haben oben (S. 241) alle ∞^{10} Berührungstransformationen der $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$-Ebene bestimmt, bei denen die Parabeln (69) unter einander vertauscht werden. Da diese Parabeln vermöge der Berührungstransformation (78) in alle Kreise der $(x_1 y_1)$-Ebene übergehen, so sehen wir zunächst:

Satz 30: *Die Schar aller Kreise der Ebene gestattet gerade* ∞^{10} *Berührungstransformationen.*

Aus Satz 29 folgt noch:

Satz 31: *Die Schar aller Kreise der Ebene gestattet gerade zehn von einander unabhängige infinitesimale Berührungstransformationen.*

Hiermit haben wir auf einem ganz anderen Wege einen schon früher aufgestellten Satz bewiesen. Man vergleiche Satz 6, § 3 des 5. Kap. (S. 150). In diesem früheren Satze haben wir zugleich die charakteristischen Functionen dieser zehn infinitesimalen Berührungstransformationen aufgestellt. Auch diese können wir hier von neuem bestimmen.

Um dies zu thun, haben wir nur die Berührungstransformation (78) auf die oben (S. 242) angegebenen zehn infinitesimalen Berührungstransformationen auszuüben, welche die Schar jener ∞^3 Parabeln invariant lassen. Wollen wir direct die charakteristischen Functionen der dadurch hervorgehenden infinitesimalen Berührungstransformationen aufstellen, so haben wir nach Satz 9, § 3 des 4. Kap. (S. 116), in die oben (S. 242) angegebenen charakteristischen Functionen, nachdem sie in Gemässheit der Formel (78′) mit

$$\varrho = \frac{1}{1 + \mathfrak{p}^2}$$

multipliciert worden sind, die neuen Veränderlichen x_1, y_1, p_1 vermöge der Gleichungen (78) einzuführen. Alsdann ergeben sich die charakteristischen Functionen:

$$\frac{1}{2}(1 - ip_1), \quad -(y_1 + ix_1)\sqrt{1 + p_1^2}, \quad \frac{1}{2}\sqrt{1 + p_1^2},$$
$$2(y_1 + ix_1)^2(1 + ip_1), \quad (y_1 + ix_1)(1 + ip_1), \quad \frac{1}{2}(1 + ip_1),$$
$$\frac{1}{2}(y_1 - ix_1)(1 - ip_1),$$
$$-(x_1^2 + y_1^2)\sqrt{1 + p_1^2}, \quad \frac{1}{2}(y_1 - ix_1)\sqrt{1 + p_1^2},$$
$$\frac{1}{2}(y_1 - ix_1)^2(1 - ip_1).$$

Sie sind zunächst noch sehr unübersichtlich und mit Imaginärem behaftet. Die charakteristische Function der allgemeinsten infinitesimalen Berührungstransformation, welche die Schar der Kreise

$$(x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2 = \gamma^2$$

invariant lässt, ist aber linear mit beliebigen constanten Coefficienten aus diesen zehn zusammensetzbar. Man übersieht nun, dass sie auch aus den folgenden zehn mit beliebigen constanten Coefficienten zusammensetzbar ist:

$$1, \quad p_1, \quad y_1 - x_1 p_1, \quad x_1 + y_1 p_1,$$
$$2x_1 y_1 + (y_1^2 - x_1^2)p_1, \quad y_1^2 - x_1^2 - 2x_1 y_1 p_1,$$
$$\sqrt{1 + p_1^2}, \quad x_1\sqrt{1 + p_1^2}, \quad y_1\sqrt{1 + p_1^2}, \quad (x_1^2 + y_1^2)\sqrt{1 + p_1^2}.$$

Dies sind aber genau dieselben wie in Satz 6, § 3 des 5. Kap. (S. 150), mit dem äusserlichen Unterschiede, dass damals die Coordinaten der Linienelemente mit x, y, y' bezeichnet wurden, während hier die Zeichen x_1, y_1, p_1 benutzt sind.

Schliesslich bemerken wir nun noch Folgendes:

Zu Beginn dieses Paragraphen haben wir die Punkte (x, y, z) des Raumes vermöge der Gleichungen

(64) $$\mathfrak{x} = x, \quad \mathfrak{y} = z + xy, \quad \mathfrak{p} = 2y$$

auf die Linienelemente $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p})$ der $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$-Ebene bezogen, sodass jeder Nullgeraden des durch die Pfaff'sche Gleichung

(63) $$x\,dy - y\,dx + dz = 0$$

definierten Nullsystems eine Parabel

(69) $$\mathfrak{y} = a + 2b\mathfrak{x} + c\mathfrak{x}^2$$

in der Ebene entsprach. Vermöge der Berührungstransformation (78) sind nun ferner die Linienelemente $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p})$ so auf die Linienelemente

(x_1, y_1, p_1) einer $(x_1 y_1)$-Ebene bezogen worden, dass jeder dieser Parabeln ein Kreis

$$(x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2 = \gamma^2$$

der $(x_1 y_1)$-Ebene entspricht.

Wir können natürlich auch direct die Punkte des Raumes (xyz) auf die Linienelemente der $(x_1 y_1)$-Ebene beziehen, indem wir aus (64) und (78) die Veränderlichen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ eliminieren. Dies liefert alsdann das

Theorem 8: *Vermöge der Gleichungen* Abbild. d. Nullgeraden als Kreise der Ebene.

$$x_1 = \frac{i(4yz + x)}{8y}, \quad y_1 = \frac{4yz - x}{8y}, \quad p_1 = i\,\frac{1 - 4y^2}{1 + 4y^2}$$

werden die Punkte (x, y, z) des Raumes so auf die Linienelemente (x_1, y_1, p_1) der $(x_1 y_1)$-Ebene bezogen, dass jeder Curve des durch die Pfaff'sche Gleichung

$$x\,dy - y\,dx + dz = 0$$

definierten Nullsystems ein Elementverein der $(x_1 y_1)$-Ebene und insbesondere jeder Nullgeraden des Nullsystems ein Kreis

$$(x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2 = \gamma^2$$

der Ebene entspricht. Den Punkttransformationen des Raumes, welche die Pfaff'sche Gleichung des Nullsystems invariant lassen, entsprechen dabei die Berührungstransformationen der (xy)-Ebene, insbesondere den ∞^{10} projectiven Transformationen des Raumes, die jede Nullgerade in eine Nullgerade verwandeln, diejenigen ∞^{10} Berührungstransformationen der $(x_1 y_1)$-Ebene, die jeden Kreis in einen Kreis überführen.

Stellen wir die einander entsprechenden Gebilde tabellarisch zusammen, so haben wir:

1) Ebene.	1) Raum.
2) Linienelement der Ebene.	2) Punkt des Raumes.
3) Elementverein in der Ebene.	3) Curve des Nullsystems.
4) Kreis in der Ebene.	4) Nullgerade.
5) Berührungstransformation in der Ebene.	5) Punkttransformation, welche die Pfaff'sche Gleichung des Nullsystems invariant lässt.
6) Berührungstransformation der Ebene, die jeden Kreis in einen Kreis überführt.	6) Projective Transformation, die jede Nullgerade in eine Nullgerade überführt.

Später, im Schlusskapitel dieses Abschnittes, werden wir diesen besonders wichtigen Untersuchungen wiederum näher treten.

Kapitel 7.

Monge'sche Gleichungen und Plücker'sche Liniencomplexe.

Im vorigen Kapitel beschäftigten wir uns mit den Pfaff'schen Gleichungen
$$X dx + Y dy + Z dz = 0,$$
die für unsere Auffassung Scharen von ∞^4 Linienelementen im Raume (x, y, z) bestimmen. Charakteristisch für diese Scharen war der Umstand, dass diejenigen ∞^1 Linienelemente einer Schar, die durch einen Punkt gehen, ein *ebenes Büschel* von Fortschreitungsrichtungen bestimmen. Jetzt wollen wir ganz allgemeine Scharen von ∞^4 Linienelementen im Raume (x, y, z) betrachten. Jede derartige Schar wird gegeben durch eine Gleichung von der Form:
$$\Omega(x, y, z;\ dx, dy, dz) = 0,$$
die in dx, dy, dz *homogen* ist. Wir nennen derartige Gleichungen zu Ehren des Verfassers der „Application de l'analyse à la géométrie" *Monge'sche Gleichungen* *).

Mit jeder Monge'schen Gleichung sind eine Reihe von Integrationsproblemen verknüpft, von denen wir in diesem Kapitel die einfachsten besprechen. So liegt hier das Problem vor, alle *Integralcurven* einer Monge'schen Gleichung zu finden, d. h. alle Curven zu bestimmen, deren Linienelemente die Monge'sche Gleichung erfüllen. Andererseits werden wir sehen, dass die allgemeinen Monge'schen Gleichungen zu einem Probleme führen, das wieder in einer *partiellen Differentialgleichung erster Ordnung* seinen analytischen Ausdruck findet.

Ganz besonders beschäftigen wir uns mit solchen Monge'schen Gleichungen, unter deren Integralcurven ∞^3 Geraden enthalten sind. Wir werden sehen, dass eine Monge'sche Gleichung diese Eigenschaft hat, wenn sie auf die Form gebracht werden kann:
$$\Phi(y\,dz - z\,dy,\ z\,dx - x\,dz,\ x\,dy - y\,dx,\ dx,\ dy,\ dz) = 0.$$
Die Theorie dieser Gleichungen steht somit in engstem Zusammenhange mit der Theorie der dreifach unendlichen Geradenscharen oder *Liniencomplexe.* In der That lässt sich die von Plücker begründete Liniengeometrie als ein Abschnitt der Theorie der Monge'schen Gleichungen auffassen.

---

*) Vgl. Monge, *Supplément, où l'on fait voir que les équations aux différences ordinaires pour lesquelles les conditions d'intégrabilité ne sont pas satisfaites sont susceptibles d'une véritable intégration et que c'est de cette intégration que dépend celle des équations aux différences partielles élevées*, Mémoires de l'Académie, Paris 1784, S. 502.

Nachdem wir die älteren Untersuchungen über Geradenscharen, die zum Teil von Gesichtspunkten der Mechanik ausgingen, in einem *geschichtlichen Überblick* zusammengestellt haben, geben wir daher in diesem Kapitel auch eine *Einleitung in die Plücker'sche Liniengeometrie.*

Schon in seinen ersten geometrischen Arbeiten betonte Lie, dass sich die Plücker'sche Liniengeometrie unter die Theorie der Monge'schen Gleichungen unterordnet, allerdings als ein besonders wichtiger Abschnitt, und er zeigte zugleich an vielen Anwendungen die Fruchtbarkeit dieser Betrachtungsweise *). Im letzten Paragraphen geben wir einige unter seinen ersten Arbeiten über diesen Gegenstand wieder, in denen die charakteristischen Eigenschaften derjenigen Monge'schen Gleichungen, die Liniencomplexe definieren, von verschiedenen Gesichtspunkten aus entwickelt werden.

§ 1. Monge'sche Gleichungen.

Monge ist der erste Mathematiker, der sich eingehend mit *Gleichungen* von der Form

$$\Omega(x, y, z;\ dx, dy, dz) = 0$$

beschäftigte, die in dx, dy, dz homogen sind. Wir bezeichnen deshalb derartige Gleichungen als *Monge'sche Gleichungen.* Dementsprechend nennen wir Ausdrücke von der Form **Monge'sche Gleichung.**

$$\Omega(x, y, z;\ dx, dy, dz),$$

die in dx, dy, dz homogen sind, *Monge'sche Ausdrücke.* Differentialausdrücke von dieser Form haben besonders durch Untersuchungen von Gauss und Riemann eine grosse Bedeutung erlangt. Hier werden wir uns aber nur mit Monge'schen *Gleichungen* beschäftigen.

Schon in § 1 des vorigen Kapitels (S. 184) gebrauchten wir gelegentlich den Begriff *Linienelement im Raume.* Wir verstehen darunter wie in der Ebene den Inbegriff eines Punktes und einer durch ihn gehenden Geraden. Die Bestimmungsstücke eines Linienelementes sind die Coordinaten x, y, z seines Punktes und die beiden Verhältnisse der Incremente $dx, dy, dz,$ welche die Coordinaten x, y, z beim Fortschreiten auf der Geraden des Elementes erfahren. Es giebt also im ganzen ∞^5 Linienelemente im Raume. Durch die vorgelegte *Monge'sche Gleichung*

$$\Omega(x, y, z;\ dx, dy, dz) = 0 \tag{1}$$

*) Sophus Lie, *Om en Classe geometriske Transformationer*, Verhandl. d. Ges. d. Wiss. zu Christiania 1870, ferner ebenda 1871, sowie: *Über Complexe, insbesondere Linien- und Kugelcomplexe mit Anwendung auf die Theorie partieller Differentialgleichungen*, Math. Annalen 5. Bd. (1872), S. 145.

werden daher ∞^4 Linienelemente $(x, y, z, dx : dy : dz)$ ausgewählt. Durch den Punkt (x, y, z) gehen ∞^1 dieser Elemente, da die Gleichung (1) bei gegebenem x, y, z eines der beiden Verhältnisse der Grössen dx, dy, dz bestimmt. Diese durch einen Punkt gehenden ∞^1 Linienelemente bilden daselbst einen Kegel von Fortschreitungsrichtungen

Elementarkegel.

$(dx : dy : dz)$, den wir den *Elementarkegel* des Punktes (x, y, z) nennen. Die Monge'sche Gleichung (1) ordnet also jedem Punkte des Raumes einen Elementarkegel zu. Umgekehrt leuchtet ein, dass man eine Zuordnung von Elementarkegeln zu den Punkten des Raumes in allgemeinster Weise durch eine Gleichung von der Form (1) zu bewerkstelligen hat.

Der allgemeine Elementarkegel wird zu einem ebenen Büschel von Fortschreitungsrichtungen, wenn die Gleichung (1) linear in dx, dy, dz ist, also wenn insbesondere eine Pfaff'sche Gleichung vorliegt. Bis auf weiteres werden die folgenden Überlegungen auch diesen besonderen Fall mit umfassen.

Integralcurve.

Integralcurve der Monge'schen Gleichung (1) *heisst jede Curve, deren Linienelemente die Monge'sche Gleichung erfüllen.* In jedem Punkte p einer Integralcurve c ist daher die Tangente des Punktes p eine Mantellinie des Elementarkegels, dessen Spitze dieser Punkt ist. (Siehe Fig. 51.) In § 2 des vorigen Kapitels sahen wir schon, dass die endlichen Gleichungen der allgemeinsten Integralcurve einer Pfaff'schen Gleichung nicht nur willkürliche Constanten, sondern auch willkürliche Functionen enthalten. Dasselbe gilt für beliebige Monge-sche Gleichungen, zu denen ja die Pfaff'schen als Specialfälle gehören. Wir werden dies durch die folgende Betrachtung nochmals zeigen.

Fig. 51.

Integralcurven auf geg. Fläche.

Wir nehmen irgend eine *Fläche* im Raume an und construieren in jedem Punkte p der Fläche sowohl die Tangentenebene als auch den durch die Gleichung (1) zugeordneten Elementarkegel (siehe Fig. 52). Die Ebene schneidet den Kegel, da sie durch seine Spitze geht, nach einer oder einigen Geraden, die Tangenten der Fläche im Punkte p sind. Wir können daher sagen, *dass die Monge'sche Gleichung* (1) *jedem Punkte einer beliebig gewählten Fläche gewisse Fortschreitungsrichtungen auf der Fläche zuordnet.*

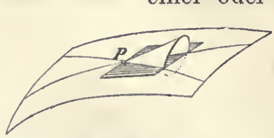

Fig. 52.

Wählen wir unter diesen Fortschreitungsrichtungen eine aus und gehen ihr beständig nach, so erhalten wir eine Curve auf der Fläche, also eine Curve, deren Linienelemente die Monge'sche Gleichung erfüllen. Diese Curve ist daher eine Integralcurve. *Auf jeder Fläche liegen also eine oder mehrere Scharen von* ∞^1 *Integralcurven der Monge'schen Gleichung* (1). Da die Fläche willkürlich gewählt war, so folgt hieraus genau so wie in § 2 des 6. Kap. bei der Pfaff'schen Gleichung (S. 193), dass die allgemeinen endlichen Gleichungen der Integralcurven willkürliche Functionen enthalten müssen.

Wenn z. B. die Monge'sche Gleichung (1) eine homogene *Gleichung zweiten Grades hinsichtlich* dx, dy, dz ist, so wird jeder *Elementarkegel ein Kegel zweiten Grades* sein. In diesem Falle werden mithin jedem Punkte der beliebig gewählten Fläche gerade zwei Fortschreitungsrichtungen auf der Fläche vermöge der Monge'schen Gleichung zugeordnet. Die Fläche wird hier also *doppelt überdeckt* von ∞^1 Integralcurven.

Ist die vorgelegte Gleichung (1) homogen vom n^{ten} Grade in $dx, dy, dz,$ so wird eine allgemein gewählte Fläche n-fach von ∞^1 Integralcurven überdeckt.

Eine Curve im Raume wird dadurch analytisch dargestellt, dass x, y, z als Functionen eines Parameters t gegeben werden. Bezeichnen wir mit x', y', z' alsdann die Differentialquotienten von x, y, z nach t, so folgt, da die Gleichung (1) homogen in dx, dy, dz ist, dass die Curve dann und nur dann Integralcurve der Monge'schen Gleichung (1) ist, wenn sie die Bedingung erfüllt:

$$\Omega(x, y, z;\ x', y', z') = 0. \tag{1'}$$

Wir werden öfters, wenn es zweckmässig erscheint, die Monge'sche Gleichung auch in dieser Form (1') benutzen. Die Gleichung (1') ist homogen in x', y', z'.

Die *Pfaff'schen Gleichungen* stellen wie gesagt einen Specialfall der Monge'schen Gleichungen dar. Wir erkannten in § 3 des vorigen Kapitels (vgl. Satz 12, S. 218), dass eine Pfaff'sche Gleichung dann und nur dann ∞^3 *geradlinige* Integralcurven besitzt, wenn sie die besondere Form hat: **Geradlinige Integralcurven.**

$$A(y\,dz - z\,dy) + B(z\,dx - x\,dz) + C(x\,dy - y\,dx) +$$
$$+ D\,dx + E\,dy + G\,dz = 0.$$

Es ist nun offenbar auch denkbar, dass eine Monge'sche Gleichung

$$\Omega(x, y, z;\ dx, dy, dz) = 0, \tag{1}$$

die *keine* Pfaff'sche Gleichung ist, ∞^3 *Geraden als Integralcurven* zulässt. Wir wollen die notwendige und hinreichende Bedingung hierfür aufstellen.

Soll die Monge'sche Gleichung (1) ∞^3 geradlinige Integralcurven besitzen, sollen also durch jeden Punkt (x, y, z) deren ∞^1 hindurchgehen, so muss es möglich sein, für x, y, z solche lineare Functionen eines Parameters t zu finden, dass sie und ihre Differentiale dx, dy, dz die Monge'sche Gleichung (1) und sonst keine Gleichung erfüllen. Es muss also möglich sein, für x, y, z solche Functionen eines Parameters t zu finden, dass einerseits

$$x'' = y'' = z'' = 0 \tag{2}$$

wird und andererseits die Grössen x, y, z, x', y', z' die Relation

$$\Omega(x, y, z;\ x', y', z') = 0 \tag{1'}$$

und zwar nur diese Relation erfüllen. Die Accente deuten hierbei die Differentiation nach t an.

Wenn wir (1′) nach t differenzieren, so folgt mit Rücksicht auf (2), dass

$$\Omega_x x' + \Omega_y y' + \Omega_z z' = 0 \tag{3}$$

sein muss vermöge (1′). Diese Gleichung (3), aufgefasst als lineare partielle Differentialgleichung für Ω, ist nun äquivalent dem System von simultanen gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{x'} = \frac{dy}{y'} = \frac{dz}{z'} = \frac{dx'}{0} = \frac{dy'}{0} = \frac{dz'}{0}. \tag{4}$$

Wir haben also zu verlangen, dass $\Omega = 0$ eine Integralgleichung des Systems (4) sei. Dies System besitzt fünf von einander unabhängige Integrale. Nun sind die sechs Functionen:

$$yz' - zy',\quad zx' - xz',\quad xy' - yx',\quad x',\quad y',\quad z'$$

solche Integrale, zwischen denen nur die eine Relation besteht:

$$x'(yz' - zy') + y'(zx' - xz') + z'(xy' - yx') \equiv 0. \tag{5}$$

Daher ist die allgemeine Integralgleichung und mithin auch $\Omega = 0$ eine Gleichung zwischen diesen sechs Integralen. Sie muss somit die Form haben:

$$\Phi(yz' - zy',\ zx' - xz',\ xy' - yx',\ x',\ y',\ z') = 0. \tag{6'}$$

Es soll nun aber die Gleichung (1′), die ja aus (1) hervorgegangen ist, homogen in x', y', z' sein. Die Euler'sche Bedingung hierfür, dass nämlich

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x'} x' + \frac{\partial \Phi}{\partial y'} y' + \frac{\partial \Phi}{\partial z'} z' = 0$$

eine Folge von $\Phi = 0$ sei, liefert sofort, dass $\Phi = 0$ in den *sechs* in Φ auftretenden Argumenten homogen sein muss.

Es liege andererseits irgend eine Gleichung vor von der Form:

$$(6') \qquad \Phi(yz' - zy',\ zx' - xz',\ xy' - yx',\ x',\ y',\ z') = 0,$$

die in den sechs Argumenten von Φ homogen sei, oder also es liege die *Monge'sche Gleichung* vor:

$$(6) \quad \Phi(y\,dz - z\,dy,\ z\,dx - x\,dz,\ x\,dy - y\,dx,\ dx,\ dy,\ dz) = 0.$$

Natürlich darf die Gleichung (6') nicht die Form (5) haben, die eine Identität ist. Man sieht nun sofort ein, dass die Monge'sche Gleichung (6) ∞^3 geradlinige Integralcurven besitzt.

In der That, die Gerade

$$(7) \qquad x = rz + \varrho, \quad y = sz + \sigma,$$

für die

$$dx = r\,dz, \quad dy = s\,dz$$

ist, wird eine Integralcurve sein, wenn die Constanten r, s, ϱ, σ so gewählt werden, dass sie die durch Substitution dieser Werte für x, y, z, dx, dy aus (6) hervorgehende Gleichung erfüllen:

$$\Phi(\sigma\,dz,\ -\varrho\,dz,\ (s\varrho - r\sigma)\,dz,\ r\,dz,\ s\,dz,\ dz) = 0$$

oder, da diese Gleichung in dz homogen ist:

$$(8) \qquad \Phi(\sigma,\ -\varrho,\ s\varrho - r\sigma,\ r,\ s,\ 1) = 0.$$

Dies ist *eine* Bedingungsgleichung für die *vier* Bestimmungsgrössen r, s, ϱ, σ einer Geraden (7). Es giebt daher ∞^3 Geraden (7), die Integralcurven der Monge'schen Gleichung (6) sind.

Scharen von ∞^3 Geraden im Raume sind schon seit langer Zeit in der Mathematik untersucht worden. Wir werden weiter unten geschichtliche Notizen hierüber beibringen. Eine allgemeine Theorie für solche Geradenscharen hat aber erst Plücker*) geschaffen, der für die Scharen von ∞^3 Geraden den heutzutage allgemein gebräuchlichen Namen: *Liniencomplexe* einführte. Linien-complex.

Liegt ein beliebiger Liniencomplex vor, ist also eine Schar von ∞^3 Geraden im Raume gegeben, so werden durch diese Geraden ∞^4 Linienelemente gegeben, da jede Gerade ∞^1 Linienelemente enthält. Andererseits aber wissen wir, dass jede Schar von ∞^4 Linienelementen durch eine Monge'sche Gleichung definiert wird, und es ist klar, dass jene ∞^3 Geraden Integralcurven dieser Monge'schen Gleichung sind. Da nun die soeben gefundene Monge'sche Gleichung (6) die allgemeinste ist, die ∞^3 geradlinige Integralcurven besitzt, so folgt, dass ein Liniencomplex in allgemeinster Weise durch eine Monge'sche Gleichung von

---

*) Plücker, *Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement*, herausgegeben von Klein, Leipzig, 1868—69.

der Form (6) definiert wird. Die ∞^1 Geraden des Complexes, die durch einen gegebenen Punkt allgemeiner Lage gehen, bilden daselbst den Elementarkegel, der dem Punkte vermöge der Monge'schen Gleichung zugeordnet ist. Wir kommen somit zu dem

Satz 1: *Zu jedem Liniencomplex im Raume* (x, y, z) *gehört eine ganz bestimmte Monge'sche Gleichung von der besonderen Form*

$$\Phi(y\,dz - z\,dy,\ z\,dx - x\,dz,\ x\,dy - y\,dx,\ dx,\ dy,\ dz) = 0,$$

die homogen in den sechs Argumenten der Function Φ *ist. Die Geraden des Complexes sind die* ∞^3 *geradlinigen Integralcurven dieser Monge'schen Gleichung. Die durch einen beliebigen Punkt allgemeiner Lage gehenden* ∞^1 *Complexgeraden erzeugen den Elementarkegel, der dem Punkte vermöge der Monge'schen Gleichung zugeordnet ist. Umgekehrt definiert jede solche Gleichung* $\Phi = 0$ *einen Liniencomplex.*

Es erhellt hieraus, dass sich die Plücker'sche Liniengeometrie der Theorie der Monge'schen Gleichungen unterordnet*).

Wir wollen das Vorangehende durch zwei Beispiele erläutern.

1. Beispiel. **1. Beispiel:** Es liege die Monge'sche Gleichung vor:

$$(9)\quad a_{11}dx^2 + a_{22}dy^2 + a_{33}dz^2 + 2a_{23}dy\,dz + 2a_{31}dz\,dx + 2a_{12}dx\,dy = 0.$$

Die Coefficienten a_{ik} sollen Constanten sein. Diese Gleichung (9) gehört zu denen von der obigen Form $\Phi = 0$. Sie besitzt also ∞^3 geradlinige Integralcurven. Um deren Lage im Raume festzustellen, betrachten wir den Elementarkegel, den die Gleichung (9) einem Punkte (x, y, z) zuordnet. Da die Gleichung (9) frei von x, y, z ist, so ordnet sie allen Punkten congruente und gleichgestellte Kegel zweiten Grades zu. Wir wollen annehmen, die Gleichung (9) sei nicht in zwei lineare Gleichungen in dx, dy, dz zu zerspalten, d. h. der Elementarkegel sei irreducibel. Da die Elementarkegel in diesem Beispiele durch *Translation* in einander übergehen, so ist jede Gerade, die einem Elementarkegel angehört, in jedem ihrer Punkte eine Gerade des zugeordneten Kegels, d. h. sie ist eine Integralgerade. Führt man nun auf einen solchen Kegel mit seinen ∞^1 Geraden alle ∞^3 Translationen des Raumes aus, so erhält man alle ∞^3 Elementarkegel. Sie schneiden sämtlich, da sie einander congruent und gleichgestellt sind, die unendlich ferne Ebene in ein und demselben Kegelschnitte. *Der vorliegende Liniencomplex besteht daher aus allen* ∞^3 *Geraden, die einen unendlich fernen Kegelschnitt schneiden.*

---

*) Verhandlungen der Ges. d. Wiss. zu Christiania 1871 und Mathem. Ann. 5. Bd. (1872). Vgl. Fussnote S. 249.

Da dx, dy, dz längs aller einander paralleler Geraden, also längs aller Geraden durch einen gemeinsamen unendlich fernen Punkt, dieselben Verhältnisse haben, *so können wir dx, dy, dz als homogene Punktcoordinaten in der unendlich fernen Ebene auffassen.* Die vorgelegte Gleichung (9) stellt bei dieser Auffassung geradezu den erwähnten unendlich fernen Kegelschnitt dar.

Geben wir der Gleichung (9) die speciellere Form

$$(9') \qquad dx^2 + dy^2 - \varkappa^2 dz^2 = 0 \quad (\varkappa \neq 0),$$

so sind die *Elementarkegel Rotationskegel, deren Axen parallel der z-Axe verlaufen,* und deren Mantellinien einen Winkel γ mit der (xy)-Ebene bilden, dessen Tangente gleich $\frac{1}{\varkappa}$ ist. *Hier besteht der Complex aus allen Geraden, die zur (xy)-Ebene die Neigung γ haben.* Die *Integralcurven* der Monge'schen Gleichung (9′) sind die Curven, deren Tangenten mit der (xy)-Ebene den Winkel γ bilden. Man kann auch sagen: *Sie sind die Rückkehrcurven der abwickelbaren Flächen, die den unendlich fernen Kegelschnitt* (9′) *enthalten.*

In dem noch specielleren Falle

$$(9'') \qquad dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$$

besteht der Complex aus allen Geraden, die den imaginären unendlich fernen Kugelkreis treffen, d. h. aus allen *Minimalgeraden.* Die Integralcurven der Monge'schen Gleichung (9″) sind die *Minimalcurven.* In der metrischen Geometrie spielt deshalb diese Monge'sche Gleichung (9″) eine wichtige Rolle.

2. Beispiel: Eine gegebene Fläche besitzt ∞^3 Tangenten, sobald sie keine abwickelbare Fläche ist. Diese Tangenten stellen also einen Liniencomplex dar. Die Elementarkegel der zugehörigen Monge'schen Gleichung sind die Tangentialkegel der Fläche. Liegt z. B. eine Fläche zweiten Grades vor: 2. Beispiel.

$$F(x, y, z) \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy + \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0,$$

die keinen Kegel zweiten Grades vorstellen soll, so bestimmen ihre Tangenten einen Liniencomplex, dessen Monge'sche Gleichung so zu bilden ist: Sind x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punktes des Raumes und x', y', z' proportional den Richtungscosinus einer durch diesen Punkt gehenden Complexgeraden, so müssen $x + x't$, $y + y't$, $z + z't$ bei variablem t die laufenden Coordinaten einer Flächentangente sein, d. h. es muss die in t quadratische Gleichung

$$F(x + x't, \ y + y't, \ z + z't) = 0,$$

welche die Schnittpunkte der Geraden mit der Fläche bestimmt, eine Doppelwurzel t haben. Stellt man die Bedingung hierfür auf, so erhält man die Gleichung:

$$\begin{aligned}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(xy' - yx')^2 + \cdots + \\ + 2a_{12}a_{13}(xy' - yx')(zx' - xz') + \cdots + \\ + 2(a_{12}a_{14} - a_{11}a_{24})(xy' - yx')x' + \cdots + \\ + 2(a_{11}a_{34} - a_{31}a_{14})(zx' - xz')x' + \cdots + \\ + a_{44}(a_{11}x'^2 + \cdots + 2a_{23}y'z' + \cdots) - \\ - (a_{14}x' + a_{14}y' + a_{34}z')^2 = 0.\end{aligned}$$

Hierin sind die Glieder, die durch cyklische Vertauschung von x, y, z und gleichzeitige cyklische Vertauschung der Indices 1, 2, 3 aus den angegebenen Gliedern hervorgehen, durch Punkte angedeutet. Schreiben wir in dieser Gleichung dx, dy, dz für x', y', z', so erhalten wir die Monge'sche Gleichung, welche die ∞^3 Tangenten der Fläche zweiten Grades $F = 0$ als Integralcurven besitzt. In der That ist hier der Satz 1 erfüllt.

Integrationsprobleme.

Mit einer Monge'schen Gleichung lassen sich mehrere *Integrationsprobleme* verbinden:

Zunächst kann man nach *allen* Integralcurven einer vorgelegten Monge'schen Gleichung fragen. Wir werden an einer späteren Stelle (im dritten Abschnitt) sehen, in welcher Weise Monge dieses Problem auf das der Integration eines einzigen Systems simultaner gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückgeführt hat, und gehen hier noch nicht darauf ein.

Es giebt ein anderes und noch wichtigeres Integrationsproblem, das mit einer vorgelegten Monge'schen Gleichung verknüpft ist.

Wie wir oben schon bemerkten, wird eine beliebig gegebene Fläche im allgemeinen mehrfach von ∞^1 Integralcurven der Monge'schen Gleichung bedeckt. Ist, wie wir beispielsweise erwähnten, die Mongesche Gleichung homogen und ganz vom n^{ten} Grade in dx, dy, dz, so enthält der Elementarkegel in einem Punkte der Fläche im allgemeinen n Tangenten der Fläche, sodass die Fläche n-fach von Integralcurven überdeckt wird. Es ist aber denkbar, dass die Fläche von solcher besonderer Form ist, dass in jedem ihrer Punkte zwei der genannten n Tangenten zusammenfallen, sodass sie nur noch $(n - 1)$-fach von Integralcurven überdeckt wird, wobei dann die eine der auftretenden Curvenscharen doppelt zu zählen ist. Dieser Fall tritt ein, wenn in jedem Punkte der Fläche die Tangentenebene der Fläche zugleich Tangentialebene des Elementarkegels ist, der dem Punkt zugeordnet wird, oder wenn, wie wir uns kürzer ausdrücken können, die Elementarkegel, die den Punkten der Fläche zugeordnet sind, die Fläche berühren.

Fläche, die v. Elementarkegeln berührt wird.

Es ist nun ein sehr wichtiges Integrationsproblem, *bei vorgelegter Monge'scher Gleichung*

$$\Omega(x, y, z;\ dx, dy, dz) = 0 \tag{1}$$

alle Flächen zu bestimmen, die in allen ihren Punkten die den Punkten zugeordneten Elementarkegel berühren.

Hierbei ist von dem Fall abzusehen, dass der Elementarkegel selbst in eine Ebene ausartet, d. h. dass die Monge'sche Gleichung (1) in dx, dy, dz linear ist und sich also auf eine Pfaff'sche Gleichung reduciert.

Wir können dies noch anders auffassen, wenn wir den Begriff *Flächenelement* einführen. Unter einem Flächenelement im Raume verstehen wir den Inbegriff eines Punktes und einer durch den Punkt gehenden Ebene. Da es ∞^3 Punkte im Raume giebt und durch jeden Punkt ∞^2 Ebenen gehen, so giebt es insgesamt ∞^5 Flächenelemente. Eine Fläche enthält ∞^2 Punkte und hat in jedem eine Tangentenebene. *Eine Fläche besitzt daher* ∞^2 *Flächenelemente.* Nebenbei sei bemerkt, dass dies auch für abwickelbare Flächen gilt, die zwar nur ∞^1 Tangentenebenen besitzen, aber doch ∞^2 Punkte, also auch ∞^2 Flächenelemente enthalten. Hier tritt nur der besondere Fall ein, dass je ∞^1 dieser Flächenelemente die Ebene gemein haben. Flächen-element.

Eine Monge'sche Gleichung ordnet jedem Punkte einen Elementarkegel, bestehend aus ∞^1 Fortschreitungsrichtungen, zu. Dieser Kegel hat, sobald er nicht in eine Ebene ausartet, ∞^1 Tangentialebenen. *Jeder Elementarkegel bestimmt demnach* ∞^1 *Flächenelemente.* Der Elementarkegel ist zwar auch eine abwickelbare Fläche, aber gemäss dem Begriffe des Elementarkegels kommen bei ihm nur die ∞^1 Flächenelemente in betracht, die zum Punkte die Spitze des Kegels haben. Da die Monge'sche Gleichung im Ganzen ∞^3 Elementarkegel definiert, so folgt: *Eine nicht lineare Monge'sche Gleichung bestimmt* ∞^4 *Flächenelemente im Raume und zwar so, dass sie jedem Punkte* ∞^1 *Flächenelemente zuordnet, die den Elementarkegel des Punktes umhüllen.*

Fordern wir nun, dass eine Fläche in jedem ihrer Punkte den zugeordneten Elementarkegel berühren soll, so können wir dies auch so ausdrücken: Wir fordern, dass die ∞^2 Flächenelemente der Fläche in der Schar der ∞^4 Flächenelemente enthalten seien, die durch die Monge'sche Gleichung definiert werden. Unser obiges Integrationsproblem kann also so formuliert werden:

Es liegt eine Monge'sche Gleichung (1) *vor, die also* ∞^4 *Flächenelemente im Raume definiert. Gesucht werden alle Flächen, deren sämtliche Flächenelemente zu diesen* ∞^4 *Flächenelementen gehören.* Neue Formul. d. Problems.

Um unser Problem analytisch zu formulieren, müssen wir für die ∞^5 Flächenelemente des Raumes Bestimmungsstücke einführen. Ist Anal. Formulierung.

(x, y, z) der Punkt eines Flächenelementes, so hat die Gleichung der Ebene des Flächenelementes, geschrieben in den laufenden Punktcoordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$, die Form:

$$(10) \qquad (\mathfrak{z} - z) - p(\mathfrak{x} - x) - q(\mathfrak{y} - y) = 0,$$

in der p, q die Stellung der Ebene im Raume bestimmen. Die Grössen $p, q, -1$ sind proportional den Richtungscosinus der Ebene des Flächenelementes. Wir können daher die fünf Grössen x, y, z, p, q als *Coordinaten des Flächenelementes* bezeichnen, dessen Punkt der Punkt (x, y, z) und dessen Ebene die Ebene (10) ist.

Coord. des Flächen-elements.

Soll nun das Flächenelement (x, y, z, p, q) der Fläche

$$(11) \qquad z = \omega(x, y)$$

angehören, so muss (x, y, z) ein Punkt dieser Fläche und die Ebene (10) die Tangentenebene der Fläche in diesem Punkte, also

$$(11') \qquad p = \frac{\partial z}{\partial x} \equiv \omega_x, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} \equiv \omega_y$$

sein. Das Flächenelement (x, y, z, p, q) gehört somit der Fläche (11) dann und nur dann an, wenn seine Coordinaten x, y, z, p, q die drei Gleichungen (11) und (11') erfüllen.

Auf der anderen Seite stellt die Gleichung

$$(1') \qquad \Omega(x, y, z;\ x', y', z') = 0$$

den Elementarkegel des Punktes (x, y, z) dar, indem x', y', z' proportional den Richtungscosinus der Mantellinien dieses Kegels sind. Daher wird jede Tangentialebene dieses Kegels dargestellt durch eine Gleichung von der Form

$$\Omega_{x'}(\mathfrak{x} - x) + \Omega_{y'}(\mathfrak{y} - y) + \Omega_{z'}(\mathfrak{z} - z) = 0$$

oder:

$$(\mathfrak{z} - z) + \frac{\Omega_{x'}}{\Omega_{z'}}(\mathfrak{x} - x) + \frac{\Omega_{y'}}{\Omega_{z'}}(\mathfrak{y} - y) = 0.$$

Vergleich mit (10) lehrt, dass ein Flächenelement (x, y, z, p, q) dann und nur dann ein Flächenelement des Elementarkegels des Punktes (x, y, z) ist, wenn

$$(12) \qquad p = -\frac{\Omega_{x'}}{\Omega_{z'}}, \quad q = -\frac{\Omega_{y'}}{\Omega_{z'}}$$

ist und x', y', z' die Bedingung (1') erfüllen. Elimination der drei homogen auftretenden Grössen x', y', z' aus (1') und (12) liefert mithin eine einzige Gleichung in x, y, z, p, q:

$$(13) \qquad F(x, y, z, p, q) = 0,$$

die von allen ∞^4 Flächenelementen (x, y, z, p, q) erfüllt wird, die durch die vorgelegte Monge'sche Gleichung (1) definiert sind.

Satz 2: *Eine vorgelegte nicht lineare Monge'sche Gleichung*

$$\Omega(x, y, z;\ dx, dy, dz) = 0$$

definiert ∞^4 *Flächenelemente* (x, y, z, p, q) *im Raume. Die* ∞^1 *dieser Flächenelemente, die den Punkt* (x, y, z) *gemein haben, umhüllen den Elementarkegel des Punktes. Die Gleichung, die von allen diesen* ∞^4 *Flächenelementen* (x, y, z, p, q) *erfüllt wird, ergiebt sich durch Elimination der homogen auftretenden Grössen* x', y', z' *aus den drei Gleichungen:*

$$\Omega(x, y, z;\ x', y', z') = 0,$$

$$p = -\frac{\Omega_{x'}}{\Omega_{z'}}, \quad q = -\frac{\Omega_{y'}}{\Omega_{z'}}$$

in der Form

$$F(x, y, z, p, q) = 0.$$

Wenn die vorgelegte Monge'sche Gleichung nicht linear, d. h. keine Pfaff'sche Gleichung ist, so umhüllen die Flächenelemente, die einem Punkte (x, y, z) zugeordnet werden, einen wirklichen Kegel. Daraus folgt, dass dann die Gleichung (13) in p und q *nicht linear* ist.

Die Flächenelemente der Fläche

$$z = \omega(x, y)$$

gehören nun nach (11′) dann und nur dann zu den ∞^4 Flächenelementen, welche die Monge'sche Gleichung definiert, wenn für diese Fläche z eine solche Function von x, y ist, dass es stets Werte x', y', z' giebt, für die

$$\Omega(x, y, z;\ x', y', z') = 0$$

und

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\Omega_{x'}}{\Omega_{z'}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\Omega_{y'}}{\Omega_{z'}}$$

ist. Das Wertsystem x', y', z' stellt dann Grössen proportional den Richtungscosinus der Mantellinie dar, die der Elementarkegel des Punktes (x, y, z) mit dem Flächenelemente (x, y, z, p, q) gemein hat. Die drei letzten Gleichungen enthalten x', y', z' homogen. Elimination von x', y', z' aus ihnen liefert also eine Gleichung, die nach (13) augenscheinlich diese ist:

(14) $$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0.$$

Wenn umgekehrt

(11) $$z = \omega(x, y)$$

die Gleichung (14) für alle Werte von x, y erfüllt, so gehört jedes Flächenelement (x, y, z, p, q) der Fläche (11), für das ja

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

ist, nach Satz 2 zu den ∞^4 Flächenelementen, welche die Monge'sche Gleichung definiert. Mit anderen Worten: Dann hat die Fläche (11) in jedem Punkte zur Tangentenebene eine der Tangentialebenen des Elementarkegels, der dem Punkte zugeordnet ist.

Unser Integrationsproblem kommt also hinaus auf die Integration

Partielle Diffgl. 1. O. der *partiellen Differentialgleichung erster Ordnung* (14) zwischen der abhängigen Veränderlichen z und den beiden unabhängigen Veränderlichen x, y. Somit haben wir gefunden *):

Satz 3: *Alle Flächen*

$$z = \omega(x, y),$$

die in jedem ihrer Punkte den Elementarkegel berühren, der dem Punkte durch eine vorgelegte in dx, dy, dz nicht lineare Monge'sche Gleichung

$$\Omega(x, y, z; \, dx, dy, dz) = 0$$

zugeordnet wird, ergeben sich durch Integration einer gewissen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung für z:

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0.$$

Diese Differentialgleichung geht hervor durch Elimination der drei homogen auftretenden Grössen x', y', z' aus den drei Gleichungen:

$$\Omega(x, y, z; \, x', y', z') = 0,$$

$$\frac{\Omega_{x'}}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \frac{\Omega_{y'}}{\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{\Omega_{z'}}{-1}.$$

Ist $z = \omega(x, y)$ eine Integralfläche der partiellen Differentialgleichung (14), so wird sie in jedem ihrer Punkte eine gewisse Fortschreitungsrichtung $(x' : y' : z')$ mit dem zugehörigen Elementarkegel gemein haben. Jedem Punkt der Fläche wird somit eine Richtung auf der Fläche zugeordnet. Geht man beständig der zugeordeten Richtung nach, so erhält man eine Curve. *Jede Integralfläche der partiellen Differentialgleichung* (14) *wird also von ∞^1 Curven überdeckt, derart dass in jedem Punkte der Fläche der zugehörige Elementarkegel längs der betreffenden Curve berührt.* (Siehe Fig. 53.)

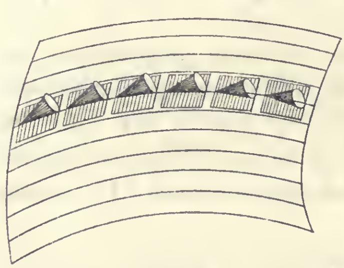

Fig. 53.

*) Die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung beginnt mit Euler und Lagrange. Ihre geometrische Einkleidung rührt in erster Linie von Monge her. Hierüber später, im dritten Abschnitt, Ausführlicheres.

Man nennt nach Monge diese Curven auf den Integralflächen Charakteristiken. Im dritten Abschnitte dieses Buches werden wir uns eingehend mit ihnen beschäftigen. Wir werden insbesondere sehen, dass, obgleich jede partielle Differentialgleichung unendlich viele von willkürlichen Functionen abhängige Integralflächen besitzt, doch die Zahl ihrer Charakteristiken die Zahl ∞^3 nicht übersteigt. Charakteristiken.

Wir wollen nun zeigen, dass die soeben durchgeführte Rechnung sich vollständig mit der Rechnung deckt, die man in der Geometrie der Ebene ausführt, *um von der Gleichung einer ebenen Curve in homogenen Punktcoordinaten zur Gleichung dieser Curve in nicht-homogenen Liniencoordinaten überzugehen.* Andere Deutung der obigen Rechnung.

Deuten wir nämlich x', y', z' als *homogene Punktcoordinaten in der Ebene*, fassen wir dagegen x, y, z als Constanten auf, so bestimmt die Gleichung

$$(1') \qquad \Omega(x, y, z;\ x', y', z') = 0$$

eine Curve in den laufenden homogenen Punktcoordinaten x', y', z'. Die Tangente der Curve im Punkte $(x' : y' : z')$ wird dargestellt durch die Gleichung

$$(15) \qquad \Omega_{x'}\mathfrak{x}' + \Omega_{y'}\mathfrak{y}' + \Omega_{z'}\mathfrak{z}' = 0,$$

wenn $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{z}'$ ihre laufenden homogenen Punktcoordinaten sind. Nun lässt sich aber die Gleichung einer Geraden in den homogenen Punktcoordinaten $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{z}'$ auch so schreiben:

$$\mathfrak{z}' - p\mathfrak{x}' - q\mathfrak{y}' = 0.$$

Es lassen sich alsdann die Coefficienten p, q als nicht-homogene Liniencoordinaten der Geraden auffassen. Der Vergleich mit (15) zeigt, dass die Tangente der betrachteten ebenen Curve die Liniencoordinaten

$$p = -\frac{\Omega_{x'}}{\Omega_{z'}}, \quad q = -\frac{\Omega_{y'}}{\Omega_{z'}}$$

hat. Will man also die Relation haben, die von den Liniencoordinaten p, q aller ∞^1 Tangenten der ebenen Curve erfüllt werden, so hat man hieraus und aus der Curvengleichung $\Omega = 0$ selbst die homogenen Punktcoordinaten x', y', z' zu eliminieren, wodurch man zu der früheren Gleichung

$$(13) \qquad F(x, y, z, p, q) = 0$$

gelangt. Bei dieser ganzen Betrachtung spielen x, y, z die Rolle von Parametern.

Es ist nicht schwer, sich diesen Zusammenhang zwischen einem Problem des Raumes und einem Problem der Ebene begrifflich klar zu machen: Alle ∞^2 durch den festgewählten Punkt (x, y, z) des Raumes gehenden Linienelemente bilden eine zwei-dimensionale Mannigfaltigkeit mit den homogenen Coordinaten x', y', z'. In dieser Mannigfaltigkeit spielen also die ∞^2 Linienelemente dieselbe Rolle wie die Punkte der Ebene, sobald wir x', y', z' als homogene Punktcoordinaten auffassen. Die ∞^2 Linienelemente lassen sich zu ∞^2 ebenen Büscheln von je ∞^1 Elementen oder also zu ∞^2 Flächenelementen zusammenfassen. Jedes solche Flächenelement im Punkte (x, y, z) wird durch eine lineare Gleichung zwischen x', y', z' dargestellt: Begrifflicher Zusammenhang d. verschied. Deutungen.

$$z' - px' - qy' = 0,$$

sodass p, q nicht-homogene Bestimmungsstücke dieser ∞^2 Flächenelemente sind. Diesen Flächenelementen entsprechen bei der Deutung in der Ebene die ∞^2 Geraden der Ebene mit den nicht-homogenen Bestimmungsstücken p, q. Die Monge'sche Gleichung

$$(1') \qquad \Omega(x, y, z;\ x', y', z') = 0,$$

die in x', y', z' homogen ist, bestimmt im Punkte (x, y, z) des Raumes ∞^1 Linienelemente jener zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit, nämlich die eines Kegels. Bei der Deutung in der Ebene bestimmt sie die Punkte einer Curve. Im Raume erhalten wir die Gleichung, welche die Bestimmungsstücke p, q jener ∞^1 Flächenelemente erfüllen, die den Kegel umhüllen; in der Ebene entspricht ihr die Gleichung in den Liniencoordinaten p, q, die von den Tangenten der ebenen Curve erfüllt wird.

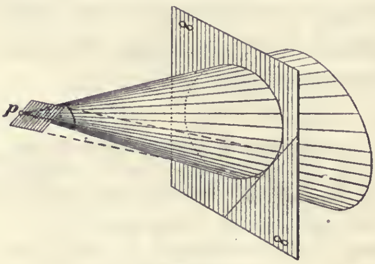

Fig. 54.

Direct können wir den Zusammenhang zwischen dem Problem im Raume und dem in der Ebene herstellen, wenn wir x', y', z' als homogene Coordinaten desjenigen Punktes der unendlich fernen Ebene auffassen, in dem die Gerade des Linienelementes $(x' : y' : z')$ diese Ebene trifft. Der Kegel schneidet dann die unendlich ferne Ebene in der besprochenen ebenen Curve, die Flächenelemente, die den Kegel umhüllen, schneiden sie in den Tangenten der Curve. (Siehe Fig. 54.)

Umkehrung. Wir können unsere bisherige Betrachtung auch *umkehren.* Liegt eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung von der Form

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0 \tag{14}$$

vor, so verlangt ihr Integrationsproblem, die Flächen zu bestimmen, die in jedem ihrer Punkte (x, y, z) eine solche Tangentenebene

$$\mathfrak{z} - z - p(\mathfrak{x} - x) - q(\mathfrak{y} - y) = 0 \tag{10}$$

haben, deren Bestimmungsstücke p, q der Gleichung

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{14'}$$

genügen. Durch diese Gleichung werden aber aus den ∞^2 Ebenen, die durch den Punkt (x, y, z) gehen, gerade ∞^1 ausgezeichnet, also ∞^1 Flächenelemente mit gemeinsamem Punkte (x, y, z). Diese Flächenelemente umhüllen, sobald die Gleichung (14') nicht linear ist, einen Kegel. Auf den Fall, dass die vorgelegte Differentialgleichung (14) linear ist, kommen wir nachher zu sprechen. Durch die Gleichung (14') wird nun also jedem Punkte (x, y, z) ein Kegel durch ihn zugeordnet, und das Integrationsproblem kommt darauf hinaus, alle Flächen zu finden, die in jedem ihrer Punkte den zugeordneten Kegel berühren. Die Zuordnung der Kegel zu den Punkten des Raumes wird aber, wie wir wissen, durch eine Monge'sche Gleichung dargestellt. Wie man rechnerisch die Monge'sche Gleichung findet, soll uns hier nicht beschäftigen, da wir im dritten Abschnitte darauf zurückkommen.

Wir erläutern das Vorhergehende durch einige Beispiele, die für unsere Zwecke eine hervorragende *Wichtigkeit* haben:

1. Beispiel. **1. Beispiel:** Vorgelegt sei die schon früher (S. 255) betrachtete Monge'sche Gleichung

$$dx^2 + dy^2 - \varkappa^2 dz^2 = 0 \quad (\varkappa \neq 0) \tag{16}$$

oder

$$x'^2 + y'^2 - \varkappa^2 z'^2 = 0. \tag{16'}$$

Hier sind, wie wir wissen, die Elementarkegel congruente Rotationskegel, deren Axen der z-Axe parallel sind und deren Mantellinien den Winkel γ mit der (xy)-Ebene bilden, wobei

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{\varkappa}$$

ist. Hier also ist die Ebene

$$(\mathfrak{z} - z) - p(\mathfrak{x} - x) - q(\mathfrak{y} - y) = 0$$

dann Tangentialebene des Elementarkegels im Punkte (x, y, z), wenn sie ebenfalls diesen Winkel mit der (xy)-Ebene bildet, wenn also

$$-\sqrt{p^2 + q^2} = \frac{1}{\varkappa},$$

d. h.

$$1 + p^2 + q^2 = \frac{\varkappa^2 + 1}{\varkappa^2}$$

ist. Mithin ist

$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{\varkappa^2 + 1}{\varkappa^2} \tag{17}$$

die partielle Differentialgleichung erster Ordnung im vorliegenden Beispiele. Man findet sie natürlich auch durch directe Anwendung des oben gegebenen Verfahrens. — In diesem Beispiel ist es leicht, Integralflächen der partiellen Differentialgleichung zu bestimmen, Flächen also, deren Tangentenebenen sämtlich den Winkel γ mit der (xy)-Ebene bilden. Zunächst gehören hierzu die ∞^2 Ebenen, die diese Neigung haben und ferner alle die ∞^2 Rotationskegel, deren Mantellinien den Winkel γ mit der (xy)-Ebene bilden. (Siehe Fig. 55.) Wenn wir eine beliebige Schar von ∞^1 jener Ebenen mit der Neigung γ herausgreifen, so erhalten wir als Umhüllende derselben eine abwickelbare Fläche. Da ihre Tangentenebenen gerade die gewählten ∞^1 Ebenen sind, so erfüllt diese abwickelbare Fläche die Bedingung, die wir an eine Integralfläche stellen müssen. Jede abwickelbare Fläche also, die von ∞^1 Ebenen umhüllt wird, die den Winkel γ mit der (xy)-Ebene bilden, ist eine Integralfläche.

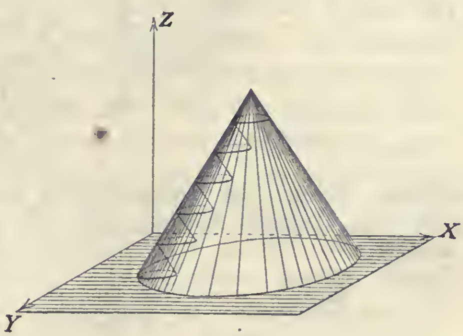

Fig. 55.

Hiermit sind aber auch *alle* Integralflächen bestimmt. Denn eine beliebige Integralfläche muss notwendig abwickelbar sein. Wäre sie dies nicht, so hätte sie ∞^2 Tangentenebenen und wir müssten fordern, dass diese Ebenen sämtlich den Winkel γ mit der (xy)-Ebene bilden. Es giebt jedoch gerade nur ∞^2 Ebenen mit dieser Neigung. Sie umhüllen aber augenscheinlich nicht sämtlich eine Fläche. Nicht-abwickelbare Integralflächen giebt es somit nicht. Soll nun eine abwickelbare Integralfläche hergestellt werden, so müssen die Ebenen, die sie umhüllen, als ihre Tangentialebenen den Winkel γ mit der (xy)-Ebene bilden. So kommen wir wieder zu den oben bestimmten Integralflächen.

Erinnern wir uns daran, dass im gegenwärtigen Beispiel alle ∞^3 Elementarkegel bis ins Unendliche ausgedehnt die unendlich ferne Ebene in ein und demselben Kegelschnitt k schneiden, so können wir auch sagen: Die Integralflächen der partiellen Differentialgleichung (17) sind die abwickelbaren Flächen, die den durch (16′) in homogenen Punktcoordinaten x', y', z' dargestellten unendlich fernen Kegelschnitt k enthalten, sowie die Ebenen, die diesen Kegelschnitt berühren.

Betrachten wir eine der Integralflächen (vgl. Fig. 56). Als abwickelbare Fläche enthält sie ∞^1 Geraden, die den unendlich fernen Kegelschnitt k treffen. Wollen wir in einem Punkte p der Fläche den Elementarkegel des Punktes construieren, so haben wir den Punkt p mit allen Punkten des Kegelschnittes k durch Geraden zu verbinden. Die Tangentenebene der Integralfläche im Punkte p aber berührt k und ist somit auch Tangentialebene dieses Elementarkegels, mit dem sie die durch p gehende Gerade der Integralfläche gemein hat. In jedem Punkte p einer Integralfläche berührt also der Elementarkegel die Fläche längs der Richtung der durch den Punkt p gehenden Geraden, die k trifft.

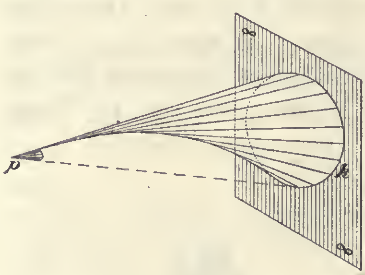

Fig. 56.

Daraus folgt, *dass diese ∞^1 Geraden auf der Integralfläche die Charakteristiken der Integralfläche sind.* In dem Specialfall, dass die Integralfläche eine den Kegelschnitt k berührende Ebene e ist (vgl. Figur 57), sind dies die Geraden der Ebene, die vom Berührpunkt ausgehen. Jede Integralfläche enthält also ∞^1 den Kegelschnitt k treffende Geraden als Charakteristiken. Da es nur ∞^3 Geraden giebt, die sämtlich k treffen, so folgt, *dass überhaupt*

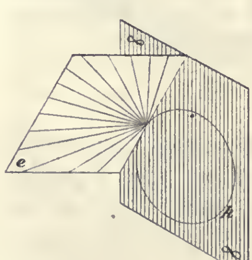

Fig. 57.

nur ∞^3 Charakteristiken vorhanden sind. Im vorliegenden Fall sind also die Charakteristiken alle die ∞^3 Geraden, die den Winkel γ mit der (xy)-Ebene bilden.

2. Beispiel: Betrachten wir allgemeiner überhaupt eine nichtlineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung, die frei von x, y, z ist: 2. Beispiel.

$$F\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0. \tag{18}$$

In einem Punkte (x, y, z) können dann nur diejenigen Flächenelemente (x, y, z, p, q) auf Integralflächen durch den Punkt liegen, für die

$$F(p, q) = 0 \tag{18'}$$

ist. Diese ∞^1 Flächenelemente umhüllen einen Kegel. Ihre Ebenen schneiden die unendlich ferne Ebene in ∞^1 Geraden, die dort die Curve c umhüllen, in der jener Kegel die unendlich ferne Ebene trifft. Wir können p, q als Liniencoordinaten derjenigen Geraden der unendlich fernen Ebene auffassen, in der die Ebene

$$\mathfrak{z} - z - p(\mathfrak{x} - x) - q(\mathfrak{y} - y) = 0$$

des Flächenelementes (x, y, z, p, q) die unendlich ferne Ebene schneidet (vgl. S. 261). In diesen Liniencoordinaten p, q stellt die Gleichung (18′) die Curve c dar. Ihre Gleichung ist frei von x, y, z, d. h. für alle Punkte (x, y, z) ergiebt sich dieselbe Curve c. Der einem beliebigen Punkte zugeordnete Elementarkegel ist mithin hier der Kegel, der, bis ins Unendliche ausgedehnt, die Curve c enthält. Die Integralflächen sind hier also die Flächen, deren Tangentenebenen die Curve c berühren. Das vorige Beispiel ist ein Specialfall des jetzigen. Dieselben Schlüsse wie dort lehren auch hier, *dass die Integralflächen einerseits die ∞^2 Ebenen sind, die c berühren, andererseits alle abwickelbaren Flächen, die c enthalten,* ferner dass jede Integralfläche ∞^1 Geraden enthält, die c schneiden und längs deren die den Punkten der Fläche zugeordneten Elementarkegel berühren, sodass *diese Geraden mithin Charakteristiken sind. Insgesamt giebt es also ∞^3 Charakteristiken, es sind dies alle Geraden, die c schneiden.*

3. Beispiel: Vorgelegt sei eine partielle Differentialgleichung von der Form*) 3. Beispiel.

$$F\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, z - x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0. \tag{19}$$

---

*) Diese partielle Differentialgleichung wurde für specielle Fälle von Lagrange 1774 behandelt (vgl. Oeuvres Bd. 4, S. 83 u. f.). In voller Allgemeinheit scheint sie zuerst von Monge betrachtet worden zu sein, obgleich er darüber keine Abhandlung veröffentlicht hat. Man besitzt von ihm nur eine kurze An-

Die Integralflächen werden von Flächenelementen (x, y, z, p, q) gebildet, die der Gleichung

$$F(p, q, z - xp - yq) = 0 \tag{19'}$$

genügen. Da die Ebene des Flächenelementes (x, y, z, p, q) die obige Gleichung (10) oder

$$\mathfrak{z} - p\mathfrak{x} - q\mathfrak{y} - (z - px - qy) = 0 \tag{10'}$$

hat, so können die drei Coefficienten

$$p, q, z - px - qy$$

als *Ebenencoordinaten* aufgefasst werden. Daher wird der vorgelegten partiellen Differentialgleichung zunächst durch ∞^2 Ebenen genügt, nämlich durch die Ebenen, deren Coordinaten die Bedingung (19') erfüllen. Andererseits ist (19') auch aufzufassen als die Gleichung einer gewissen Fläche Ω in Ebenencoordinaten, und diese Fläche Ω ist Integralfläche. Die vorhin erwähnten ∞^2 Ebenen sind die Tangentenebenen dieser Fläche Ω. Der Elementarkegel des Punktes p ist mithin der Tangentenkegel, der sich von diesem Punkte aus an die Fläche Ω legen lässt (vgl. Fig. 58). Es leuchtet unmittelbar ein, dass jeder der Fläche Ω umschriebene Kegel eine Integralfläche ist. *Die allgemeinste Integralfläche ist eine Fläche, deren Tangentenebenen ebenfalls Tangentenebenen der Fläche Ω sind.* Hat die Integralfläche ∞^2 Tangentenebenen, so ist sie die Fläche Ω selbst. Hat sie nur ∞^1 Tangentenebenen, so ist sie eine abwickelbare Fläche, welche die Fläche Ω umhüllt.

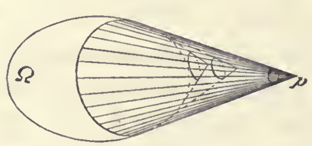

Fig. 58.

Jede Integralfläche — ausser der Fläche Ω — enthält ∞^1 von den ∞^3 Geraden, die Ω berühren. Sie wird von den Elementarkegeln ihrer Punkte längs dieser Geraden berührt. *Mithin sind hier alle ∞^3 Tangenten der Fläche Ω Charakteristiken und zwar* alle *Charakteristiken überhaupt.*

Dieses dritte Beispiel umfasst die beiden vorhergenannten. Die soeben betrachtete Kategorie von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung kann dadurch charakterisiert werden, dass sie unter anderen auch ∞^2 *Ebenen* als Integralflächen besitzt. Ausserdem haben wir gesehen, *dass die allgemeinste Integralfläche durch Umhüllung aus*

---

deutung in dem Werke: *Application de l'analyse à la géométrie*, 4. Aufl., 1809, S. IV. Vgl. Chasles, *Aperçu historique etc.*, Bruxelles 1837, Note XXX, sowie *Rapport etc.*, Paris 1870. S. 90.

diesen ∞^2 Ebenen abgeleitet werden kann, sowie dass hier ∞^3 und nur ∞^3 Charakteristiken vorhanden sind, nämlich gerade Linien.

Die partielle Differentialgleichung

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0 \tag{14}$$

definiert ∞^4 Flächenelemente (x, y, z, p, q), die der Gleichung

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{14'}$$

genügen. Die ∞^1 dieser Flächenelemente, die den Punkt (x, y, z) gemein haben, umhüllen nur dann keinen Kegel, wenn die Gleichung (14') linear in p, q ist. Diesen Ausnahmefall wollen wir hier noch besprechen.

Es sei also vorgelegt eine in $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ *lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung:* Lineare p. Diffgl. 1. O.

$$\alpha(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + \beta(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = \gamma(x, y, z). \tag{20}$$

Sie lässt sich nicht wie die anderen partiellen Differentialgleichungen mit einer Monge'schen Gleichung in Beziehung bringen. Die Integralflächen, die durch den Punkt (x, y, z) gehen, haben daselbst Tangentenebenen:

$$\mathfrak{z} - z - p(\mathfrak{x} - x) - q(\mathfrak{y} - y) = 0$$

und bestimmen somit wie im allgemeinen Fall in diesem Punkte (x, y, z) ∞^1 Flächenelemente (x, y, z, p, q), die durch die *lineare* Gleichung

$$\alpha p + \beta q = \gamma \tag{20'}$$

definiert sind. Aber diese ∞^1 Flächenelemente, deren Richtungscosinus proportional $p, q, -1$ sind, gehen sämtlich durch eine Fortschreitungsrichtung des Punktes (x, y, z), bilden also ein *Büschel von Flächenelementen.* Bezeichnen dx, dy, dz die Incremente, die x, y, z längs der Axe des Büschels erfahren, so ist also für alle diese ∞^1 Flächenelemente

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0,$$

d. h. nach (20')

$$\frac{dx}{\alpha} = \frac{dy}{\beta} = \frac{dz}{\gamma}. \tag{21}$$

Es ist dies ein System von zwei simultanen gewöhnlichen Differentialgleichungen in x, y, z, das ∞^2 *Integralcurven* besitzt. Die Integralcurven sind die Curven, deren Tangenten in jedem ihrer Punkte (x, y, z) die Axen der Büschel von Flächenelementen vorstellen, die dem Punkte zugeordnet waren. Um die partielle Differentialgleichung (20) zu integrieren, muss man die Flächen finden, die in jedem ihrer Punkte (x, y, z) eines dieser Flächenelemente besitzen. Daher sind die Integralflächen diejenigen Flächen, die in jedem ihrer Punkte (x, y, z) die Axe des dem Punkte zugeordneten Büschels zur Tangente haben. Daraus folgt, dass eine jede Integralfläche die Integralcurven der Gleichungen (21) enthält, die durch ihre Punkte gehen. Mithin ergiebt sich die allgemeinste Integralfläche, indem man die Flächen bestimmt, die ∞^1 Integralcurven des Systems (21) enthalten. Übrigens ist dieser Zusammenhang zwischen (20) und (21) aus der elementaren Theorie der Differentialgleichungen bekannt.

§ 2. Ältere Untersuchungen über Geradenscharen im Raume.

Es soll hier eine geschichtliche Darlegung der Entwickelung der heutigen Theorie der Liniencomplexe und Strahlensysteme eingeschaltet werden. Freilich ist sie nur knapp und insbesondere auf schon fortgeschrittene Leser berechnet. *Wir heben daher mit Nachdruck hervor*, *dass dieser Paragraph ohne Schaden für das Verständnis des Späteren* von solchen Lesern *überschlagen werden mag*, denen er zu schwer erscheint. —

Schon in den bisherigen Entwickelungen dieses zweiten Abschnittes wurden wir bei mehreren Gelegenheiten auf die Betrachtung von *Geradenscharen im Raume* geführt, und im Laufe dieses Werkes werden derartige Raumgebilde oft eine wichtige Rolle spielen. Es erscheint uns aus diesem Grunde zweckmässig, jetzt einen knappgefassten und im wesentlichen nach der geschichtlichen Aufeinanderfolge der Entdeckungen angeordneten Überblick über die Theorie der Geradenscharen im Raume zu geben. Wir berichten dabei über diejenigen hierhergehörigen Arbeiten, die bis zu Plücker's liniengeometrischen Untersuchungen reichen. In den beiden nächsten Paragraphen entwickeln wir sodann in kurzen Zügen die wichtigsten von Plücker selbst herrührenden liniengeometrischen Ideen und wenden uns sodann zu neuen Theorien.

Untersuchungen im vorigen Jahrhundert.

Die aus dem *vorigen Jahrhundert* stammenden Untersuchungen über Geradenscharen im Raume haben, soweit uns bekannt, einen sehr speciellen Charakter. Behauptet man doch sogar, dass erst Monge die analytische Darstellung einer Geraden im Raume gegeben habe. Es ist wahrscheinlich, dass man zuerst solche Geradenscharen betrachtet hat, die nur ∞^1 Geraden enthalten, d. h. die Geradenscharen von Regelflächen. Hierbei erinnern wir daran, dass der jetzt so wohlbekannte Satz, dass jede nicht abwickelbare Fläche zweiten Grades in zwei Weisen von Geraden erzeugt wird, zuerst von einem Schüler von Monge gefunden wurde, dessen Name uns jedoch nicht überliefert ist. Verhältnismässig frühzeitig hat man natürlich auch gewisse specielle Scharen von ∞^3 Geraden betrachtet; es bildet ja z. B. der Inbegriff aller Tangenten einer Fläche eine derartige specielle Schar von ∞^3 Geraden. Ferner haben Euler und Monge gewisse specielle Scharen von ∞^2 Geraden eingeführt, nämlich die Scharen der Normalen von Flächen. Monge*) bemerkte, dass sich die Normalen einer

Euler u. Monge.

*) Monge, *Sur les lignes de courbure de la surface de l'ellipsoïde*, Journal de l'École polyt. 2. Heft (1795—96), S. 145. Hierin findet sich als Einleitung ein *Exposé sommaire des propriétés des surfaces courbes par rapport à leurs courbures*, S. 146—149. Vgl. auch Mémoires de l'Académie 1781, S. 684. Die

Fläche in zwei Weisen zu je ∞^1 developpabeln Flächen zusammenfassen lassen. Diese Bemerkung führte ihn einerseits zu dem wichtigen Begriff der Krümmungslinien, andererseits zu dem Begriff: Krümmungsmittelpunkte und in Verbindung damit zu dem Satze, dass die Normalen einer Fläche Doppeltangenten einer andern Fläche sind, nämlich der Fläche aller Krümmungsmittelpunkte. Ferner erkannte Monge, dass diejenigen Normalen, die einer gegebenen Normalen n unendlich benachbart sind, sämtlich zwei zu einander senkrechte, aber einander nicht schneidende Geraden treffen, nämlich die Geraden, die in dem ersten bez. zweiten Krümmungsmittelpunkte auf der Normalen n senkrecht stehen und der Tangente der zweiten bez. ersten Krümmungslinie parallel laufen.

Da es im ganzen ∞^4 Geraden

$$x = rz + \varrho, \quad y = sz + \sigma$$

im Raume giebt, so enthält eine Geradenschar, die nicht aus allen Geraden des Raumes besteht, entweder ∞^1 oder ∞^2 oder aber ∞^3 Geraden. Die Mathematiker des vorigen Jahrhunderts, insbesondere Euler und Monge, haben also zu diesen drei Kategorien von Geradenscharen specielle Beispiele gefunden und untersucht. In unserem Jahrhundert haben nun die Untersuchungen über Geradenscharen im Raume nach und nach einen allgemeineren Charakter angenommen.

Im Jahre 1808 betrachtete Malus*) die Annahme, dass jedem Punkte (x, y, z) des Raumes eine Gerade durch den Punkt zugeordnet sei durch solche Gleichungen in den laufenden Coordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$: Malus.

$$\mathfrak{x} - x = r(\mathfrak{z} - z), \quad \mathfrak{y} - y = s(\mathfrak{z} - z),$$

in denen r, s gegebene Functionen von x, y, z sind:

$$r = R(x, y, z), \quad s = S(x, y, z).$$

Er wählte insbesondere diejenigen Geraden dieser Schar aus, die den Punkten $(x + dx, y + dy, z + dz)$ in der Umgebung des Punktes (x, y, z) zugeordnet sind, und untersuchte, welche unter diesen Geraden die Gerade des Punktes (x, y, z) schneiden. Die Gleichungen der Geraden, die dem Punkte $(x + dx, y + dy, z + dz)$ zugeordnet ist, lauten:

$$\mathfrak{x} - x - dx = (R + dR)(\mathfrak{z} - z - dz),$$
$$\mathfrak{y} - y - dy = (S + dS)(\mathfrak{z} - z - dz).$$

Diese Gerade schneidet die Gerade des Punktes (x, y, z), wenn die zuerst von Malus aufgestellte Bedingung erfüllt ist:

$$(R\,dz - dx)\,dS - (S\,dz - dy)\,dR = 0,$$

die in dx, dy, dz vom zweiten Grade ist, da dR und dS in dx, dy, dz linear sind. Hiermit gelangte also Malus zu einer Monge'schen Gleichung zweiten Grades:

$$(22) \quad \alpha_{11}\,dx^2 + \alpha_{22}\,dy^2 + \alpha_{33}\,dz^2 + 2\alpha_{23}\,dy\,dz + 2\alpha_{31}\,dz\,dx + 2\alpha_{12}\,dx\,dy = 0,$$

in der die Coefficienten α_{ik} Functionen von x, y, z bedeuten. Es wurde in dieser

---

Vorlesungen von Monge an der École polytechnique sind später von Monge zusammengestellt worden in dem berühmten Werke: *Application de l'analyse à la géométrie*, letzte Auflage besorgt von Liouville, Paris, 1850. Daselbst vgl. insbesondere § 15.

*) Malus, *Optique*, Journal de l'École polyt., 7. Bd., 14. Heft (1808), S. 1. Vorher (1806) erschien von demselben Verfasser eine kurze nur Einiges enthaltende Note: *Optique* in der Correspondance de l'École polyt. I, S. 142.

Weise jedem Punkte ein Elementarkegel zweiten Grades zugeordnet, den man mit Recht als den *Malus'schen Kegel* bezeichnet hat. Zur Vermeidung von Irrtümern sei besonders hervorgehoben, dass die ∞^3 von Malus betrachteten Geraden durchaus nicht Integralcurven der obigen Monge'schen Gleichung sind.

Allgem. Liniencomplex.

Da Malus jedem der ∞^3 Punkte des Raumes eine durch ihn gehende Gerade zuordnete, so betrachtete er eine Schar von ∞^3 Geraden, also — wie wir uns heutzutage ausdrücken — einen allgemeinen *Liniencomplex.* Er hat also den Satz aufgestellt: Sobald jeder Geraden eines Liniencomplexes ein Punkt auf ihr zugeordnet wird, so findet die Bedingung des Schneidens solcher Geraden, deren zugeordnete Punkte einander unendlich benachbart sind, ihren analytischen Ausdruck in einer Monge'schen Gleichung zweiten Grades.

Strahlensysteme.

Aus diesem Satze, der wohl als der älteste Satz über Liniencomplexe zu bezeichnen ist, zog Malus einen wichtigen Schluss, der sich auf Scharen von ∞^2 Geraden bezieht, also auf Scharen, die man jetzt *Strahlensysteme* zu nennen pflegt. Er betrachtete nämlich die Punkte einer Fläche

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

und die ihnen nach seinen Festsetzungen zugeordneten, durch die betreffenden Punkte gehenden Geraden. Damit erhielt er ∞^2 Geraden, d. h. ein allgemeines Strahlensystem. Der durch die Monge'sche Gleichung (22) definierte Elementarkegel eines Punktes (x, y, z) der Fläche bestimmt nun *zwei* Fortschreitungsrichtungen auf der Fläche durch seinen Schnitt mit der Tangentenebene des Punktes (x, y, z). Demnach wird die ganze Fläche $\varphi = 0$ von zwei Scharen von je ∞^1 Curven c, k derart überdeckt, dass je zwei consecutive Geraden des Strahlensystems, die durch successive Punkte einer dieser Curven gehen, einander schneiden (siehe Fig. 59). *Die Geraden des Strahlensystems ordnen sich daher in zwei Scharen von je ∞^1 abwickelbaren Flächen an*, und diese Flächen schneiden die Fläche $\varphi = 0$ in jenen zwei Scharen von je ∞^1 Curven. Diese Curven c, k sind zugleich diejenigen Integralcurven der Monge'schen Gleichung (22), die auf der Fläche $\varphi = 0$ verlaufen. Zieht man auf der Fläche $\varphi = 0$ eine beliebige Curve, so werden die Geraden des Strahlensystems, die durch die Punkte dieser Curve gehen, eine Regelfläche bilden. Jede Curve der Fläche kann daher als das Bild einer Regelfläche angesehen werden, deren Geraden dem Strahlensystem angehören. Insbesondere sind mithin diejenigen Integralcurven der Monge'schen Gleichung (22), die auf der Fläche $\varphi = 0$ verlaufen, die *Bilder der Developpabeln, deren Geraden dem Strahlensystem zugehören.* Diese zweimal ∞^1 abwickelbaren Flächen haben nun zweimal ∞^1 Rückkehrcurven C, K. Da nun diese Rückkehrcurven C, K der Developpabeln zwei Flächenmäntel erzeugen — die übrigens zusammen im allgemeinen eine irreducibele Fläche bilden werden —, so erkannte Malus weiterhin, *dass alle Strahlen eines Strahlensystems Doppeltangenten einer aus zwei Mänteln bestehenden Fläche sind.* Diese Fläche hat man die *Brennfläche* oder auch ihre beiden Mäntel die *Brennflächen* des Strahlensystems genannt.

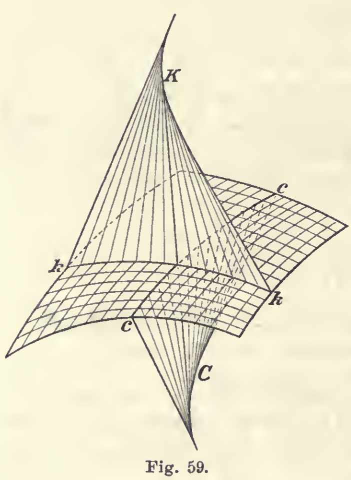

Fig. 59.

Erwähnt werden muss hierbei allerdings noch der Ausnahmefall, dass sich die Rückkehrcurven einer der Scharen von ∞^1 Developpabeln auf Punkte reducieren können, sodass die eine oder beide Brennflächen *Brenncurven* werden. Man kommt so zu den Strahlensystemen, deren Geraden diejenigen Tangenten einer gegebenen Fläche (*Brennfläche*) sind, die ausserdem eine gegebene Curve (*Brenncurve*) schneiden, und insbesondere zu den Strahlensystemen, die aus den Treffgeraden zweier Curven (*Brenncurven*) oder aus den Secanten einer Curve (*Brenncurve*) bestehen *). Auch kann es vorkommen, dass die beiden Mäntel der Brennfläche zusammenfallen **).

Durch jeden Punkt (x, y, z) der Fläche $\varphi = 0$ gehen zwei abwickelbare Flächen, deren Geraden dem Strahlensystem angehören. Diese beiden Flächen schneiden sich in dem Strahl des Punktes (x, y, z) nach einem gewissen Winkel, der im allgemeinen von Punkt zu Punkt ein anderer sein wird. Malus stellte nun noch die Bedingung dafür auf, dass dieser Winkel beständig ein Rechter ist, und kam so zu dem Strahlensystem, dessen Geraden die *Normalen der Fläche* $\varphi = 0$ sind, sodass die oben erwähnten auf der Fläche gelegenen zweimal ∞^1 Integralcurven c, k der Monge'schen Gleichung (22) die *Krümmungslinien* der Fläche werden ***).

Auf die schönen Anwendungen, die Malus von diesen Betrachtungen in der Optik gemacht hat, gehen wir erst später ein. Es dürfte dagegen angebracht sein, zu betonen, *dass Monge und Malus durch ihre Entwickelungen im Grunde die moderne Theorie der Strahlensysteme geschaffen haben.*

Nach Malus haben sich viele Mathematiker mit liniengeometrischen Problemen beschäftigt, indem sie zum Teil specielle Geradensysteme mehr oder minder eingehend untersuchten und zum Teil Beiträge zur allgemeinen Theorie der Geradensysteme gaben.

Binet betrachtete 1811 †) das System der ∞^3 *Hauptträgheitsaxen* eines starren materiellen Körpers in bezug auf die verschiedenen Punkte des Raumes und zeigte, dass sie die Normalen einer Schar von confocalen Flächen zweiten Grades sind. Diese Schar wurde dann von Ampère 1821 weiter untersucht ††). Der von diesen Geraden gebildete Liniencomplex ist in neuerer Zeit unter dem

Binet.

Ampère.

*) Man hat neuerdings die Frage aufgeworfen, ob es Strahlensysteme giebt, deren Geraden eine Curve C dreimal treffen. Die Fragesteller hatten offenbar nicht bemerkt, dass diese Frage factisch durch Malus erledigt ist. Denn definiert man wie Malus ein Strahlensystem als die den Punkten einer Fläche $\varphi = 0$ zugeordneten Strahlen, so müsste es unter den Strahlen, die durch die einem Punkte p der Fläche $\varphi = 0$ benachbarten Punkte der Fläche gehen, drei geben, die den Strahl des Punktes p schneiden. Dann also müsste der Elementarkegel *zweiten* Grades (22) des Punktes p mit der Tangentenebene des Punktes *drei* Geraden gemein haben, also alle. Dies führt mithin auf das triviale Strahlensystem, das aus allen Geraden in einer Ebene besteht.

**) Insbesondere kann es vorkommen, dass die beiden Mäntel der Brennfläche zusammenfallen sowie auch die beiden Berührpunkte jedes Strahles mit den Brennflächen. Alsdann sind die Strahlen die *Haupttangenten* einer Fläche (der Brennfläche). Hierauf kommen wir später zurück.

***) Dieser specielle Fall ist, wie oben erwähnt wurde, schon von Monge betrachtet worden. Einige ältere Verfasser haben wohl mit Unrecht Monge die allgemeineren Betrachtungen zugeschrieben, die Malus anstellte.

†) Binet, *Mémoire sur la théorie des axes conjugués et des momens d'inertie des corps.* (Gelesen im Institut 1811.) Journal de l'École polyt., 16. Heft, 9. Bd. S. 41.

††) Ampère, *Mémoire sur quelques nouvelles propriétés des axes permanens de rotation des corps et des plans directeurs de ces axes.* (Gelesen 1821.) Mémoires de l'Académie des sciences, 5. Bd., gedruckt 1826, S. 86.

Namen: *tetraedraler Complex* vielfach behandelt worden, und wir kommen im nächsten Kapitel ausführlich hierauf zurück. Bei Ampère findet sich auch die explicite Darstellung des Kegels zweiten Grades, der von allen den Geraden dieses Complexes gebildet sind, die durch einen gegebenen Punkt gehen.

Linearer Liniencomplex. Aus den ersten Jahrzehnten unseres Jahrhunderts stammen ferner die ersten Untersuchungen über *lineare Liniencomplexe.* Man versteht darunter diejenigen Scharen von ∞^3 Geraden, denen die Eigenschaft zukommt, dass durch jeden Punkt ∞^1 ein *ebenes* Büschel bildende Geraden der Schar gehen. Durch einen derartigen Complex wird also jedem Punkt (*Nullpunkt*) eine durch ihn gehende Ebene (*Nullebene*) zugeordnet, und diese Zuordnung, die man nach Möbius als ein *Nullsystem* bezeichnet und die wir im vorigen Kapitel auseinandergesetzt haben, ist es, die zuerst in der geschichtlichen Entwickelung auftrat. Dabei ging man wie beim tetraedralen Complex von mechanischen Überlegungen aus, indem man an die Bewegungen im Raume anknüpfte. Soweit uns bekannt, wurden die Nullsysteme zuerst von Giorgini 1827 *) behandelt. Später (1833) gelangte Möbius **), wie es scheint, auf demselben Wege, zu den Nullsystemen und den damit verbundenen *linearen Complexen*, die aus den Geraden bestehen, die wir im vorigen Kapitel als die *Nullgeraden* bezeichneten. Hinzuzufügen ist, dass sich später (1837) auch Chasles ***) mit den Beziehungen zwischen infinitesimalen Bewegungen und linearen Complexen eingehend beschäftigte.

Nullsystem. Giorgini. Möbius. Chasles.

Indem wir wieder zu den Strahlensystemen übergehen, müssen wir bis zum Jahre 1830 zurückkehren, um Hamilton †) zu erwähnen. Man nennt Hamilton gern den eigentlichen Begründer der Theorie der Strahlensysteme. So verdienstvoll aber auch die liniengeometrischen Arbeiten dieses hervorragenden Forschers sind, glauben wir doch hervorheben zu müssen, dass Malus lange vorher die grundlegenden Ideen entwickelte. Wir knüpfen hier an, dass sich viel später (1859) auch Kummer ††) mit der allgemeinen Theorie der Strahlensysteme befasste. Er führte das Dichtigkeitsmass für Strahlensysteme ein, das insbesondere für das System der Normalen einer Fläche mit dem Gaussischen Krümmungsmass der Fläche identisch ist. Kummer's allgemeine Untersuchungen über Strahlensysteme dürften indess vielleicht weniger Bedeutung für die Entwickelung der Geometrie gehabt haben als seine Untersuchungen über Strahlensysteme erster und zweiter Ordnung aus dem Jahre 1866 †††). Die Betrachtung der zugehörigen Brennflächen führte ihn zu wichtigen Flächen, unter andern zu der nach ihm benannten Fläche vierter Ordnung und vierter Classe, die als besonderen Fall die viel früher untersuchte *Fresnel'sche Wellenfläche* umfasst.

Hamilton. Kummer.

---

*) Memorie di mat. della soc. ital. delle scienze, 20. Bd., Modena 1827. Diese Arbeit ist uns leider nicht zugänglich gewesen.

**) Möbius, *Über eine besondere Art dualer Verhältnisse zwischen Figuren im Raume*, Crelle's Journal 10. Bd. (1833), S. 317, vgl. auch *Lehrbuch der Statik, Erster Teil*, Leipzig 1827, § 69, § 84 u. s. w. (Ges. Werke 3. Bd.).

***) Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géom.* (1837), dtsch. v. Sohncke (1839), daselbst Note XXXIV, § 4—6, S. 451, sowie: *Propriétés géométriques relatives au mouvement infiniment petit d'un corps solide libre dans l'espace* Comptes Rendus 16. Bd. (1843), S. 1420.

†) Hamilton, *Supplements to an essay on the theory of systems of rays.* Transactions of the R. Irish Acad., 16. Bd. (1830), S. 3.

††) Kummer, *Allgemeine Theorie der geradlinigen Strahlensysteme.* Crelle's Journal Bd. 57 (1860), S. 189 (datiert von 1859).

†††) Kummer, *Über die algebraischen Strahlensysteme, insbesondere über die der ersten und zweiten Ordnung.* Abhandl. der Berliner Akademie 1866 (gedruckt 1867), S. 1.

Interessant sind einige Untersuchungen von Abel Transon*) (1861), in denen er die in einem Liniencomplexe enthaltenen Strahlensysteme, die Normalensysteme von Flächen sind, zu bestimmen unternimmt. Dies Problem kommt zurück auf das der Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, die sich sofort aufstellen lässt, sobald die Gleichung des Complexes in den vier Bestimmungsstücken der Geraden vorliegt. Charakteristisch für die Kategorie von Differentialgleichungen, auf die man so geführt wird, ist, dass mit einer Fläche auch alle ∞^1 Parallelflächen Integralflächen sind, dass also die partielle Differentialgleichung eine infinitesimale Dilatation im Raume zulässt. Der Leser wird den Begriff Dilatation im Raume aus dem entsprechenden in der Ebene sofort ableiten können, wenn er nur die Linienelemente durch Flächenelemente ersetzt. Transon erkannte, dass das Integrationsgeschäft bei seiner Kategorie von partiellen Differentialgleichungen gewisse Vereinfachungen gestattet. Ähnliche Vereinfachungen treten überhaupt ein, wenn eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung eine infinitesimale Berührungstransformation zulässt. Doch gehen wir auf diesen letzteren Punkt erst viel später ein. Transon.

Ein besonderes Interesse bieten einige lange Zeit unbeachtet gebliebene Untersuchungen, in denen der Begriff *Liniencoordinaten* in richtiger Weise, wenn auch zuerst ohne die moderne Bezeichnung, eingeführt wurde. Da die ∞^4 Geraden Liniencoordinaten.

$$x = rz + \varrho, \quad y = sz + \sigma$$

von den vier wesentlichen Constanten r, s, ϱ, σ abhängen, so stellt eine Gleichung zwischen r, s, ϱ, σ die Geraden eines Liniencomplexes dar. Hier bemerkte man aber, dass sich, wenn eine solche Geradenschar durch eine Gleichung n^{ten} Grades in r, s, ϱ, σ dargestellt wird, der Grad n bei orthogonaler Transformation (und umsomehr bei projectiver Transformation) ändert. Man fand nun — und das ist die eigentliche Grundlage der neueren Liniengeometrie —, dass es möglich ist, statt jener vier Bestimmungsstücke der Geraden deren *fünf*, r, s, ϱ, σ, η, in solcher Weise einzuführen, dass der Grad der Gleichung eines Complexes bei den genannten Transformationen ungeändert bleibt. Natürlich muss zwischen diesen *fünf Liniencoordinaten* eine gewisse Relation bestehen.

Hierauf kommen wir im nächsten Paragraphen zurück, und wir beschränken uns hier auf kurze geschichtliche Notizen. Ursprünglich hat man nicht jene vier oder fünf Liniencoordinaten eingeführt, sondern deren sogar *sechs homogene:*

Im Jahre 1844 bestimmte Grassmann in seiner Ausdehnungslehre**) zuerst Grassmann. die Gerade im Raume durch sechs Grössen, die er *Zeiger* nannte und die im Grunde genommen nichts anderes sind als die sechs homogenen Liniencoordinaten. Er fügte hinzu, dass die Bestimmung der geraden Linie durch ihre Zeiger zu eigentümlichen, bisher nicht beachteten Gebilden führe, die er zuerst in einer Abhandlung in Crelle's Journal 24. Bd. (1842)***) der Betrachtung unterworfen habe. Beim Neudruck seiner Ausdehnungslehre im Jahre 1877 schaltete er noch die Anmerkung ein: „Diese Gebilde sind besonders seit Plücker's letztem Werke «Neue Geometrie des Raumes 1868» vielfach von den ausgezeichnetsten Mathematikern bearbeitet worden und bilden den Hauptgegenstand der heutigen *Liniengeometrie.*" Obgleich er auf seine Abhandlung in Crelle's Journal 24. Bd. verweist, können wir doch die Ansprüche, die er mit *diesem* Citate in bezug auf die

*) Transon, *Mémoire sur les propriétés d'un ensemble de droites menées de tous les points de l'espace, suivant une loi continue.* Journal de l'École polyt., 38. Heft, 22. Bd. (1861), S. 193.

**) Grassmann, *Die lineale Ausdehnungslehre*, Leipzig 1844, insbesondere S. 167 u. 170, in den Gesammelten Werken 1. Bd., 1. Teil, S. 192 u. 195.

***) Grassmann, *Theorie der Centralen*, Crelle's Journal 24. Bd. (1842), S. 262 u. 372.

Liniengeometrie erhebt, nicht anerkennen. In der *Fortsetzung**) jener Abhandlung im 25. Bande (1843) hatte er allerdings Bestimmungsstücke von Geraden eingeführt, aber nur Bestimmungsstücke jener ∞^3 Geraden, die eine feste Gerade schneiden, und zwar gab er dafür vier Bestimmungsstücke, die einer Relation zweiten Grades genügen.

Plücker. Plücker hob im Jahre 1846 **) ausdrücklich hervor, dass eine Gerade im Raume von *vier* Bestimmungsstücken abhängt, und nannte die oben erwähnten Bestimmungsstücke r, s, ϱ, σ die *Liniencoordinaten.* Er setzte hinzu, dass sich die Liniengeometrie des Raumes als eine sinnliche Geometrie eines *vier*dimensionalen Raumes auffassen lässt. Auf diese Bemerkung kommen wir nachher zurück. Durch seinen Übergang zu physikalischen Arbeiten wurde Plücker für lange Jahre an der Ausführung der von ihm angedeuteten Ideen gehindert.

Cayley. Unabhängig von Grassmann benutzte Cayley 1859 ***) die sechs homogenen Liniencoordinaten, ohne auf ihre Bedeutung als solche besonderes Gewicht zu legen. Hauptsache war ihm nämlich vielmehr die interessante Bemerkung, dass man eine Raumcurve analytisch durch *eine* Gleichung darstellen kann. Er stellte sie nämlich dar durch die Gleichung, die zwischen den Liniencoordinaten der ∞^3 Treffgeraden jener Curve besteht. Er ersetzte also factisch die Raumcurve durch den Liniencomplex aller Geraden, welche die Curve treffen.

Plücker. Kummer. Augenscheinlich unabhängig von Grassmann und Cayley führte alsdann Plücker 1865 †) die oben erwähnten *fünf* Liniencoordinaten $r, s, \varrho, \sigma, \eta$ sowie die sechs homogenen Liniencoordinaten in die Geometrie ein und machte viele wichtige Anwendungen von ihnen. Im folgenden Jahre hat auch Kummer die sechs homogenen Liniencoordinaten benutzt ††).

Raum von n Dimensionen. Es möge hier noch auf die geschichtliche Entwickelung eines für die Liniengeometrie äusserst wichtigen Begriffes, nämlich des Begriffes: *Raum von n Dimensionen,* hingewiesen werden. Gewiss ist lange vor Grassmann und Plücker der abstracte Begriff des n-fach ausgedehnten Raumes in der Analysis aufgetreten; wir meinen damit die Anschauung, dass es für die Auffassung der Beziehungen zwischen Gleichungen in n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ zweckmässig ist, die Begriffe und die Terminologie der *analytischen* Geometrie auf einen abstracten n-fach ausgedehnten Raum auszudehnen, also statt Wertsystem $(x_1 \ldots x_n)$ Punkt, statt System von q Gleichungen in $x_1 \ldots x_n$ auch $(n-q)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit u. s. w. zu sagen. Wir halten es für wahrscheinlich, dass nicht allein Gauss und Cauchy, sondern auch Euler und Lagrange mit solchen Vorstellungen operiert haben, wenn sich auch kaum deutliche Beweise hierfür in den Veröffentlichungen der beiden letzteren Mathematiker erbringen lassen.

---

*) Desgl. Fortsetzung, Crelle's Journal 25. Bd. (1843), S. 57, vgl. insbesondere S. 62 u. f.

**) Plücker, *System der Geometrie des Raumes in neuer analytischer Behandlungsweise, insbesondere die Theorie der Flächen zweiter Ordnung und Classe enthaltend,* Düsseldorf 1846, 2. Aufl. 1852. Siehe insbes. Nr. 258 (S. 322).

***) Cayley, *On a new analytical representation of curves in space*, Quarterly Journal of Math. 3. Bd. (1860), S. 225 (datiert von 1859), u. 5. Bd. (1862), S. 81 (datiert von 1860). Beide Abhandlungen in den Collected Papers 4. Bd., S. 446 u. 490.

†) Plücker, *On a new geometry of space*, Philosoph. Transactions 155. Bd. (1865), S. 725, übersetzt in Liouville's Journal de Math. 2. Serie 11. Bd. (1866), S. 337. Ferner in dem Werke: Plücker, *Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement*, herausgeg. von Klein, Leipzig 1868—69, auf den ersten Seiten.

††) Kummer, *Über die algebraischen Strahlensysteme u. s. w.*, Abhandlungen d. Berliner Acad. 1866 (gedruckt 1867), S. 1, vgl. insbes. S. 7.

In Grassmann's erster Ausdehnungslehre vom Jahre 1844 findet man jedenfalls den abstracten Begriff des n-fach ausgedehnten Raumes in voller Allgemeinheit. Insbesondere verweisen wir auf folgende Sätze der Note, die Grassmann in Grunert's Archiv 1845 *) darüber veröffentlichte: Grassmann.

„Meine Ausdehnungslehre bildet die abstracte Grundlage der Raumlehre, das heisst, sie ist die von allen räumlichen Anschauungen losgelöste, rein mathematische Wissenschaft, deren specielle Anwendung auf den Raum die Raumlehre ist."

„Doch sind die Sätze der Ausdehnungslehre nicht etwa blosse Übertragungen geometrischer Sätze in die abstracte Sprache, sondern haben eine viel allgemeinere Bedeutung; denn, während die Raumlehre gebunden bleibt an die drei Dimensionen des Raumes, so bleibt die abstracte Wissenschaft von diesen Schranken frei."

Grassmann fasste also die von Descartes und seinen Nachfolgern begründete analytische Geometrie des Raumes als eine reine Analysis in drei Veränderlichen auf, und diese rein analytische Wissenschaft dehnte er mit voller Consequenz auf n Veränderliche aus. Mag auch Grassmann den Wert seiner Ausdehnungslehre vielleicht überschätzt haben, so ist es doch sicher, *dass er als der Begründer des Begriffes: n-dimensionaler Raum in hohem Masse zur Weiterentwickelung der Mathematik beigetragen hat.*

Auf der andern Seite steht die Idee der Durchführung *einer sinnlichen Darstellung der Geometrie des n-fach ausgedehnten Raumes.* Sie ist das Verdienst von Plücker, der — wie wir schon bemerkten (S. 274) — darauf hinwies, dass der gewöhnliche dreidimensionale Raum, sobald man in ihm nicht den Punkt, sondern die Gerade als Element wählt, als ein vierdimensionales Gebilde erscheint, dessen Elemente vier von einander unabhängige Coordinaten r, s, ϱ, σ besitzen. Allerdings sind auch Grassmann solche Ideen wohl nicht fremd gewesen. Plücker.

§ 3. Grundlagen der Plücker'schen Liniengeometrie.

Öfters schon machten wir davon Gebrauch, dass eine beliebige Gerade im Raume mit den Cartesischen Coordinaten x, y, z durch zwei lineare Gleichungen

$$x = rz + \varrho, \quad y = sz + \sigma \tag{23}$$

dargestellt wird, in denen r, s, ϱ, σ vier Constanten sind derart, dass verschiedenen Wertsystemen dieser Constanten stets auch verschiedene Geraden des Raumes entsprechen. Diese vier Bestimmungsstücke r, s, ϱ, σ können daher mit Plücker (1846) als Coordinaten der Geraden, als *Liniencoordinaten* **), bezeichnet werden. Vier Liniencoordinaten.

Stellen wir eine Gleichung zwischen diesen vier Liniencoordinaten her:

$$F(r, s, \varrho, \sigma) = 0,$$

*) Grassmann, *Kurze Übersicht über das Wesen der Ausdehnungslehre*, Grunert's Archiv, 6. Bd. (1845), S. 337. Siehe auch die *Ausdehnungslehre von* 1844, Leipzig 1878, S. 277, sowie Ges. Werke 1. Bd., 1. Teil, S. 297.

**) Vgl. Plücker's schon citiertes Werk: *System der Geometrie des Raumes u. s. w.*, Düsseldorf 1846.

so werden durch diese Gleichung ∞^3 Geraden aus der Gesamtheit aller ∞^4 Geraden des Raumes ausgewählt; also stellt jede derartige Gleichung nach Plücker's Terminologie einen *Liniencomplex* dar. Diese Darstellung ist ein Analogon zur analytischen Darstellung einer Curve in der (xy)-Ebene oder einer Fläche im Raume (x, y, z), denn eine Curve der (xy)-Ebene wird durch eine Gleichung

Linien-complex.

$$\varphi(x, y) = 0,$$

eine Fläche im Raume (x, y, z) durch eine Gleichung

$$\Phi(x, y, z) = 0$$

gegeben. Aber in einem wesentlichen Punkte ist die Analogie nicht mehr vorhanden.

Fassen wir nämlich algebraische Gleichungen ins Auge, so ist es bekannt, dass eine algebraische Gleichung $\varphi(x,y)=0$ oder $\Phi(x,y,z)=0$ ihren *Grad* nicht ändert, sobald man die Punkte auf ein neues rechtwinkliges Coordinatensystem (x', y', z') bezieht. Denn x', y', z' drücken sich in diesem Falle linear durch die alten Coordinaten x, y, z aus. Entsprechendes gilt nun nicht bei den Liniencoordinaten r, s, ϱ, σ. Man erkennt dies sehr leicht, wenn man z. B. bloss die Änderung der Coordinatenaxen vornimmt:

$$x' = x, \quad y' = z, \quad z' = y,$$

denn bei ihr geht die Gerade (23) über in diese:

$$x' = ry' + \varrho, \quad z' = sy' + \sigma,$$

und letztere Gleichungen geben nach x' und y' aufgelöst:

$$x' = \frac{r}{s} z' + \frac{s\varrho - r\sigma}{s}, \quad y' = \frac{1}{s} z' - \frac{\sigma}{s}.$$

Soll aber diese neue Gerade die Liniencoordinaten $r', s', \varrho', \sigma'$ haben, so müssen die letzten Gleichungen dieselben sein wie:

$$x' = r'z' + \varrho', \quad y' = s'z' + \sigma',$$

sodass

$$r' = \frac{r}{s}, \quad s' = \frac{1}{s}, \quad \varrho' = \frac{s\varrho - r\sigma}{s}, \quad \sigma' = -\frac{\sigma}{s} \tag{24}$$

wird.

Wenn nun eine Gleichung n^{ten} Grades in $r', s', \varrho', \sigma'$ vorliegt, und wenn man darin für $r', s', \varrho', \sigma'$ diese Werte einsetzt, so sieht man sofort, dass die hervorgehende Gleichung in r, s, ϱ, σ im Allgemeinen *nicht* vom n^{ten} Grade ist.

Diesem Übelstand lässt sich nun auf folgende Weise abhelfen: Zu den beiden Gleichungen (23) einer Geraden fügen wir noch diejenige hinzu, die durch Elimination von z aus ihnen hervorgeht, sodass die drei Gleichungen vorliegen:

$$(25)\qquad x = rz + \varrho,\quad y = sz + \sigma,\quad ry - sx = r\sigma - s\varrho,$$

von denen dann eine eine Folge der beiden anderen ist. In diesen drei Gleichungen treten die *fünf* Grössen:

$$r,\ s,\ \varrho,\ \sigma,\ r\sigma - s\varrho$$

linear auf. Die letzte bezeichnen wir mit η:

$$(26)\qquad \eta \equiv r\sigma - s\varrho.$$

Alsdann können wir unter den Liniencoordinaten der Geraden (24) oder (25) die *fünf* Grössen $r, s, \varrho, \sigma, \eta$ verstehen, wobei allerdings zu beachten ist, dass sich die fünfte, η, durch die übrigen ausdrücken lässt infolge von (26). **Fünf Linien-coordinaten.**

Wenn wir nun irgend eine orthogonale oder gleich allgemeiner eine beliebige projective Punkttransformation ausüben, so geht die Gerade (25) mit den Liniencoordinaten $r, s, \varrho, \sigma, \eta$ in eine neue Gerade mit neuen Liniencoordinaten $r', s', \varrho', \sigma', \eta'$ über, wobei

$$\eta' \equiv r'\sigma' - s'\varrho'$$

zu setzen ist. $r', s', \varrho', \sigma'$ lassen sich durch r, s, ϱ, σ ausdrücken, also auch η'. Man findet aber, *dass sich die fünf Grössen $r', s', \varrho', \sigma', \eta'$ linear gebrochen mit gleichen Nennern durch die fünf Grössen $r, s, \varrho, \sigma, \eta$ ausdrücken lassen.* Da wir dies später (S. 285) auf bequemerem Wege zeigen können, unterdrücken wir hier den Nachweis und führen ihn nur für das obige specielle Beispiel (24), in dem sich sofort ergiebt:

$$r' = \frac{r}{s},\quad s' = \frac{1}{s},\quad \varrho' = \frac{-\eta}{s},\quad \sigma' = \frac{-\sigma}{s},\quad \eta' = \frac{-\varrho}{s}.$$

Liegt nun eine von (26) verschiedene Gleichung in den fünf Liniencoordinaten $r, s, \varrho, \sigma, \eta$ vor:

$$F(r, s, \varrho, \sigma, \eta) = 0,$$

so definiert sie, da η den Wert (26) hat und diese Gleichung also eine Gleichung zwischen den *vier* ursprünglichen Liniencoordinaten r, s, ϱ, σ ist, ∞^3 Geraden im Raume. Ist sie algebraisch und vom n^{ten} Grade in den fünf Grössen $r, s, \varrho, \sigma, \eta$ und übt man auf die Punkte des Raumes eine projective Transformation aus, so gehen die ∞^3 Geraden in neue Geraden über, deren Liniencoordinaten $r', s', \varrho', \sigma', \eta'$ sich, wie bemerkt, linear gebrochen mit gleichen Nennern durch $r, s, \varrho, \sigma, \eta$ ausdrücken. Umgekehrt drücken sich also auch $r, s, \varrho, \sigma, \eta$ linear gebrochen mit gleichen Nennern durch $r', s', \varrho', \sigma', \eta'$ aus. Die Gleichung n^{ten} Grades $F = 0$ geht also in eine Gleichung n^{ten} Grades

$$F_1(r', s', \varrho', \sigma', \eta') = 0$$

in den fünf Liniencoordinaten der ∞^3 neuen Geraden über. *Der Grad einer algebraischen Gleichung in den fünf Liniencoordinaten* $r, s, \varrho, \sigma, \eta$ *bleibt also bei projectiver Transformation des Raumes invariant.*

Dieser Ideengang war es, der Plücker 1865*) veranlasste, ausser r, s, ϱ, σ noch als überzählige fünfte Liniencoordinate die Grösse $\eta \equiv r\sigma - s\varrho$ einzuführen.

Sechs homogene Linien-coordinaten.

Wie man nun mit Vorteil statt der drei gewöhnlichen Punktcoordinaten im Raume vier *homogene* Punktcoordinaten benutzt, so kann man auch statt der bisherigen fünf Liniencoordinaten *sechs homogene Liniencoordinaten* einführen. Es kommt alsdann nur auf die fünf Verhältnisse dieser homogenen Coordinaten an, und es besteht zwischen diesen fünf Werten eine Relation, entsprechend der Relation (26). Solche homogene Liniencoordinaten wurden durch Grassmann (1844) und unabhängig von ihm durch Cayley (1859) und Plücker (1865) eingeführt**).

Grassmann's Linien-coordinaten.

Nach Grassmann gehen wir von folgender Überlegung aus: Sind y_1, y_2, y_3, y_4 und z_1, z_2, z_3, z_4 homogene Coordinaten zweier Punkte des Raumes und sind x_1, x_2, x_3, x_4 die homogenen Coordinaten eines veränderlichen Punktes des Raumes, so liegt der letztere Punkt (x) dann und nur dann auf der Geraden der Punkte (y) und (z), wenn alle dreireihigen Determinanten der Matrix:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}$$

verschwinden. Die Gleichungen, die durch Nullsetzen dieser dreireihigen Determinanten hervorgehen, sind mithin die Gleichungen einer Geraden in den laufenden Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4. Diese Coordinaten haben darin als Coefficienten die zweireihigen Determinanten von der Form

$$(27) \qquad p_{ik} \equiv \begin{vmatrix} y_i & y_k \\ z_i & z_k \end{vmatrix} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

Insgesamt giebt es sechs solche Grössen p_{ik}, da $p_{ii} \equiv 0$ und $p_{ki} \equiv -p_{ik}$ ist. Diese sechs Grössen, etwa:

*) Vgl. Plücker's in der 4. Fussnote, S. 274, citierte Arbeiten. Implicite war der im Text erwähnte Übelstand der Veränderlichkeit des Grades bei projectiver Transformation schon vorher von Grassmann und Cayley durch die von ihnen eingeführten homogenen Liniencoordinaten überwunden worden. Vgl. die geschichtliche Übersicht in § 2.

**) Man vergleiche die in den Fussnoten, S. 273 u. 274, genannten Schriften von Grassmann, Cayley und Plücker, sowie überhaupt die dort im Text gegebene geschichtliche Darstellung.

$$p_{12},\ p_{13},\ p_{14},\ p_{23},\ p_{42},\ p_{34},$$

lassen sich daher nach Grassmann als *homogene Liniencoordinaten* der Geraden benutzen, die durch die beiden Punkte (y) und (z) hindurchgeht. Liniencoord. p_{ik}.

Diese Definition der homogenen Liniencoordinaten p_{ik} lehrt unmittelbar eine wichtige Eigenschaft derselben bei projectiver Transformation des Raumes. Eine projective Punkttransformation wird nämlich in den homogenen Punktcoordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 dargestellt durch vier auflösbare lineare homogene Gleichungen:

$$x_i' = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{i4}x_4 \quad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{28}$$

Setzt man also

$$y_i' = a_{i1}y_1 + \cdots + a_{i4}y_4, \qquad z_i' = a_{i1}z_1 + \cdots + a_{i4}z_4$$
$$(i = 1, 2, 3, 4),$$

so ist es eine bekannte Thatsache, dass sich die Determinanten

$$p_{ik}' = \begin{vmatrix} y_i' & y_k' \\ z_i' & z_k' \end{vmatrix}$$

linear und homogen aus den Determinanten

$$p_{ik} = \begin{vmatrix} y_i & y_k \\ z_i & z_k \end{vmatrix}$$

zusammensetzen. Es kommt ja augenscheinlich:

$$p_{ik}' = \sum_{\mu\nu}^{1..4} a_{i\mu}a_{k\nu}p_{\mu\nu} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4). \tag{29}$$

Somit haben wir:

Satz 4: *Bei projectiver Transformation des Raumes werden die homogenen Liniencoordinaten p_{ik} linear und homogen transformiert.* Proj. Trf. des Raumes.

Unabhängig von Grassmann hat Cayley 1859 dieselben sechs homogenen Liniencoordinaten eingeführt. Cayley's Betrachtungen. Wir haben Cayley's Betrachtung schon im vorigen Paragraphen erwähnt und wiederholen hier nur, dass er bemerkte, dass eine Curve, sobald sie als Ort ihrer ∞^3 Treffgeraden aufgefasst wird, die ja einen Liniencomplex bilden, durch eine einzige Gleichung zwischen den Liniencoordinaten p_{ik} dieser Geraden, eben durch die Gleichung dieses besonderen Complexes, dargestellt wird. Hierzu tritt sodann die erst von Cayley aufgestellte Relation, die stets zwischen den sechs Liniencoordinaten p_{ik} bestehen muss.

Diese Relation, deren Notwendigkeit schon daraus folgt, dass es nur ∞^4 Geraden im Raume giebt, ergiebt sich aus dem Satze, dass die sechs zweireihigen Determinanten p_{ik} der Matrix

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}$$

eine quadratische Gleichung erfüllen, einem Satze, den Cayley*) schon 1859 als „wohlbekannt" bezeichnete. In der That besteht zwischen ihnen für alle Werte der y und z die Gleichung

$$(30) \qquad p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} \equiv 0,$$

wie man durch Ausrechnung verificiert.

Cayley zeigte ferner, was wir hier ohne Beweis nur erwähnen wollen, dass eine lineare Gleichung zwischen den p_{ik} nur dann alle Treffgeraden einer Geraden des Raumes darstellt, wenn zwischen ihren Coefficienten eine gewisse quadratische Relation besteht. Hierauf kommen wir nachher zurück. Er fügte hinzu, dass eine Gleichung zwischen den Liniencoordinaten p_{ik} unter Umständen von allen Tangenten einer Fläche erfüllt wird, nicht aber immer**). Man sieht, dass Cayley also die Liniencomplexe betrachtet hat, die von allen Treffgeraden einer Curve, insbesondere einer Geraden, gebildet werden, sowie die Complexe, die von allen Tangenten einer Fläche gebildet werden.

Plücker's Betrachtungen.

Plücker gelangte 1865 zu den *homogenen* Liniencoordinaten, indem er einmal — wie Grassmann und Cayley — die Geraden als Verbindungslinien zweier gegebener Punkte, das andere Mal als Schnitt zweier gegebener Ebenen auffasste.

Es mögen u_1, u_2, u_3, u_4 die homogenen Ebenencoordinaten in dem Coordinatensystem sein, in dem x_1, x_2, x_3, x_4 homogene Punktcoordinaten bedeuten, sodass die Gleichung

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0$$

die Bedingung dafür wird, dass der Punkt (x) in der Ebene (u) liegt. Es seien nun zwei Ebenen durch ihre homogenen Coordinaten v_1, v_2, v_3, v_4 und w_1, w_2, w_3, w_4 gegeben. Sind u_1, u_2, u_3, u_4 die Coordinaten einer beliebigen Ebene durch die Schnittgerade der Ebenen (v), (w), so ist

*) In Cayley's oben in d. 3. Fussnote S. 274 erwähnter Abhandlung, Collected Papers 4. Bd., S. 447. Von Klein rührt die Bemerkung her, dass die *allgemeinste* lineare homogene Transformation der p_{ik}, bei der die weiter unten erwähnte Bedingungsgleichung (30) invariant bleibt, die projectiven und dualistischen Transformationen des dreifachen Raumes liefert. Vgl. Klein's Dissertation, Düsseldorf 1869.

**) In der in der 3. Fussnote S. 274 genannten zweiten Abhandlung, S. 448 des 4. Bandes der Collected Papers.

die analytische Bedingung für diese die, dass alle dreireihigen Determinanten der Matrix:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{vmatrix}$$

verschwinden müssen. Nullsetzen dieser dreireihigen Determinanten giebt also die Gleichungen, die jene Schnittgerade in den laufenden homogenen Ebenencoordinaten u_1, u_2, u_3, u_4 darstellen. In diesen Gleichungen haben die u die Coefficienten

$$(31)\qquad q_{ik} \equiv \begin{vmatrix} v_i & v_k \\ w_i & w_k \end{vmatrix} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

So kommen wir, da $q_{ii} \equiv 0$, $q_{ki} \equiv - q_{ik}$ ist, insgesamt zu sechs homogenen Bestimmungsstücken

$$q_{12},\ q_{13},\ q_{14},\ q_{23},\ q_{42},\ q_{34}$$

der Geraden, die als Schnittlinie der beiden Ebenen (v) und (w) definiert ist. Es lassen sich also diese q_{ik} als *homogene Liniencoordinaten* auffassen. Auch zwischen diesen Liniencoordinaten besteht eine quadratische Relation analog der Relation (30) zwischen den p_{ik} identisch, nämlich offenbar diese: Liniencoord. q_{ik}.

$$(32)\qquad q_{12}q_{34} + q_{13}q_{42} + q_{14}q_{23} \equiv 0.$$

Angenommen, es seien zwei Geraden gegeben durch ihre homogenen Liniencoordinaten p_{ik} bez. p'_{ik}. Sind (y), (z) Punkte der einen, (y'), (z') Punkte der anderen Geraden, so können wir dann setzen:

$$(33)\qquad \begin{matrix} p_{ik} \equiv y_i z_k - y_k z_i, \\ p'_{ik} \equiv y'_i z'_k - y'_k z'_i \end{matrix} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

Die beiden Geraden schneiden sich dann und nur dann, wenn die vier Punkte (y), (z), (y'), (z') in einer Ebene liegen, d. h. wenn

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 & y'_4 \\ z'_1 & z'_2 & z'_3 & z'_4 \end{vmatrix} = 0$$

ist. Entwickeln wir diese Determinante zunächst nach y_1, y_2, y_3, y_4, alsdann die sich ergebenden dreireihigen Determinanten nach z_1, z_2, z_3, z_4, so erhalten wir zwölf Glieder, die sich paarweise vereinigen lassen und wegen (33) die Relation liefern:

$$(34)\qquad p_{12}p'_{34} + p_{13}p'_{42} + p_{14}p'_{23} + p_{23}p'_{14} + p_{42}p'_{13} + p_{34}p'_{12} = 0.$$

Bedingg. des Schneidens. Dies ist also die Bedingung dafür, *dass zwei Geraden mit den homogenen Liniencoordinaten* p_{ik} *bez.* p'_{ik} *einander schneiden.*

Sie muss natürlich insbesondere dann erfüllt sein, wenn beide Geraden zusammenfallen, also wenn wir jedes $p'_{ik} = p_{ik}$ setzen. Thun wir dies, so werden wir zu der oben aufgestellten Relation (30) geführt, die stets zwischen den Liniencoordinaten einer Geraden besteht. Bezeichnen wir die linke Seite dieser Relation mit P, setzen wir also

$$(30') \qquad P \equiv p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} \equiv 0,$$

so können wir die Bedingungsgleichung (34) für den Schnitt zweier Geraden (p_{ik}) und (p'_{ik}) auch so schreiben:

$$(34') \qquad \sum \frac{\partial P}{\partial p_{ik}} p'_{ik} = 0.$$

Hierin ist die Summe über alle sechs Liniencoordinaten p_{ik} zu erstrecken.

Die Relation (34) lehrt zugleich die Richtigkeit einer oben (S. 280) erwähnten Bemerkung von Cayley: Die in den p_{ik} lineare homogene Gleichung

$$\Sigma a_{ik} p_{ik} = 0$$

wird von allen Treffgeraden (p_{ik}) einer Geraden (p'_{ik}) erfüllt, wenn die Coefficienten a_{ik} als Liniencoordinaten p'_{ik} aufgefasst werden können, d. h. wenn sie der dazu notwendigen quadratischen Relation genügen:

$$a_{12}a_{34} + a_{13}a_{42} + a_{14}a_{23} = 0.$$

Ähnliche Betrachtungen lassen sich für die homogenen Liniencoordinaten q_{ik} aufstellen, die aus den homogenen Ebenencoordinaten abgeleitet wurden. Man findet, dass die Bedingung dafür, dass zwei Geraden (q_{ik}) und (q'_{ik}) einander schneiden, so lautet:

$$(35) \qquad \sum \frac{\partial Q}{\partial q_{ik}} q'_{ik} = 0,$$

wenn unter Q die nach (32) identisch verschwindende Grösse verstanden wird:

$$(32') \qquad Q \equiv q_{12}q_{34} + q_{13}q_{42} + q_{14}q_{23} \equiv 0.$$

Beziehung zwischen den p_{ik} und q_{ik}. Zwischen den homogenen Liniencoordinaten p_{ik} und q_{ik} besteht eine enge Beziehung: Sie sind einander proportional.

In der That, sind (y) und (z) zwei Punkte einer Geraden und (v), (w) zwei Ebenen durch die Gerade, so ist:

$$v_1y_1 + v_2y_2 + v_3y_3 + v_4y_4 = 0, \quad v_1z_1 + v_2z_2 + v_3z_3 + v_4z_4 = 0,$$
$$w_1y_1 + w_2y_2 + w_3y_3 + w_4y_4 = 0, \quad w_1z_1 + w_2z_2 + w_3z_3 + w_4z_4 = 0.$$

Multiplicieren wir je eine Gleichung der ersten Zeile mit w_i und die unter ihr stehende Gleichung mit v_k, so giebt ihre Differenz:

$$q_{1i}y_1 + q_{2i}y_2 + q_{3i}y_3 + q_{4i}y_4 = 0, \quad q_{1i}z_1 + q_{2i}z_2 + q_{3i}z_3 + q_{4i}z_4 = 0.$$

Multiplicieren wir die linke Gleichung mit z_k, die rechte mit y_k, so giebt ihre Differenz:

$$q_{1i}p_{1k} + q_{2i}p_{2k} + q_{3i}p_{3k} + q_{4i}p_{4k} = 0.$$

Indem man die hierin für $i, k = 1, 2, 3, 4$ enthaltenen Relationen einzeln ansetzt, findet man, dass

$$\frac{q_{12}}{p_{34}} = \frac{q_{13}}{p_{42}} = \frac{q_{14}}{p_{23}} = \frac{q_{23}}{p_{14}} = \frac{q_{42}}{p_{13}} = \frac{q_{34}}{p_{12}} \tag{36}$$

ist.

Kehren wir von den homogenen Punktcoordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 des Raumes zu nicht homogenen Punktcoordinaten x, y, z zurück, so ergeben sich die sechs homogenen Liniencoordinaten in der Form, wie sie Plücker zuerst aufgestellt hat. Um diesen Übergang zu bewerkstelligen, können wir einfach y_1, y_2, y_3 durch x', y', z' und y_4 durch 1, analog z_1, z_2, z_3 durch x'', y'', z'' und z_4 durch 1 ersetzen. Die homogenen Liniencoordinaten $p_{ik} \equiv y_i z_k - y_k z_i$ der Geraden, welche die Punkte (x', y', z') und (x'', y'', z'') verbindet, sind alsdann diese: **Ableitg. aus nicht homog. Punktcoord.**

$$\begin{cases} p_{12} = x'y'' - y'x'', & p_{23} = y'z'' - z'y'', & p_{31} = z'x'' - x'z'', \\ p_{41} = x'' - x', & p_{42} = y'' - y', & p_{43} = z'' - z'. \end{cases} \tag{37}$$

Augenscheinlich müssen sich die vier nicht homogenen Liniencoordinaten r, s, ϱ, σ durch diese sechs Grössen ausdrücken lassen. In der That, die Gerade:

$$x = rz + \varrho, \quad y = sz + \sigma$$

geht durch die beiden Punkte (x', y', z') und (x'', y'', z''), sobald

$$x' = rz' + \varrho, \quad y' = sz' + \sigma,$$
$$x'' = rz'' + \varrho, \quad y'' = sz'' + \sigma$$

ist. Hieraus aber folgt:

$$\begin{cases} r = \dfrac{x' - x''}{z' - z''} = \dfrac{p_{14}}{p_{34}}, & s = \dfrac{y' - y''}{z' - z''} = \dfrac{p_{24}}{p_{34}}, \\ \varrho = \dfrac{z'x'' - x'z''}{z' - z''} = \dfrac{p_{31}}{p_{34}}, & \sigma = -\dfrac{y'z'' - z'y''}{z' - z''} = -\dfrac{p_{23}}{p_{34}} = \dfrac{p_{32}}{p_{34}}. \end{cases} \tag{38}$$

Hierzu tritt noch infolge von (30′) hinzu

$$\eta = s\varrho - r\sigma = \frac{p_{24}p_{31} - p_{14}p_{32}}{p_{34}^2} = \frac{p_{21}}{p_{34}}. \tag{38'}$$

Die Relation $P \equiv 0$, die zwischen den sechs homogenen Liniencoordinaten p_{ik} besteht, stellt sich nach (37) so dar:

$$(39)\quad (x'-x'')(y'z''-z'y'')+(y'-y'')(z'x''-x'z'')+\\ +(z'-z'')(x'y''-y'x'')\equiv 0.$$

Insbesondere können wir die Liniencoordinaten p_{ik} einer Geraden aus den *Coordinaten zweier unendlich benachbarter Punkte der Geraden* ableiten*). Ist — in nicht homogenen Punktcoordinaten — (x, y, z) ein Punkt und $(x+dx,\ y+dy,\ z+dz)$ ein benachbarter Punkt, so sind die homogenen Liniencoordinaten p_{ik} ihrer Verbindenden nach (37) gleich den folgenden infinitesimalen Grössen:

$$\begin{matrix} x\,dy - y\,dx, & y\,dz - z\,dy, & z\,dx - x\,dz, \\ dx, & dy, & dz. \end{matrix}$$

Statt die p_{ik} diesen Grössen gleich zu setzen, können wir sie ihnen proportional setzen, da die p_{ik} *homogene* Liniencoordinaten sind. Wir setzen also:

$$(40)\quad \frac{p_{12}}{x\,dy-y\,dx}=\frac{p_{23}}{y\,dz-z\,dy}=\frac{p_{31}}{z\,dx-x\,dz}=\frac{p_{41}}{dx}=\frac{p_{42}}{dy}=\frac{p_{43}}{dz}.$$

Coord. d. Geraden eines Linien-elementes

Ein *Linienelement im Raume* besitzt einen Punkt und eine hindurchgehende Gerade. Sind x, y, z die Coordinaten des Punktes und x', y', z' proportional den Richtungscosinus der Geraden des Elementes, so sind daher

$$(41)\quad \begin{cases} p_{12}=xy'-yx', & p_{23}=yz'-zy', & p_{31}=zx'-xz', \\ p_{41}=x', & p_{42}=y', & p_{43}=z' \end{cases}$$

die sechs homogenen Liniencoordinaten der Geraden des Linienelementes $(x, y, z, x':y':z')$.

Aus den Formeln (38) und (38') lässt sich unmittelbar entnehmen, wie sich $r, s, \varrho, \sigma, \eta$ bei projectiver Transformation des Raumes ändern. Bei der projectiven Transformation

$$(28)\quad x_i' = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4}x_4 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

werden, wie wir oben (S. 279) sahen, die p_{ik} wie folgt transformiert:

$$(29)\quad p'_{ik} = \sum_{\mu\nu}^{1..4} a_{i\mu}\, a_{k\nu}\, p_{\mu\nu} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

---

*) Die explicite Benutzung der *Differentialausdrücke*

$$x\,dy - y\,dx,\quad y\,dz - z\,dy,\quad z\,dx - x\,dz,\quad dx,\quad dy,\quad dz$$

als Liniencoordinaten dürfte von Lie herrühren. (Ges. d. Wiss. zu Christiania 1870.)

Sind nun $r', s', \varrho', \sigma', \eta'$ die transformierten Liniencoordinaten $r, s, \varrho, \sigma, \eta$, so ist analog (38) und (38′) zu setzen:

$$r' = \frac{p'_{14}}{p'_{34}}, \quad s' = \frac{p'_{24}}{p'_{34}}, \quad \varrho' = \frac{p'_{31}}{p'_{34}}, \quad \sigma' = \frac{p'_{32}}{p'_{34}}, \quad \eta' = \frac{p'_{21}}{p'_{34}}.$$

Setzen wir hierin die Werte (29) ein und alsdann die Werte $r, s, \varrho, \sigma, \eta$ nach (38) und (38′), so erkennen wir, dass sich $r', s', \varrho', \sigma', \eta'$ linear durch $r, s, \varrho, \sigma, \eta$ ausdrücken. Also folgt:

Satz 5: *Bei einer projectiven Transformation des Raumes werden die nicht-homogenen fünf Liniencoordinaten $r, s, \varrho, \sigma, \eta$ projectiv transformiert.* Trf. von $r, s, \varrho, \sigma, \eta$ bei proj. Trf.

Hiermit ist die auf S. 277 aufgestellte Behauptung bewiesen.

Wir wollen nun mit Plücker eine Gleichung zwischen den Liniencoordinaten p_{ik} betrachten. Soll sie einen begrifflichen Sinn haben, so muss sie homogen in den p_{ik} sein, da die p_{ik} homogene Coordinaten sind. Jede in den p_{ik} homogene Gleichung

$$\Phi(p_{ik}) = 0 \tag{42}$$

bestimmt ∞^3 unter den ∞^4 Geraden des Raumes, also einen *Liniencomplex.* (Vgl. S. 253.) Eine Ausnahme macht die Gleichung $P = 0$, die ja identisch besteht für jede Gerade des Raumes. Nehmen wir an, die Gleichung $\Phi = 0$ sei algebraisch und zwar vom n^{ten} Grade in den p_{ik}. Wie wir wissen, geht sie bei projectiver Transformation des Raumes wieder in eine algebraische Gleichung n^{ten} Grades über. Es rechtfertigt sich daher, den Grad n dem Complex selbst beizulegen, also den Complex einen *Liniencomplex n^{ten} Grades* zu nennen. Liniencomplex.

Durch einen bestimmten Punkt des Raumes, der die homogenen Coordinaten y_1, y_2, y_3, y_4 habe, gehen ∞^1 Geraden des Complexes. Sie bilden einen Kegel, dessen Spitze der Punkt (y) ist. Um die Gleichung dieses Kegels in homogenen Punktcoordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 zu erhalten, setzen wir jedes

$$p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$$

und erhalten:

$$\Phi(x_i y_k - x_k y_i) = 0.$$

Diese Gleichung ist nach den gemachten Voraussetzungen algebraisch, homogen und vom n^{ten} Grade in x_1, x_2, x_3, x_4. Sie stellt daher einen Kegel n^{ter} Ordnung dar. Wir nennen den Kegel, der von allen durch einen festen Punkt des Raumes gehenden Geraden des Complexes gebildet wird, einen *Complexkegel*, und finden also, *dass der allgemeine Complexkegel eines Complexes n^{ten} Grades ein Kegel n^{ter} Ordnung ist.* Complexkegel n^{ter} Ordn.

Oben haben wir gesehen, dass die Liniencoordinaten q_{ik} den Liniencoordinaten p_{ik} proportional sind, nach den Formeln (36). Mithin wird der vorliegende Complex in den Liniencoordinaten q_{ik} ebenfalls durch eine algebraische Gleichung n^{ten} Grades dargestellt:

$$\Psi(q_{ik}) = 0.$$

Betrachten wir eine bestimmte Ebene (v) des Raumes. In ihr sind ∞^1 Geraden des Liniencomplexes enthalten. Sie werden in der Ebene eine Curve umhüllen. Den analytischen Ausdruck dieser Curve erhalten wir, wenn wir jedes

$$q_{ik} = u_i v_k - u_k v_i$$

setzen, in der Form:

$$\Psi(u_i v_k - u_k v_i) = 0.$$

Hierin sind u_1, u_2, u_3, u_4 homogene Coordinaten der Ebenen, welche die Ebene (v) in den Geraden schneiden, die dem Liniencomplex angehören. Da die hervorgehende Gleichung algebraisch vom n^{ten} Grade in u_1, u_2, u_3, u_4 ist, so folgt, dass die ebene Curve, die von den in der Ebene (v) enthaltenen Complexgeraden umhüllt wird, in Ebenencoordinaten eine algebraische Gleichung n^{ter} Ordnung hat. Sie ist also eine *Curve n^{ter} Classe.*

Curve n^{ter} Classe in geg. Ebene.

Es ist auch geometrisch einzusehen, dass die Classe dieser Curve mit der Ordnung des Complexkegels übereinstimmt. Es möge nämlich n die Zahl der Complexgeraden sein, die durch einen gegebenen Punkt p gehen und in einer gegebenen Ebene e liegen. Lässt man nun die Ebene e um eine Gerade durch p drehen, so erhält man nach und nach alle Geraden des Complexes, die durch p gehen. Der von ihnen gebildete Kegel ist von n^{ter} Ordnung, weil er jede Ebene durch seine Spitze in n Geraden trifft. Andererseits, lässt man den Punkt p eine Gerade der Ebene e durchlaufen, so erhält man nach und nach alle Complexgeraden, die in der Ebene e enthalten sind. Durch jeden Punkt p der Ebene e gehen gerade n dieser Geraden, d. h. diese Geraden umhüllen eine Curve n^{ter} Classe.

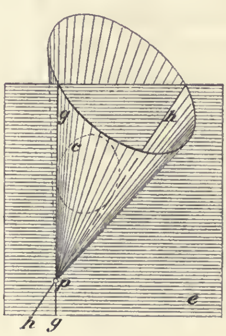

Fig. 60.

In Fig. 60, die sich auf den Fall $n = 2$ bezieht, ist der Complexkegel eines Punktes p angegeben sowie der Kegelschnitt c, der von den Complexgeraden in einer durch p gehenden Ebene e umhüllt wird. Beiden sind zwei Complexgeraden g, h gemein.

Wir haben gefunden:

Satz 6: *Der Grad eines Liniencomplexes ist gleich der Ordnung des allgemeinen Complexkegels und gleich der Classe der Curve, die von den in einer beliebigen Ebene liegenden Complexgeraden umhüllt wird. Er ist somit auch gleich der Anzahl der Complexgeraden, die durch einen gegebenen Punkt gehen und zugleich in einer gegebenen Ebene durch den Punkt liegen. Bei projectiver Transformation des Raumes bleibt der Grad des Complexes ungeändert.*

Im ersten Paragraphen haben wir erkannt, dass gewisse *Monge'sche Gleichungen* ∞^3 geradlinige Integralcurven besitzen, die also einen Liniencomplex bilden. (Vgl. Satz 1, S. 254.) Liegt umgekehrt der Complex (42) vor, so ist es nicht schwer, die zugehörige Monge'sche Gleichung aufzustellen. Denn in den nicht-homogenen Punktcoordinaten x, y, z werden die Linienelemente $(x, y, z, \ x' : y' : z')$, die durch den Punkt (x, y, z) gehen und deren Geraden Complexgeraden (p_{ik}) sind, durch die obigen Formeln (41) bestimmt. Daher werden die Linienelemente der zugehörigen Monge'schen Gleichung gegeben durch die Gleichung, die aus (42) hervorgeht, wenn darin die Substitutionen (41) gemacht werden. Die Monge'sche Gleichung in x, y, z, dx, dy, dz selbst ergiebt sich, wenn man in (42) für die Coordinaten p_{ik} die ihnen nach den Formeln (40) proportionalen Grössen einsetzt. Monge'sche Gl. d. Complexes.

Wenden wir uns jetzt zu den *linearen Liniencomplexen*, d. h. zu den Scharen von ∞^3 Curven, denen nach Satz 5 die Eigenschaft zukommt, dass durch jeden Punkt ∞^1 der Geraden gehen, die einen Kegel erster Ordnung, d. h. ein *ebenes Büschel* bilden. In § 3 des vorigen Kapitels haben wir die ∞^3 Nullgeraden eines Nullsystems gerade auch durch diese Eigenschaft definiert (vgl. S. 212). *Also sind die linearen Liniencomplexe identisch mit den Scharen der Nullgeraden von Nullsystemen.* Die Nullgeraden sind die Complexgeraden. Wir haben mithin in § 3 des 6. Kapitels eine Reihe von Eigenschaften der linearen Complexe schon bewiesen. Linearer Complex. Nullsystem.

Nach dem Vorhergehenden wird ein allgemeiner linearer Complex analytisch dargestellt durch eine Gleichung von der Form:

$$\sum_{ik}^{1..4} a_{ik} p_{ik} = 0. \tag{43}$$

Da $p_{ik} + p_{ki} \equiv 0$ ist, so stellt diese Gleichung den allgemeinen linearen Complex auch dann dar, wenn wir den Coefficienten a_{ik} die Beschränkung auferlegen:

$$a_{ik} + a_{ki} = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

Bei den linearen Complexen spielt die Grösse:

(44) $$A \equiv \alpha_{12}\alpha_{34} + \alpha_{13}\alpha_{42} + \alpha_{14}\alpha_{23}$$

eine besondere Rolle. Zunächst wird man auf diese Grösse geführt, wenn man die Bedingung finden will, unter der alle Geraden des linearen Complexes Treffgeraden einer gewissen Geraden sind, d. h.

Specieller linearer Complex.

unter der der vorliegende Complex ein sogenannter *specieller linearer Complex* ist, dem ein *specielles Nullsystem* zugehört (vgl. § 3 des 6. Kap., S. 213). Dieser Specialfall tritt dann und nur dann ein, wenn es eine Gerade mit den Liniencoordinaten p'_{ik} giebt, sodass für jede Gerade (p_{ik}) des Complexes nach (34) die *lineare* Relation besteht:

$$p_{12}p'_{34} + p_{13}p'_{42} + p_{14}p'_{23} + p_{23}p'_{14} + p_{42}p'_{13} + p_{34}p'_{12} = 0,$$

d. h. also, da die p_{ik} ausser der Gleichung (43) nur die *quadratische* Relation (30) erfüllen, dann und nur dann, wenn die in (43) auftretenden Coefficienten α_{ik} Liniencoordinaten p'_{ik} einer Geraden sind. Dies sind sie aber, sobald sie die dafür charakteristische quadratische Relation erfüllen:

$$\alpha_{12}\alpha_{34} + \alpha_{13}\alpha_{42} + \alpha_{14}\alpha_{23} = 0,$$

d. h. die Relation $A = 0$, und ausserdem die Relationen $\alpha_{ik} + \alpha_{ki} = 0$, die wir, wie gesagt, voraussetzen dürfen. Also haben wir den

Satz 7: *Der lineare Liniencomplex*

$$\sum_{ik}^{1..4} \alpha_{ik}p_{ik} = 0 \quad (\alpha_{ik} + \alpha_{ki} = 0)$$

ist ein specieller dann und nur dann, wenn die Grösse

$$A \equiv \alpha_{12}\alpha_{34} + \alpha_{13}\alpha_{42} + \alpha_{14}\alpha_{23} = 0$$

ist.

Dies Ergebnis wurde, wie wir oben (S. 280) in anderer Verbindung angaben, zuerst von Cayley abgeleitet.

Die Grösse A.

Für einen nicht-speciellen linearen Complex ist also $A \neq 0$. Das Quadrat von A lässt sich, wie man durch Ausrechnung verificiert, in der Form einer schiefen Determinante schreiben:

(45) $$A^2 \equiv \Sigma \pm \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}\alpha_{44},$$

wegen der Relationen $\alpha_{ik} + \alpha_{ki} = 0$. Hieraus lässt sich nun leicht das Verhalten von A *bei Ausführung einer projectiven Transformation des Raumes* ableiten.

Wir wissen ja, dass ein linearer Complex bei einer projectiven Transformation des Raumes

(28) $$x'_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4}x_4 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

wieder in einen linearen Complex verwandelt wird. Angenommen, der obige lineare Complex (43) gehe in diesen über:

$$\sum_{i,k}^{1..4} \alpha'_{ik} p'_{ik} = 0, \tag{46}$$

so können wir die Beziehung zwischen den α_{ik} und α'_{ik} leicht aufstellen. Denn wir fanden schon früher (S. 279), dass bei der projectiven Transformation (28)

$$p'_{ik} = \sum_{\mu,\nu}^{1..4} a_{i\mu}\, a_{k\nu}\, p_{\mu\nu} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4) \tag{29}$$

ist. Substituieren wir diese Werte in (46), so kommt:

$$\sum_{i,k,\mu,\nu}^{1..4} a_{i\mu}\, a_{k\nu}\, \alpha'_{ik}\, p_{\mu\nu} = 0,$$

und dies muss wieder die Gleichung des ursprünglichen linearen Complexes (43) sein. Es ist also zu setzen:

$$\alpha_{\mu\nu} = \varrho \sum_{i,k}^{1..4} a_{i\mu}\, a_{k\nu}\, \alpha'_{ik} \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4). \tag{47}$$

Hierin bedeutet ϱ einen Proportionalitätsfactor, der ohne weiteres gleich Eins gesetzt werden kann, da die α'_{ik} und $\alpha_{\mu\nu}$ homogene Bestimmungsstücke des neuen bez. des ursprünglichen linearen Complexes sind.

Die Grösse A, gebildet für den neuen linearen Complex (46), möge mit A' bezeichnet werden. Nach (45) ist dann

$$A'^2 \equiv \Sigma \pm \alpha'_{11}\, \alpha'_{22}\, \alpha'_{33}\, \alpha'_{44}.$$

Aber aus dem Werte (45) von A^2 folgt durch Substitution der Werte (47) eine Determinante, die sich nach der Regel von der Multiplication der Determinanten auch so schreiben lässt:

$$A^2 = (\Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33} a_{44})^2\, \Sigma \pm \alpha'_{11}\, \alpha'_{22}\, \alpha'_{33}\, \alpha'_{44}.$$

Es ist daher:

$$A^2 = \Delta^2 A'^2, \tag{48}$$

wenn

$$\Delta \equiv \Sigma \pm a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{44}$$

die Determinante der Coefficienten der projectiven Transformation (28) bezeichnet.

Formel (48) lehrt, dass die Grösse A bei Ausführung einer projectiven Transformation des Raumes mit einem Factor reproduciert wird, der nur von den Coefficienten der Transformation abhängt.

Pfaff'sche Gl. d. lin. Compl.

Die *Pfaff'sche Gleichung*, die zu unserem linearen Complex gehört, ergiebt sich sofort, wenn man in die Gleichung (43) für die p_{ik} die ihnen proportionalen Grössen aus den Formeln (40) (S. 284) einsetzt. Diese Pfaff'sche Gleichung im Raume mit den nicht homogenen Punktcoordinaten x, y, z hat, wie es sein muss, die in Satz 12 des § 3, 6. Kap. (S. 218), angegebene allgemeine Form.

Erinnern wir uns ferner an die in den Formeln (27) (S. 278) angegebene ursprüngliche Bedeutung der Liniencoordinaten p_{ik}, so finden wir, dass zwei Punkte mit den homogenen Coordinaten $x_1:x_2:x_3:x_4$ und $y_1:y_2:y_3:y_4$ eine Gerade des linearen Complexes (43) dann und nur dann bestimmen, wenn

$$(49)\quad \begin{cases} \quad(\ \cdot\ - \alpha_{12}x_2 - \alpha_{13}x_3 - \alpha_{14}x_4)\,y_1 + \\ + (\alpha_{12}x_1 \quad \cdot \quad - \alpha_{23}x_3 - \alpha_{24}x_4)\,y_2 + \\ + (\alpha_{13}x_1 + \alpha_{23}x_2 \quad \cdot \quad - \alpha_{34}x_4)\,y_3 + \\ + (\alpha_{14}x_1 + \alpha_{24}x_2 + \alpha_{34}x_3 - \ \cdot\ )\,y_4 = 0 \end{cases}$$

ist*). Bei gegebenem Punkte (x) stellt diese Gleichung mithin in den laufenden Punktcoordinaten $y_1 : y_2 : y_3 : y_4$ die Ebene der Complexgeraden dar, die durch den Punkt (x) gehen, also, wie wir uns in § 3, 6. Kap., S. 212, 219, ausdrückten, die *Nullebene* des *Nullpunktes* (x). Nach den Auseinandersetzungen jenes Paragraphen wissen wir und könnten es auch leicht hier bestätigen, dass sich diese Ebene um eine Gerade dreht, wenn der Punkt (x) eine Gerade durchläuft. Diese beiden Geraden haben wir früher (S. 214) als *reciproke Polaren* bezeichnet.

Reciproke Polaren.

Reduction auf Normalformen.

Wählen wir nun das Tetraeder, das den homogenen Punktcoordinaten zugrunde liegt, so, dass zwei einander gegenüberliegende Kanten des Tetraeders, etwa $x_1 = x_2 = 0$ und $x_3 = x_4 = 0$, reciproke Polaren sind, so muss die Ebene (49) für $x_1 = x_2 = 0$ die Gerade $y_3 = y_4 = 0$ enthalten, d. h. dann ist $\alpha_{13} = \alpha_{14} = \alpha_{23} = \alpha_{24} = 0$, sodass die Gleichung des linearen Complexes lautet:

$$\alpha_{12}p_{12} + \alpha_{34}p_{34} = 0$$

oder auch

$$(50)\qquad p_{12} - kp_{34} = 0.$$

Hier ist $\alpha_{12} = 1$, $\alpha_{34} = -k$. Setzen wir diese Werte in die Grösse A, Formel (44), ein, so kommt

$$A = -k.$$

Durch passende Wahl des Coordinatensystems erreichen wir nun leicht, dass k insbesondere, sobald $k \neq 0$ ist, also der Complex nicht speciell

*) Vgl. hierzu die von Möbius herrührenden Ausführungen in § 3 des 6. Kap., S. 229.

ist, den Wert 1 annimmt. Demnach lässt sich durch passende Wahl des Coordinatentetraeders erreichen, dass der lineare Complex eine der beiden Formen annimmt:

$$(51) \qquad p_{12} - p_{34} = 0, \quad p_{12} = 0.$$

In nicht homogenen Coordinaten giebt dies nach der Formel (38′) (S. 283):

$$(52) \qquad s\varrho - r\sigma + 1 = 0, \quad s\varrho - r\sigma = 0.$$

Diese Reduction aber haben wir schon in § 3 des 6. Kap., S. 222, 223, geleistet.

§ 4. Büschel und Bündel von linearen Complexen.

Angenommen, es liegen *zwei lineare Complexe* vor*): Gemeins. Geraden zweier lin. Complexe.

$$(53) \qquad \sum_{i,k}^{1..4} \alpha_{ik}\, p_{ik} = 0, \quad \sum_{i,k}^{1..4} \beta_{ik}\, p_{ik} = 0.$$

Jedem Punkt (x) des Raumes wird durch den einen Complex ebenso wie durch den anderen eine Ebene durch den Punkt zugeordnet. Beide Ebenen fallen für einen allgemein gewählten Punkt nicht zusammen, da sonst die beiden Complexe dieselben wären. Sie schneiden sich vielmehr in einer durch den Punkt (x) gehenden Geraden, und diese Gerade ist eine Gerade des einen und des anderen Complexes.

Durch jeden Punkt geht also eine beiden Complexen gemeinsame Gerade, und *hiermit ist jedem Punkt eine Gerade zugeordnet.* Wählen wir irgend einen anderen Punkt auf dieser Geraden, so gehen die Ebenen, welche die Complexe dem neuen Punkte zuordnen, durch die Gerade; also ist jedem Punkte dieser gemeinsamen Complexgeraden ebendieselbe Gerade zugeordnet. Im ganzen Raume giebt es ∞^3 Punkte. Da auf den Geraden, die diesen Punkten zugeordnet sind, je ∞^1 Punkte liegen, so giebt es ingesamt ∞^2 *Geraden, die beiden Complexen angehören.* Eine Schar von ∞^2 Geraden des Raumes heisst aber ein *Strahlensystem.* Das vorliegende Strahlensystem hat noch die besondere Eigenschaft, dass durch jeden Punkt des Raumes eine und nur eine Gerade des Systems geht. Daher ist es als ein *Strahlensystem erster Ordnung* zu bezeichnen. Strahlensystem. Strahlensyst. 1. O.

Fassen wir ferner eine beliebige Ebene allgemeiner Lage ins Auge. Die in ihr gelegenen Geraden, die dem ersten Complex angehören,

*) Die Entwickelungen dieses Paragraphen, bei denen nicht ausdrücklich Anderes angemerkt wird, rühren ebenfalls von Plücker her. Vgl. sein Werk: *Neue Geometrie des Raumes u. s. w.*, herausgeg. v. Klein, Leipzig 1868, S. 62 u. f.

bilden ein Strahlenbüschel, ebenso die, welche dem zweiten angehören; und zwar haben die Büschel im allgemeinen verschiedene Scheitel. Sie besitzen daher einen und nur einen gemeinsamen Strahl. Daraus folgt, dass das erhaltene Strahlenbüschel auch die Eigenschaft hat, dass in jeder allgemein gewählten Ebene eine und nur eine Gerade des Büschels

Strahlen-syst. 1. Cl. liegt. Deshalb bezeichnet man es als ein *Strahlensystem erster Classe.*

Satz 8: *Die Geraden, die zwei gegebenen linearen Complexen gemeinsam sind, bilden ein Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe.*

Analytisch wird dies Strahlensystem durch die beiden in den p_{ik} linearen Gleichungen (53) dargestellt.

Bedeuten λ, μ zwei beliebige Constanten, so ist die Gleichung

$$\lambda \sum_{i,k}^{1..4} \alpha_{ik} p_{ik} + \mu \sum_{i,k}^{1..4} \beta_{ik} p_{ik} = 0 \tag{54}$$

eine Folge der Gleichungen (53) und wird daher auch von den Geraden des Strahlensystems erfüllt. Andererseits ist diese Gleichung wieder die eines linearen Complexes

$$\sum_{i,k}^{1..4} (\lambda \alpha_{ik} + \mu \beta_{ik}) p_{ik} = 0. \tag{54'}$$

Die Geraden des Strahlensystems gehören daher auch diesem linearen Complex an. Die Gleichung (54′) stellt insgesamt ∞^1 lineare Complexe

Büschel v. lin. Complexen. dar. Ihr Inbegriff heisst ein *Büschel von linearen Complexen.*

Bilden wir die Grösse A des vorigen Paragraphen (vgl. Formel (44), S. 288) für einen beliebigen Complex (54′) des Büschels, so erhalten wir:

$$A = (\lambda \alpha_{12} + \mu \beta_{12})(\lambda \alpha_{34} + \mu \beta_{34}) + (\lambda \alpha_{13} + \mu \beta_{13})(\lambda \alpha_{42} + \mu \beta_{42}) + \\ + (\lambda \alpha_{14} + \mu \beta_{14})(\lambda \alpha_{23} + \mu \beta_{23}).$$

Diese quadratische Function von λ, μ ist gleich Null für zwei Werte

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1}, \quad \frac{\lambda_2}{\mu_2}$$

des Verhältnisses $\lambda : \mu$. Nach Satz 7 des vorigen Paragraphen (S. 288) folgt also:

Satz 9: *Jedes Büschel von linearen Complexen enthält zwei specielle lineare Complexe.*

Gemeinsame Geraden des Büschels. Da jeder specielle lineare Complex aus allen Geraden besteht, die eine bestimmte Gerade schneiden, so sind die Geraden, die diesen beiden Complexen gemein sind, d. h. die Geraden, die *allen* Complexen des Büschels gemein sind, jene ∞^2 Geraden, die zwei ganz bestimmte

Geraden g und h schneiden. Diese beiden Geraden sind im Allgemeinen zu einander windschief. Lägen sie nämlich in einer Ebene e, so würden alle Geraden in dieser Ebene jedem Complexe des Büschels angehören. Dann aber wären alle Complexe des Büschels speciell (vgl. § 3 des 6. Kap., S. 219), d. h. die Grösse A müsste für jedes Wertepaar λ, μ Null sein. Dies tritt dann und nur dann ein, wenn die Coefficienten von λ^2, $\lambda\mu$ und μ^2 in dem obigen Wert von A verschwinden. Das Verschwinden der Coefficienten von λ^2 und μ^2 sagt aus, dass die beiden ursprünglich gegebenen Complexe (53) speciell sind, also aus allen Geraden bestehen, die die Geraden mit den Liniencoordinaten α_{ik} bez. β_{ik} treffen. Das Verschwinden des Coefficienten von $\lambda\mu$ sagt dann nach Formel (34), S. 281, aus, dass die beiden Geraden (α_{ik}) und (β_{ik}) einander schneiden.

Wir können also sagen:

Satz 10: *Die ∞^2 Geraden, die allen Complexen eines Büschels von linearen Complexen gemein sind, schneiden zwei Geraden. Diese beiden Geraden schneiden einander nur dann, wenn alle Complexe des Büschels speciell sind.*

Es kann im allgemeinen Falle, dass $A \not\equiv 0$ ist, vorkommen, dass die Gleichung $A = 0$ eine Doppelwurzel $\lambda : \mu$ hat. Alsdann liegen die beiden Geraden g und h einander unendlich nah, sind aber nach dem Vorhergehenden zu einander windschief.

In jedem Falle also besteht das Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe, das allen Complexen des Büschels gemein ist, aus allen Geraden, die zwei Geraden g und h schneiden. Wenn g und h einander treffen, so liegt der triviale Fall vor, dass alle gemeinsamen Geraden die Geraden einer Ebene sind, zusammen mit den Geraden durch einen festen Punkt. In diesem Falle zerfällt infolgedessen das betrachtete Strahlensystem.

Wir wollen hier den früher (§ 1 des 6. Kap., S. 187) versprochenen Nachweis einschalten, *dass jedes Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe aus allen Geraden besteht, die zwei zu einander windschiefe Geraden g und h treffen.* Bestimmg. aller Strahlensyst. 1. O. u. 1. Cl.

Zu diesem Zweck betrachten wir zunächst ein allgemeines Strahlensystem, d. h. eine Schar von ∞^2 Geraden. Wir können sie, wenn x, y, z gewöhnliche Punktcoordinaten sind, z. B. definieren durch zwei Gleichungen:

$$x = rz + \varrho, \quad y = sz + \sigma, \tag{55}$$

in denen r, s, ϱ, σ Functionen zweier Parameter u, v sind, sodass jedem Wertepaar u, v der Parameter eine Gerade entspricht. Die Geraden (u, v) und $(u + du, v + dv)$ schneiden einander dann und nur dann, wenn es ein Wertsystem x, y, z giebt, das die Gleichungen (55) sowie die Gleichungen

$$0 = dr \cdot z + d\varrho, \quad 0 = ds \cdot z + d\sigma$$

erfüllt, also dann und nur dann, wenn du, dv die in du, dv homogene quadratische Gleichung

$$dr\, d\sigma - ds\, d\varrho = 0$$

erfüllen. Diese in $du : dv$ quadratische Gleichung hat mindestens eine Wurzel. Also folgt:

Satz 11: *Auf jedem Strahl eines Strahlensystems giebt es mindestens einen Punkt, durch den ein unendlich benachbarter Strahl des Systems geht*).*

Fassen wir nun ein Strahlensystem *erster* Ordnung und *erster* Classe ins Auge. Es wird durch zwei algebraische Gleichungen in den Liniencoordinaten p_{ik} definiert. Nach Definition soll ferner durch jeden Punkt allgemeiner Lage $(x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$ des Raumes mit den homogenen Punktcoordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 nur *ein* Strahl des Systems gehen, der z. B. die Ebene $y_4 = 0$ in einem bestimmten Punkt $(y_1 : y_2 : y_3)$ treffen wird, sodass also die beiden Gleichungen des Strahlensystems, sobald in ihnen allgemein

$$p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$$

und $y_4 = 0$ gesetzt wird, bei beliebig gegebenen x_1, x_2, x_3, x_4 die Verhältnisse $y_1 : y_2 : y_3$ eindeutig bestimmen müssen. Es wird daher eine Proportion bestehen von der Form:

$$y_1 : y_2 : y_3 = \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3,$$

in der $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ drei ganze rationale homogene Functionen von x_1, x_2, x_3, x_4 bedeuten, die keinen gemeinsamen Teiler haben. Nach Satz 11 giebt es nun aber auf jedem Strahl mindestens einen ausgezeichneten Punkt $(x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$, durch den zwei (unendlich benachbarte) Strahlen gehen. Unsere Proportion liefert jedoch bei gegebenem Wertsystem $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ stets *einen* bestimmten Punkt $(y_1 : y_2 : y_3)$, ausgenommen, wenn alle drei Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ gleichzeitig Null sind. Die ausgezeichneten Punkte werden daher durch die Gleichungen

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \varphi_3 = 0$$

gegeben. Da auf jedem der ∞^2 Strahlen einer liegt und offenbar nicht alle Strahlen durch einen gemeinsamen Punkt gehen, so giebt

*) Vgl. S. 269, 270 in dem geschichtlichen Überblick des § 2.

es mindestens ∞^1 ausgezeichnete Punkte. Sie erfüllen also eine Curve oder eine Fläche. Letzteres ist unmöglich, da die drei vorstehenden Gleichungen keine Fläche darstellen, weil φ_1, φ_2, φ_3 keinen gemeinsamen Teiler haben. Also liegen alle ausgezeichneten Punkte auf einer Curve c. Da auf jedem der ∞^2 Strahlen einer liegt, so gehen also durch jeden Punkt der Curve ∞^1 Strahlen. Jede Ebene, die c schneidet, etwa in p, soll nur *einen* Strahl enthalten. Also bilden die durch p gehenden Strahlen ein *ebenes Büschel*. Ist die Curve c nicht eine (und zwar eine einzige) Gerade, so wird eine Ebene allgemeiner Lage mit c mindestens zwei Punkte p_1, p_2 gemein haben. Da durch p_1 und p_2 Büschel von Strahlen des Systems gehen, so enthält also die Ebene einen von p_1 und einen von p_2 ausgehenden Strahl. Das Strahlensystem ist aber von erster Classe, also müssen diese beiden Strahlen in eine Gerade, in $p_1 p_2$, zusammenfallen. Alle ∞^2 Sehnen der Curve c sind also die Strahlen des Systems. Dabei müssen die von einem Punkte von c ausgehenden Sehnen ein Büschel bilden. Dies geht nur so an, dass die Curve c in zwei windschiefe Geraden zerfällt. Das Strahlensystem besteht mithin aus allen ∞^2 Treffgeraden zweier windschiefer Geraden. Im Falle nämlich, dass die Curve c eben ist, wäre das Strahlensystem von nullter Ordnung. Bilden andererseits die ausgezeichneten Punkte eine und nur eine Gerade g, so ist jedem Punkt der Geraden ein Büschel zugeordnet. Die Ebenen zweier solcher Büschel schneiden sich in einer Geraden, die augenscheinlich lauter ausgezeichnete Punkte enthält, also g selbst ist. Den Punkten von g sind also Büschel zugeordnet, deren Ebenen g enthalten. Da nun durch jeden Punkt des Raumes nur eine Gerade eines solchen Büschels geht, so sind die Ebenen der Büschel projectiv auf die Scheitel bezogen. Wir kommen also hiermit zu den Strahlensystemen, die aus allen Treffgeraden zweier unendlich benachbarter windschiefer Geraden bestehen. (Vgl. S. 187.) Also hat sich ergeben:

Satz 12: *Jedes Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe besteht aus allen Geraden, die zwei zu einander windschiefe, eventuell unendlich benachbarte Geraden schneiden.*

Kehren wir wieder zu unserem Büschel von linearen Complexen zurück, so sehen wir, *dass die gemeinsamen Strahlen des Büschels das allgemeinste Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe liefern.*

Wir wollen nunmehr annehmen, dass in dem Büschel von linearen Complexen

$$\lambda \sum_{i,k}^{1..4} \alpha_{ik} p_{ik} + \mu \sum_{i,k}^{1..4} \beta_{ik} p_{ik} = 0 \tag{54}$$

nicht alle Complexe speciell seien, dass also die Grösse A (S. 292) nicht identisch verschwinde. In dem Büschel wird einem beliebig gewählten Punkt (x) durch jeden Complex eine Ebene durch den Punkt zugeordnet. Sind u_1, u_2, u_3, u_4 die homogenen Coordinaten der Ebene, die dem Punkte (x) durch den ersten gegebenen Complex (53) zugeordnet wird, sodass für jeden Punkt (y) der Ebene

Doppelverhältnisse i. Büschel v. lin. Compl.

$$u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 + u_4 y_4 = 0$$

ist, so sind die Ebenencoordinaten u_k nach Formel (49) des § 3 (S. 290) diese:

$$u_k = \alpha_{1k} x_1 + \alpha_{2k} x_2 + \alpha_{3k} x_3 + \alpha_{4k} x_4 \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Hierbei ist wie früher $\alpha_{ik} = -\alpha_{ki}$ und $\alpha_{kk} = 0$. Andererseits seien v_1, v_2, v_3, v_4 die homogenen Coordinaten der Ebene, die dem Punkt (x) durch den zweiten gegebenen Complex (53) zugeordnet ist. Dann ist:

$$v_k = \beta_{1k} x_1 + \beta_{2k} x_2 + \beta_{3k} x_3 + \beta_{4k} x_4 \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Endlich sind die Coordinaten w_1, w_2, w_3, w_4 der Ebene, die dem Punkte (x) durch einen allgemeinen Complex des Büschels (54) zugeordnet werden, gegeben durch:

$$w_k = (\lambda\alpha_{1k} + \mu\beta_{1k})\,x_1 + (\lambda\alpha_{2k} + \mu\beta_{2k})\,x_2 + (\lambda\alpha_{3k} + \mu\beta_{3k})\,x_3 + \\ + (\lambda\alpha_{4k} + \mu\beta_{4k})\,x_4 \quad (k = 1, 2, 3, 4),$$

sodass also:

$$w_k = \lambda u_k + \mu v_k \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

wird. Zunächst ersieht man hieraus, dass alle dem Punkte (x) durch die Complexe zugeordneten Ebenen ein *Ebenenbüschel* bilden. Dies hätte man voraussehen können, da die durch den Punkt (x) gehende Gerade des Strahlensystems in jeder dieser Ebenen enthalten ist. Aber ausserdem sieht man, dass λ, μ *linear* in den w_k auftreten. Vier Ebenen des besprochenen Ebenenbüschels bilden also dasselbe Doppelverhältnis mit einander wie die vier zugehörigen Quotienten $\frac{\lambda}{\mu}$. Das letztere Doppelverhältnis ist von der Lage des Punktes (x) unabhängig und ist bekannt, sobald man vier bestimmte Complexe aus dem Complexbüschel ausgewählt hat. Daher sagen wir:

Satz 13: *Sind*

$$\mathfrak{A} = 0, \quad \mathfrak{B} = 0$$

die Gleichungen zweier linearer Complexe, so ordnen die vier Complexe

$$\mathfrak{A} + \varkappa_i \mathfrak{B} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

des von ihnen bestimmten Büschels von Complexen jedem Punkte des Raumes vier solche Ebenen eines Ebenenbüschels zu, deren Doppelverhältnis gleich $(\varkappa_1 \varkappa_2 \varkappa_3 \varkappa_4)$ *ist.*

Der hierzu dualistische Satz braucht nicht erst bewiesen zu werden:

Satz 14: *Sind*

$$\mathfrak{A} = 0, \quad \mathfrak{B} = 0$$

die Gleichungen zweier linearer Complexe, so ordnen die vier Complexe

$$\mathfrak{A} + \varkappa_i \mathfrak{B} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

des von ihnen bestimmten Büschels von Complexen jeder Ebene des Raumes vier solche Punkte einer Punktreihe zu, deren Doppelverhältnis gleich $(\varkappa_1 \varkappa_2 \varkappa_3 \varkappa_4)$ *ist.*

Wir können nunmehr die Redeweise einführen, *dass die vier Complexe* Doppelverh. v. vier lin. Complexen.

$$\mathfrak{A} + \varkappa_i \mathfrak{B} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

das Doppelverhältnis $(\varkappa_1 \varkappa_2 \varkappa_3 \varkappa_4)$ *bilden.* Infolge der beiden letzten Sätze tritt dies Doppelverhältnis sofort geometrisch zu tage.

Im Folgenden sei vorausgesetzt, dass die beiden im Büschel enthaltenen speciellen Complexe *nicht* zusammenfallen. Alsdann können wir insbesondere als zwei der vier soeben betrachteten Complexe diese beiden speciellen Complexe wählen. Wir wollen dann zwei Complexe des Büschels so bestimmen, dass sie mit diesem Paar das *harmonische* Doppelverhältnis bilden. Dies geht auf unendlich viele Weisen. Wählen wir nämlich den einen Complex des zweiten Paares beliebig, so können wir immer einen zweiten Complex — und zwar in nur einer Weise — so hinzubestimmen, dass dies Paar mit dem Paar der speciellen Complexe das harmonische Doppelverhältnis bildet. Wir sagen dann, *dass die beiden nicht speciellen Complexe mit einander in Involution liegen.* Involution linearer Complexe.

Es ist dies eine Übertragung des Involutionsbegriffes von der Punktreihe auf das Büschel von Complexen. Anstelle des Punktes ist als Element der Complex getreten. Den Nullpunkten der Involution in der Punktreihe entsprechen hier die beiden speciellen Complexe.

Die Definition der Involution zweier Complexe lässt sich noch anders formulieren. Man erkennt nämlich, dass die beiden ursprünglich gegebenen linearen Complexe (53) in dem von ihnen bestimmten Büschel von Complexen keinerlei ausgezeichnete Rolle spielen, dass man vielmehr zu demselben Büschel und mithin auch zu denselben beiden speciellen Complexen des Büschels geführt wird, wenn man von irgend zweien Complexen des Büschels ausgeht. Wir können daher zwei vorgelegte Complexe des Büschels immer als die beiden ursprünglichen Complexe (53) auffassen, sodass für den einen die Zahl $\varkappa = 0$, für den andern $\varkappa = \infty$ wird. Die Werte $\varkappa$, die zu den beiden speciellen Complexen gehören, ergeben sich aus der Bedingung $A = 0$ (S. 292), d. h. aus der quadratischen Gleichung:

$$(56)\quad (\alpha_{12} + \varkappa\beta_{12})(\alpha_{34} + \varkappa\beta_{34}) + (\alpha_{13} + \varkappa\beta_{13})(\alpha_{42} + \varkappa\beta_{42}) + \\ + (\alpha_{14} + \varkappa\beta_{14})(\alpha_{23} + \varkappa\beta_{23}) = 0$$

oder:

$$(56')\qquad \mathsf{A} + \varkappa(\alpha\beta) + \varkappa^2\mathsf{B} = 0,$$

wenn nämlich

$$(57)\quad \begin{cases} \mathsf{A} \equiv \alpha_{12}\alpha_{34} + \alpha_{13}\alpha_{42} + \alpha_{14}\alpha_{23}, \\ \mathsf{B} \equiv \beta_{12}\beta_{34} + \beta_{13}\beta_{42} + \beta_{14}\beta_{23} \\ \text{sowie} \\ (\alpha\beta) \equiv \alpha_{12}\beta_{34} + \beta_{12}\alpha_{34} + \alpha_{13}\beta_{42} + \beta_{13}\alpha_{42} + \alpha_{14}\beta_{23} + \beta_{14}\alpha_{23} \end{cases}$$

gesetzt wird. Sind $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ die Wurzeln der quadratischen Gleichung (56′), so liegen also die beiden Complexe (53) in Involution, sobald

$$(0, \varkappa_1, \infty, \varkappa_2) = -1,$$

also

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 = 0$$

ist. Nach (56′) und (57) ist aber

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 = -\frac{(\alpha\beta)}{\mathsf{B}}.$$

Demnach ist

$$(\alpha\beta) = 0$$

die Bedingung der Involution.

Satz 15: *Zwei lineare Complexe*

$$\sum_{i,k}^{1..4} \alpha_{ik}\, p_{ik} = 0, \quad \sum_{i,k}^{1..4} \beta_{ik}\, p_{ik} = 0$$

liegen dann und nur dann in Involution, wenn der Ausdruck

$$(\alpha\beta) \equiv \alpha_{12}\beta_{34} + \beta_{12}\alpha_{34} + \alpha_{13}\beta_{42} + \beta_{13}\alpha_{42} + \alpha_{14}\beta_{23} + \beta_{14}\alpha_{23}$$

*gleich Null ist**).

Sind die beiden in Involution liegenden Complexe nicht specielle Complexe, so enthält das von ihnen definierte Büschel zwei getrennte specielle Complexe. Denn im vorliegenden Falle besteht die oben (S. 292) aufgestellte Grösse A aus einem mit λ^2 und einem mit μ^2 behafteten Gliede, und die Coefficienten dieser Glieder sind von Null verschieden, sodass A für zwei verschiedene Werte von $\lambda : \mu$ verschwindet.

---

*) Der Begriff: Involution zweier linearer Complexe wurde von Klein eingeführt. Vgl. seine Abhandlung: *Zur Theorie der Liniencomplexe des ersten und zweiten Grades*, Göttinger Nachrichten 1869, S. 258, sowie ausführlicher in den Math. Annalen 2. Bd. (1870), S. 198.

Nach Satz 13 und 14 können wir nunmehr also den Satz aufstellen:

Satz 16: *Zwei nicht-specielle lineare Complexe liegen dann und nur dann in Involution, wenn es zwei zu einander windschiefe Geraden g und h derart giebt, dass einerseits die einem beliebigen Punkte p durch die beiden Complexe zugeordneten Ebenen e_1 und e_2 harmonisch getrennt*

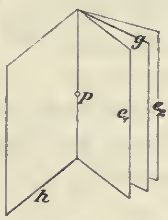

Fig. 61.

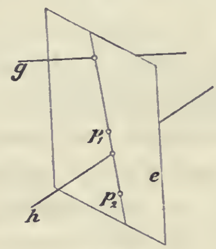

Fig. 62.

werden von den Ebenen durch p und g sowie durch p und h und andererseits auch die einer beliebigen Ebene e durch die beiden Complexe zugeordneten Punkte p_1 und p_2 harmonisch getrennt werden durch die Schnittpunkte von e mit g und h.

Zur Erläuterung dienen die Figuren 61 und 62.

Wir haben oben die Involutionsbeziehung zunächst nur für nicht-specielle lineare Complexe aufgestellt. In allen anderen Fällen können wir den Satz 15 als Definition der Involution benutzen. Dann sehen wir: **Invol. specieller lin. Complexe.**

Ein linearer Complex

$$\sum_{i,k}^{1..4} \alpha_{ik}\, p_{ik} = 0$$

liegt mit sich selbst in Involution, wenn

$$\alpha_{12}\alpha_{34} + \alpha_{13}\alpha_{42} + \alpha_{14}\alpha_{23} = 0$$

ist, d. h. wenn er nach Satz 7 des § 3 (S. 288) speciell ist. Also:

Satz 17: *Jeder specielle lineare Complex liegt mit sich selbst in Involution.*

Wenn ferner ein allgemeiner linearer Complex:

$$(58) \qquad \sum_{i,k}^{1..4} \alpha_{ik}\, p_{ik} = 0$$

mit einem speciellen Complex, der aus allen Geraden durch eine Gerade g, seine *Axe*, besteht, in Involution liegt, und wenn die

Gerade g die Liniencoordinaten p'_{ik} hat, so hat der specielle Complex nach Formel (34') des § 3 (S. 282) die Gleichung:

$$\sum_{i,k}^{1..4} p'_{ik} \frac{\partial P}{\partial p_{ik}} = 0.$$

Die in Satz 15 ausgesprochene Bedingung der Involution sagt daher aus, dass die Gerade g dem linearen Complex (58) angehört.

Satz 18: *Ein allgemeiner und ein specieller linearer Complex liegen dann und nur dann in Involution, wenn die Axe des letzteren eine Gerade des ersteren Complexes ist.*

Es seien ferner zwei specielle lineare Complexe gegeben durch ihre Axen g und h. Es mögen dabei die p'_{ik} die Liniencoordinaten von g, die p''_{ik} die von h bedeuten. Alsdann werden die Complexe dargestellt durch die Gleichungen:

$$\sum_{i,k}^{1..4} p'_{ik} \frac{\partial P}{\partial p_{ik}} = 0, \quad \sum_{i,k}^{1..4} p''_{ik} \frac{\partial P}{\partial p_{ik}} = 0.$$

Die Involutionsbedingung liefert hier nach der citierten Formel sofort den

Satz 19: *Zwei specielle lineare Complexe liegen dann und nur dann in Involution, wenn ihre Axen einander schneiden.*

Da die Involutionsbeziehung zwischen zwei linearen Complexen bilinear in den Coefficienten der Gleichungen der Complexe ist, so folgt:

Satz 20: *Liegt ein linearer Complex in Involution mit zwei anderen linearen Complexen, so liegt er auch mit jedem solchen linearen Complex in Involution, der dem von den beiden letzteren bestimmten Büschel angehört.*

Bündel von lin. Complexen.

Nunmehr wollen wir annehmen, *dass drei lineare Complexe gegeben seien*, von denen der dritte *nicht* dem von den beiden ersten definierten Büschel angehöre:

$$(59) \qquad \sum_{i,k}^{1..4} \alpha_{ik} p_{ik} = 0, \quad \sum_{i,k}^{1..4} \beta_{ik} p_{ik} = 0, \quad \sum_{i,k}^{1..4} \gamma_{ik} p_{ik} = 0.$$

Bedeuten λ, μ, ν beliebige Constanten, so stellt auch die Gleichung:

$$(60) \qquad \lambda \sum \alpha_{ik} p_{ik} + \mu \sum \beta_{ik} p_{ik} + \nu \sum \gamma_{ik} p_{ik} = 0$$

einen linearen Complex dar. Der Inbegriff dieser ∞^2 linearen Complexe heisst ein *Bündel von linearen Complexen.* Dieses Bündel enthält ∞^1 *specielle Complexe*, denn der Complex (60) ist speciell, wenn die Grösse A für ihn gleich Null wird. Diese Grösse A aber ist eine ganze homogene Function zweiten Grades von λ, μ, ν. Ihr Nullsetzen liefert also ∞^1 Wertsysteme der Verhältnisse $\lambda : \mu : \nu$, und zu jedem dieser Systeme gehört ein specieller linearer Complex. Da jeder dieser speciellen Complexe aus allen Geraden besteht, die eine Gerade g treffen, so liegen hier ∞^1 Geraden g vor. Wir setzen hierbei voraus, dass nicht alle Complexe des Bündels speciell sind, d. h. dass die quadratische Gleichung in λ, μ, ν nicht identisch besteht.

Auf der anderen Seite erhält man die Geraden, die allen ∞^2 Complexen des Bündels gemein sind, als die Geraden (p_{ik}), die den drei Bedingungen (59) genügen. Diese drei Gleichungen definieren aber ∞^1 Geraden (p_{ik}). Also giebt es ∞^1 Geraden γ, die allen Complexen des Bündels angehören.

Sie gehören insbesondere auch den ∞^1 speciellen Complexen an, die im Bündel enthalten sind. Folglich schneiden sie jede der ∞^1 Geraden g. Es liegen somit zwei Scharen von je ∞^1 Geraden g und γ vor derart, dass jede Gerade g jede Gerade γ schneidet. Mithin sind diese Geraden entweder die beiden Scharen von Erzeugenden einer Fläche zweiter Ordnung, oder aber sie liegen in einer Ebene.

Dass der erstere Fall sehr wohl eintreten kann, wollen wir direct nachweisen. Dabei wird sich zugleich Neues ergeben.

Es sei nämlich umgekehrt eine Fläche zweiten Grades gegeben, und ihre Erzeugenden seien mit g bez. γ bezeichnet. Sind dann g_1, g_2, g_3 drei beliebige Geraden der einen Schar und $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ drei beliebige Geraden der anderen Schar, so definieren die drei ersteren als Axen drei specielle lineare Complexe:

$$G_1 = 0, \quad G_2 = 0, \quad G_3 = 0,$$

ebenso die drei letzteren:

$$\Gamma_1 = 0, \quad \Gamma_2 = 0, \quad \Gamma_3 = 0.$$

Betrachten wir nun die beiden Bündel von linearen Complexen:

$$\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \lambda_3 G_3 = 0,$$
$$\mu_1 \Gamma_1 + \mu_2 \Gamma_2 + \mu_3 \Gamma_3 = 0,$$

so sehen wir, dass jeder Complex des ersteren Bündels mit jedem Complex des letzteren nach Satz 20 in Involution liegt, da jeder specielle Complex $G_i = 0$ mit jedem speciellen Complex $\Gamma_k = 0$ nach Satz 19 in Involution liegt. Jedes der beiden Bündel enthält ∞^1 specielle Complexe. Zu denen des ersten Bündels gehören die drei, deren Axen g_1, g_2, g_3 sind, zu denen des zweiten Bündels die drei, deren Axen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sind. Nach Satz 19 schneiden folglich die Geraden g_1, g_2, g_3 die ∞^1 Geraden, welche die speciellen Complexe des zweiten Bündels definieren. Diese ∞^1 Geraden sind mithin die Erzeugenden γ der Fläche zweiten Grades. Ebenso folgt, dass die Axen der ∞^1 speciellen Complexe des ersten Bündels die Erzeugenden g der Fläche zweiten Grades sind.

Das Bündel

$$\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \lambda_3 G_3 = 0$$

ist also wirklich so beschaffen, dass die allen Complexen des Bündels gemeinsamen Geraden γ die eine Schar der Erzeugenden einer Fläche zweiten Grades darstellen.

Wir haben aber noch mehr erkannt, nämlich *dass zu einem allgemeinen Bündel von linearen Complexen ein zweites existiert, derart, dass jeder Complex des einen Bündels mit jedem Complex des anderen in Involution liegt.*

§ 5. Beziehungen zwischen Liniengeometrie und Differentialgleichungen.

Wir haben in Satz 1 des 1. §, S. 254, gesehen, dass eine Monge'sche Gleichung

$$\Omega(x, y, z;\ dx, dy, dz) = 0$$

∞^3 geradlinige Integralcurven hat, d. h. einen Liniencomplex definiert, wenn Ω die besondere Form hat:

$$\Omega(x, y, z;\ dx, dy, dz) \equiv \Phi(ydz - zdy,\ zdx - xdz,\ xdy - ydx,\ dx,\ dy,\ dz).$$

Wir sahen ferner, dass sich jeder Liniencomplex in dieser Weise durch eine Monge'sche Gleichung definieren lässt. Die *Integralcurven* einer Monge'schen Gleichung von dieser besonderen Art sind die Curven, die in jedem ihrer Punkte eine Gerade des zugehörigen Liniencomplexes zur Tangente haben. Diese Curven bezeichnen wir daher im vorliegenden

Complex-curve. Falle zweckmässig als *Complexcurven.*

Unter einer Complexcurve verstehen wir also eine Curve, deren Tangenten sämtlich einem vorgelegten Complex angehören, analog wie früher (im 6. Kap., § 4) für den speciellen Fall eines linearen Complexes.

Längs einer Complexcurve sind x, y, z Functionen eines Parameters t und sind als solche nur an die eine Gleichung gebunden:

$$\Omega(x, y, z;\ x', y', z') \equiv \Phi(yz' - zy',\ zx' - xz',\ xy' - yx',\ x', y', z') = 0.$$

Hierin deutet der Accent die Differentiation nach t an. Im Folgenden werden wir diese Gleichung zu Grunde legen, da wir einige Eigenschaften der Complexcurven ableiten wollen*).

---

*) Die Entwickelungen dieses Paragraphen rühren von Lie her.

Zunächst ist:

$$\Omega_x \equiv -\frac{\partial \Phi}{\partial(zx'-xz')}z' + \frac{\partial \Phi}{\partial(xy'-yx')}y',$$

und analoge Werte haben Ω_y und Ω_z. Also folgt unmittelbar:

(61) $$\Omega_x x' + \Omega_y y' + \Omega_z z' \equiv 0.$$

Längs einer Complexcurve ist aber mit $\Omega = 0$ auch

$$\frac{d\Omega}{dt} = 0$$

oder

$$\Omega_x x' + \Omega_y y' + \Omega_z z' + \Omega_{x'} x'' + \Omega_{y'} y'' + \Omega_{z'} z'' = 0,$$

d. h. wegen (61)

$$\Omega_{x'} x'' + \Omega_{y'} y'' + \Omega_{z'} z'' = 0.$$

Ferner ist, da die Gleichung $\Omega = 0$ homogen in x', y', z' sein muss:

$$\Omega_{x'} x' + \Omega_{y'} y' + \Omega_{z'} z' = 0.$$

Die beiden letzten Gleichungen aber liefern:

(62) $$\frac{y'z''-z'y''}{\Omega_{x'}} = \frac{z'x''-x'z''}{\Omega_{y'}} = \frac{x'y''-y'x''}{\Omega_{z'}}.$$

Hierin sind die Zähler bekanntlich proportional den Richtungscosinus der *Schmiegungsebene* der Complexcurve im Punkte (x, y, z). Die Nenner haben eine andere Bedeutung: Betrachten wir nämlich alle Complexgeraden, die durch den Punkt (x, y, z) gehen. Wenn wir unter x', y', z' Grössen proportional ihren Richtungscosinus verstehen, so sind sie gebunden an die Gleichung **Schmiegungsebene d. Complexcurve.**

$$\Omega(x, y, z;\ x', y', z') = 0.$$

Diese in x', y', z' homogene Gleichung stellt also, können wir sagen, in laufenden Coordinaten x', y', z' den *Complexkegel* des Punktes (x, y, z) dar. Also sind

$$\Omega_{x'},\quad \Omega_{y'},\quad \Omega_{z'}$$

proportional den Richtungscosinus derjenigen Tangentialebene dieses Kegels, welche die Mantellinie mit den Richtungscosinus proportional x', y', z' enthält. Also liefern die Formeln (62) den

Satz 21: *Jede Complexcurve hat in jedem ihrer Punkte p zur Schmiegungsebene diejenige Tangentialebene des Complexkegels im Punkte p, deren Mantellinie die Tangente der Curve im Punkte p ist*).*

Hieraus folgt dann weiter:

Satz 22: *Haben zwei Complexcurven eines vorgelegten Liniencomplexes einen Punkt und in ihm die Tangente, d. h. also: haben sie ein*

*) Verh. d. Gesellsch. d. Wiss. zu Christiania 1871, S. 77, sowie: Math. Ann. Bd. 5 (1872), S. 154.

Linienelement gemein, so haben sie an der betreffenden Stelle auch die gleiche Schmiegungsebene.

Man kann den Satz 21 geometrisch erläutern: Ist nämlich p ein beliebig gewählter Punkt (siehe Fig. 63), so construieren wir den Kegel k der hindurchgehenden Complexgeraden. Jede durch p gehende Complexcurve muss diesen Kegel in p längs einer Mantellinie berühren. Ist also p' ein dem Punkte p unendlich benachbarter Punkt der Curve, so muss er auf dem Complexkegel des Punktes p liegen. Nun bilden die durch p' gehenden Complexgeraden einen Kegel k'. Er enthält die Gerade pp', da sie Complexgerade ist. Die beiden Kegel k und k' schneiden sich mithin längs der Mantellinie pp'. Die Complexcurve muss in p' den Complexkegel k' längs einer Mantellinie berühren.

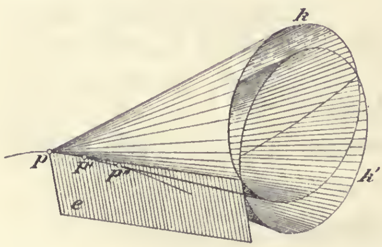

Fig. 63.

Ein dem Punkte p' unendlich benachbarter Punkt p'' der Curve liegt somit auf k'. Es sind nun pp' und $p'p''$ unendlich benachbarte Tangenten der Complexcurve. Sie weichen daher auch nur unendlich wenig von einander ab. Da sie beide auf dem Kegel k' Mantellinien sind, so ist ihre Ebene e Tangentialebene des Kegels k'. Die Ebene $pp'p''$ ist aber als die Schmiegungsebene der Complexcurve im Punkte p' zu bezeichnen. Also folgt, dass die Schmiegungsebene der Complexcurve im Punkte p' Tangentialebene des Complexkegels dieses Punktes p' ist. Dies aber sagte Satz 21 aus.

Umkehrung d. Betrachtg. Nehmen wir nun einmal an, es liege eine *beliebige* Monge'sche Gleichung vor:

$$\Omega(x, y, z;\ dx, dy, dz) = 0,$$

die also nicht notwendig die besondere Form $\Phi = 0$ habe, und fragen wir uns, unter welchen Bedingungen ihre Integralcurven die Eigenschaft haben, dass ihre Schmiegungsebenen zugleich Tangentialebenen der Elementarkegel längs der Linienelemente sind, die sie mit den Elementarkegeln gemein haben. Jede Integralcurve genügt der Gleichung

$$\Omega(x, y, z;\ x', y', z') = 0.$$

Die Richtungscosinus ihrer Schmiegungsebene im Punkte (x, y, z) sind proportional

$$y'z'' - z'y'',\quad z'x'' - x'z'',\quad x'y'' - y'x''.$$

Die Curve hat im Punkte (x, y, z) mit dem Elementarkegel des Punktes die Richtung gemein, deren Cosinus proportional x', y', z' sind. Da nun $\Omega = 0$ den Elementarkegel in den laufenden Coordinaten x', y', z' darstellt, so sind die Richtungscosinus der Tangentialebene des Kegels längs jener Richtung $(x' : y' : z')$ proportional:

$$\Omega_{x'}, \ \Omega_{y'}, \ \Omega_{z'}.$$

Wir fordern daher:

$$\frac{y'z'' - z'y''}{\Omega_{x'}} = \frac{z'x'' - x'z''}{\Omega_{y'}} = \frac{x'y'' - y'x''}{\Omega_{z'}}. \tag{63}$$

Hieraus folgt unmittelbar, dass

$$\Omega_{x'} x'' + \Omega_{y'} y'' + \Omega_{z'} z'' = 0 \tag{64}$$

sein muss. Nun aber erfüllt die Integralcurve die Gleichung

$$\frac{d\Omega}{dt} = 0$$

oder:

$$\Omega_x x' + \Omega_y y' + \Omega_z z' + \Omega_{x'} x'' + \Omega_{y'} y'' + \Omega_{z'} z'' = 0,$$

sodass aus (64) folgt:

$$\Omega_x x' + \Omega_y y' + \Omega_z z' = 0.$$

Dies aber ist nach dem ersten Paragraphen, S. 252, gerade die Bedingung dafür, dass die vorgelegte Monge'sche Gleichung ∞^3 geradlinige Integralcurven hat, d. h. einen Liniencomplex definiert. Also können wir den Satz 21 so umkehren:

Satz 23: *Haben die Integralcurven der Monge'schen Gleichung*

$$\Omega(x, y, z;\ dx, dy, dz) = 0$$

im Raume (x, y, z) die Eigenschaft, dass ihre Schmiegungsebenen in den betreffenden Curvenpunkten die zugehörigen Elementarkegel längs der zugehörigen Tangente berühren, so hat die Monge'sche Gleichung ∞^3 geradlinige Integralcurven, d. h. sie definiert einen Liniencomplex, anders ausgesprochen: sie hat die besondere Form:

$$\Phi(ydz - zdy,\ zdx - xdz,\ xdy - ydx,\ dx,\ dy,\ dz) = 0.$$

Aber wir können die Voraussetzungen dieses Satzes noch einschränken. Es lässt sich nämlich der Satz beweisen:

Satz 24: *Sind unter den Integralcurven der Monge'schen Gleichung*

$$\Omega(x, y, z;\ dx, dy, dz) = 0$$

im Raume (x, y, z) solche ∞^3 Curven enthalten, deren Schmiegungsebenen die den betreffenden Curvenpunkten zugeordneten Elementarkegel längs der zugehörigen Tangenten berühren, so haben alle Integralcurven diese Eigenschaft und die Monge'sche Gleichung definiert einen Liniencomplex, hat also die besondere Form:

$$\Phi(ydz - zdy,\ zdx - xdz,\ xdy - ydx,\ dx,\ dy,\ dz) = 0.$$

Zum Beweise ist zu bemerken, dass die im Satze genannten ∞^3 Integralcurven insgesamt ∞^4 Linienelemente enthalten. Andererseits wissen wir, dass die Monge'sche Gleichung

$$\Omega(x, y, z;\ dx, dy, dz) = 0$$

gerade ∞^4 Linienelemente aus der Schar aller ∞^5 Linienelemente $(x, y, z,\ dx : dy : dz)$ des Raumes bestimmt. Daraus folgt, dass die Schar der Linienelemente der ∞^3 Integralcurven sich völlig deckt mit der Schar *aller* Linienelemente, die durch die Monge'sche Gleichung definiert wird, dass also die Linienelemente $(x, y, z,\ x' : y' : z')$ der ∞^3 Curven nur der Gleichung

$$\Omega(x, y, z;\ x', y', z') = 0$$

und keiner anderen Gleichung genügen. Sobald wir uns nur auf diese ∞^3 Integralcurven beschränken, können wir daher die Betrachtung, die zum Satz 23 führte, auch hier anstellen.

Es wäre noch der Fall denkbar, dass in (63) alle drei Zähler Null sind, sodass also nicht sofort (64) abzuleiten wäre. Aber wenn einzeln für die ∞^3 Curven:

$$y'z'' - z'y'' = 0, \quad z'x'' - x'z'' = 0, \quad x'y'' - y'x'' = 0$$

wäre, so müssten diese Curven Geraden sein, d. h. die Monge'sche Gleichung definierte einen Liniencomplex. In diesem Ausnahmefall hätten die gegebenen Curven gar keine bestimmten Schmiegungsebenen.

Endlich können wir den Satz 21 noch in folgender Weise umkehren:

Andere Art der Umkehrung.

Satz 25: *Wenn bei vorgelegter Monge'scher Gleichung*

$$\Omega(x, y, z;\ dx, dy, dz) = 0$$

im Raume (x, y, z) *alle Integralcurven, die ein Linienelement gemein haben, stets auch an der betreffenden Stelle dieselbe Schmiegungsebene haben, so definiert die Monge'sche Gleichung einen Liniencomplex und hat also die Form:*

$$\Phi(y\,dz - z\,dy,\ z\,dx - x\,dz,\ x\,dy - y\,dx,\ dx,\ dy,\ dz) = 0.$$

Zum Beweise ist zu beachten, dass alle Integralcurven, die ein Linienelement gemein haben, an der betreffenden Stelle in den Werten von $x, y, z,$ $x' : y' : z'$ übereinstimmen. Da nun $y'z'' - z'y''$, $z'x'' - x'z''$, $x'y'' - y'x''$ proportional den Richtungscosinus der Schmiegungsebene sind, so findet die Voraussetzung des Satzes ihren Ausdruck darin, dass für *jede* Integralcurve

$$\frac{y'z'' - z'y''}{\alpha} = \frac{z'x'' - x'z''}{\beta} = \frac{x'y'' - y'x''}{\gamma}$$

sein soll, wenn α, β, γ gewisse *Functionen von* x, y, z, x', y', z' *allein* bedeuten. Diese beiden Bedingungen lassen sich aber auch so schreiben:

$$(65) \qquad \begin{cases} \alpha x' + \beta y' + \gamma z' = 0, \\ \alpha x'' + \beta y'' + \gamma z'' = 0. \end{cases}$$

Für eine beliebige Integralcurve besteht aber andererseits die Monge'sche Gleichung:

$$\Omega(x, y, z;\ x', y', z') = 0$$

mit der Bedingung der Homogeneität:

$$\Omega_{x'} x' + \Omega_{y'} y' + \Omega_{z'} z' = 0,$$

sowie die durch Differentiation nach t hervorgehende Gleichung:

$$(66) \qquad \Omega_x x' + \Omega_y y' + \Omega_z z' + \Omega_{x'} x'' + \Omega_{y'} y'' + \Omega_{z'} z'' = 0.$$

Ausserdem bestehen für sie keine Gleichungen zwischen $x, y, z, x', y', z', x'', y'', z''$ allein*). Also müssen die beiden Gleichungen (65) Folgen der drei letzten sein. Dies ist aber nur dann möglich, wenn unter letzteren eine in x'', y'', z'' lineare homogene Relation vorhanden ist, da die zweite Gleichung (65) eine solche ist, d. h. nur dann, wenn in (66) das von x'', y'', z'' freie Glied

$$\Omega_x x' + \Omega_y y' + \Omega_z z' = 0$$

ist. Diese Gleichung aber ist gerade die Bedingung dafür, dass die vorgelegte Monge'sche Gleichung ∞^3 geradlinige Integralcurven hat (vgl. § 1 dieses Kap., S. 252). Hiermit ist der Satz 25 bewiesen.

Mit den Sätzen 21 und 22, die wir zu Anfang dieses Paragraphen aufstellten, stehen ferner zwei Sätze in Verbindung, die sich auf diejenige *partielle Differentialgleichung erster Ordnung* beziehen, die der Monge'schen Gleichung eines Liniencomplexes in Gemässheit des § 1 zugeordnet ist. Gehen wir, um den einen Satz abzuleiten, von der Monge'schen Gleichung eines nicht-linearen Liniencomplexes Part. Diffgl. eines Complexes.

$$(67) \quad \Phi(ydz - zdy,\ zdx - xdz,\ xdy - ydx,\ dx,\ dy,\ dz) = 0$$

aus, so wissen wir, dass die zugehörige partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$(68) \qquad F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

zu Integralflächen diejenigen Flächen besitzt, die in jedem ihrer Punkte eine Tangentenebene haben, die zugleich den zugehörigen Complexkegel berührt. Die Berührung zwischen Fläche und Kegel findet statt längs der durch den betreffenden Punkt gehenden *Charakteristik* der Integralfläche (vgl. S. 260), die, wie wir wissen, ∞^1 Charakteristiken enthält. Da die Charakteristiken in jedem ihrer Punkte mit dem zugeordneten Elementarkegel ein Linienelement gemein haben, so sind sie Integralcurven der Monge'schen Gleichung (67) oder, was dasselbe ist, Complexcurven. Nach Satz 21 ist ihre Schmiegungsebene zugleich Tangentialebene des Complexkegels, also nach dem Vorhergehenden zugleich Tangentenebene der Fläche. Die ∞^1 auf einer Integralfläche der partiellen Differentialgleichung (68) gelegenen Charakteristiken haben somit überall zur Schmiegungsebene die Tangentenebene der Fläche und sind deshalb *Haupttangentencurven* der Fläche. Charakteristiken als Haupttang.-Curven.

*) Es ist vielleicht nützlich zu bemerken, dass sich die hier aufgestellten Gleichungen invariant verhalten gegenüber der Einführung einer Function von t als neuen Parameters, nach dem differenziert wird.

Also haben wir erkannt:

Satz 26: *Liegt die Monge'sche Gleichung eines nicht-linearen Liniencomplexes vor, so haben die Integralflächen der zugeordneten partiellen Differentialgleichung erster Ordnung die ∞^1 auf ihnen gelegenen Charakteristiken zu Haupttangentencurven* *).

Dieser Satz lässt sich nun *umkehren:* Nehmen wir an, die nichtlineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0 \tag{68}$$

sei gegeben, und sie habe unter anderen ∞^2 solche Integralflächen, auf denen die Charakteristiken Haupttangentencurven sind. Da jede dieser Flächen ∞^1 Charakteristiken enthält, so enthalten alle ∞^2 Flächen insgesamt ∞^3 Charakteristiken, und letztere sind, wie wir wissen, Integralcurven der zur partiellen Differentialgleichung (68) zugeordneten Monge'schen Gleichung

$$\Omega(x, y, z; dx, dy, dz) = 0. \tag{69}$$

Da diese ∞^3 Charakteristiken Haupttangentencurven jener ∞^2 Integralflächen sind, so sind ihre Schmiegungsebenen Tangentenebenen der Flächen, also auch Tangentialebenen der Elementarkegel. Nach Satz 24 definiert also die Monge'sche Gleichung (69) notwendig einen Liniencomplex. Somit gilt das

Theorem 9: *Hat eine nicht-lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung im Raume (x, y, z):*

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

die Eigenschaft, dass auf gewissen ∞^2 Integralflächen die Charakteristiken zugleich Haupttangentencurven sind, so ist dies auf jeder Integralfläche der Fall. Alsdann ist die der partiellen Differentialgleichung zugeordnete Monge'sche Gleichung die Gleichung eines nicht-linearen Liniencomplexes.

Später werden wir Gelegenheit nehmen, diese Sätze noch zu vervollständigen.

Schliesslich werde noch der Satz bewiesen:

Torsion d. Complexcurven.

Satz 27: *Alle die Curven eines Liniencomplexes, die durch einen bestimmt gewählten Punkt gehen und daselbst das Linienelement gemein haben, haben in diesem Punkte ausser der Schmiegungsebene auch die Torsion gemein* **).

*) Verh. d. Ges. d. Wiss. zu Christiania 1871, Math. Annalen Bd. 5.

**) Verh. (Sitzungsber.) d. Ges. d. Wiss. zu Christiania 1883, S. 20.

Wir erinnern hierbei daran, dass wir in § 4 des 6. Kap. (Satz 26, S. 231) für die Curven eines *linearen* Liniencomplexes fanden, dass sie in gemeinsamen Punkten auch dann gleiche Torsion haben, wenn ihre Linienelemente verschieden sind.

Um Satz 27 zu beweisen, nehmen wir an, es liege die Monge'sche Gleichung eines Liniencomplexes vor:

$$\Omega(x, y, z;\ dx, dy, dz) = 0$$

oder:

$$\Omega(x, y, z;\ x', y', z') = 0.$$

Es seien nun λ, μ, ν die Richtungscosinus der Schmiegungsebene einer Complexcurve, die im Punkte (x, y, z) das Linienelement $(x, y, z, x' : y' : z')$ enthält, dessen Coordinaten natürlich der letzten Gleichung genügen müssen. Alsdann ist, wie wir wissen:

$$\lambda = \varrho\,\Omega_{x'}, \quad \mu = \varrho\,\Omega_{y'}, \quad \nu = \varrho\,\Omega_{z'}, \tag{70}$$

sodass

$$\varrho^2 = \frac{1}{\Omega_{x'}^2 + \Omega_{y'}^2 + \Omega_{z'}^2} \tag{71}$$

ist. Ferner sind uns schon die Formeln bekannt (vgl. S. 303):

$$\Omega_{x'}\,x' + \Omega_{y'}\,y' + \Omega_{z'}\,z' = 0, \tag{72}$$

$$\Omega_{x'}\,x'' + \Omega_{y'}\,y'' + \Omega_{z'}\,z'' = 0. \tag{73}$$

Differenzieren wir die Gleichung (72) nach t, so folgt wegen (73):

$$d\Omega_{x'} \cdot x' + d\Omega_{y'} \cdot y' + d\Omega_{z'} \cdot z' = 0$$

oder auch:

$$d\Omega_{x'} \cdot dx + d\Omega_{y'} \cdot dy + d\Omega_{z'} \cdot dz = 0,$$

während sich (72) auch so schreiben lässt:

$$\Omega_{x'} \cdot dx + \Omega_{y'} \cdot dy + \Omega_{z'} \cdot dz = 0,$$

sodass folgt:

$$\begin{cases} dx = \sigma(\Omega_{y'}\,d\Omega_{z'} - \Omega_{z'}\,d\Omega_{y'}), \quad dy = \sigma(\Omega_{z'}\,d\Omega_{x'} - \Omega_{x'}\,d\Omega_{z'}), \\ dz = \sigma(\Omega_{x'}\,d\Omega_{y'} - \Omega_{y'}\,d\Omega_{x'}). \end{cases} \tag{74}$$

Ist $d\tau$ der Winkel zweier unendlich benachbarter Schmiegungsebenen mit den Richtungscosinus λ, μ, ν und $\lambda + d\lambda$, $\mu + d\mu$, $\nu + \delta\nu$, so ist nach einer bekannten Formel der analytischen Geometrie

$$d\tau^2 = d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2,$$

daher nach (70), wenn das Zeichen S andeuten soll, dass jedesmal die drei Glieder zu summieren sind, die durch cyklische Vertauschung der Buchstaben x, y, z aus dem angegebenen Gliede hervorgehen:

$$d\tau^2 = \varrho^2\,\mathsf{S}\,(d\Omega_{x'})^2 + 2\varrho\,d\varrho\,\mathsf{S}\,\Omega_{x'}\,d\Omega_{x'} + d\varrho^2\,\mathsf{S}\,(\Omega_{x'})^2.$$

Nach (71) ist aber:

$$d\varrho = -\varrho^3 \mathsf{S}\, \Omega_{x'}\, d\Omega_{x'},$$

sodass kommt:

$$d\tau = \varrho^4 \{ \mathsf{S}(\Omega_{x'})^2\, \mathsf{S}(d\Omega_{x'})^2 - (\mathsf{S}\, \Omega_{x'}\, d\Omega_{x'})^2 \}$$

oder:

$$d\tau^2 = \varrho^4 \mathsf{S}(\Omega_{y'}\, d\Omega_{z'} - \Omega_{z'}\, d\Omega_{y'})^2.$$

Dies giebt nach (74):

$$d\tau^2 = \varrho^4 \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\sigma^2}.$$

Hierin ist $dx^2 + dy^2 + dz^2$ das Quadrat des Bogenelementes ds der Curve, also:

$$d\tau^2 = \frac{\varrho^4}{\sigma^2} ds^2,$$

sodass das Quadrat der Torsion den Wert hat:

$$\left(\frac{d\tau}{ds}\right)^2 = \frac{\varrho^4}{\sigma^2}. \tag{75}$$

ϱ enthält nach (71) x'', y'', z'' *nicht.* Dasselbe gilt von σ. Es ist nämlich, da ein Complex vorliegt (nach (61), S. 303):

$$\Omega_x x' + \Omega_y y' + \Omega_z z' = 0.$$

Differenzieren wir diese Formel nach z' sowie nach y' und ebenso die Formel (73) nach z' und y', so finden wir mit Rücksicht auf die so hervorgehenden Gleichungen, wenn wir dx nach (74) ausführlich hinschreiben, sofort:

$$dx = \sigma(\Omega_y \Omega_{z'} - \Omega_z \Omega_{y'})\, dt.$$

Es ist also:

$$\frac{x'}{\sigma} = \Omega_y \Omega_{z'} - \Omega_z \Omega_{y'}, \quad \frac{y'}{\sigma} = \Omega_z \Omega_{x'} - \Omega_x \Omega_{z'}, \quad \frac{z'}{\sigma} = \Omega_x \Omega_{y'} - \Omega_y \Omega_{x'}.$$

Diese Gleichungen zeigen, dass σ nur von x, y, z, x', y', z' abhängt. Nach (75) ist also die Torsion eine Function von x, y, z, x', y', z' allein, frei von x'', y'', z''. Damit aber ist Satz 27 nachgewiesen.

Wir machen hier noch eine nachträgliche Bemerkung zu früheren Entwickelungen: In § 4 des 6. Kap., S. 235, sahen wir, dass sich die Haupttangentencurven einer Regelfläche, deren Geraden einem linearen Complex angehören, durch Quadratur bestimmen, da sie einer Riccati'schen Gleichung genügen und mindestens eine als eine Curve des Complexes angegeben werden kann. *Wenn nun die Erzeugenden der Regelfläche einem Strahlensystem* 1. *O. und* 1. *Cl. angehören,* d. h. wenn sie zwei Geraden g und h schneiden (S. 295), so sind die Geraden g, h Haupttangentencurven, sodass die Bestimmung aller Haupttangentencurven zunächst auf eine Quadratur zurückkommt. Aber das Strahlensystem gehört ja ∞^1 linearen Complexen an (S. 293), von denen *jeder eine* Haupttangentencurve auf der Fläche liefert. Man findet daher *alle* Haupttangentencurven *durch Differentiation.* Bei passender Wahl von g und h lautet die Gleichung der Regelfläche:

$$z = F\left(\frac{y}{x}\right).$$

In der That fanden wir ihre Haupttangentencurven auf S. 237 durch Differentiation. Ist die Fläche *algebraisch*, so sind es mithin auch die Haupttangentencurven. Dies letztere Ergebnis hatte Cremona schon 1867 durch andere Betrachtungen erhalten, die ihm zugleich die Ordnung der Curven lieferten. (Annali di Mat. 2. Serie, 1. Bd., S. 248.)

Kapitel 8.

Zur Transformationstheorie der tetraedralen Complexe.

In den beiden vorangehenden Kapiteln sahen wir, dass die Begriffe: Linienelement, Pfaff'sche Gleichung und Monge'sche Gleichung in genauestem Zusammenhang mit der Liniengeometrie stehen, die sich daher unter die Geometrie der Monge'schen Gleichungen unterordnet. Um die Wichtigkeit und Tragweite dieser Auffassung zu beleuchten, wollen wir uns zunächst in diesem Kapitel ziemlich eingehend mit besonders merkwürdigen Liniencomplexen zweiten Grades, den sogenannten tetraedralen Complexen, beschäftigen. Wir werden für diese Complexe eine Reihe von Transformationstheorien entwickeln, die in einfacher Weise zu vielen beachtenswerten Ergebnissen führen. Dabei werden wir fortwährend die oben genannten Begriffe sowie den allgemeinen Begriff: Transformation benutzen und die durch sie gekennzeichnete Auffassung der Liniengeometrie in den Vordergrund treten lassen. Es ist unsere Absicht, durch ausführliche Behandlung eines speciellen Problems in erster Linie solche Methoden zu entwickeln und Stoffe für die spätere Benutzung vorzubereiten, auf die wir uns im zweiten Teile des Werkes stützen können. Daneben ergeben sich aber auch Sätze von Bedeutung.

§ 1. Allgemeines über die tetraedralen Complexe.

Es sei ein Tetraeder gegeben. Eine beliebige Gerade wird die Seitenflächen des Tetraeders in vier Punkten treffen, die, in irgend einer bestimmten Reihenfolge angeordnet, ein gewisses Doppelverhältnis haben werden. Schreibt man diesem Doppelverhältnis einen bestimmten Wert vor, so ist dies *eine* Bedingung in den Liniencoordinaten, sodass es also unter den ∞^4 Geraden des Raumes deren ∞^3 geben wird, die der vorgeschriebenen Bedingung genügen.

Die Gesamtheit der Geraden, deren Schnittpunkte mit den Flächen eines Tetraeders ein gegebenes Doppelverhältnis haben, bezeichnet man als einen tetraedralen Complex. Je nachdem man den Wert des Doppelverhältnisses wählt, erhält man verschiedene tetraedrale Complexe. Zu einem gegebenen Tetraeder gehören also ∞^1 tetraedrale Complexe. Tetraedraler Complex.

In diesem Kapitel werden wir uns nur mit *projectiven* Eigenschaften der tetraedralen Complexe beschäftigen. Betrachten wir die Schar aller ∞^1 tetraedralen Complexe, die zu einem gegebenen Tetraeder gehören, so werden wir also ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit der aufzustellenden Sätze das Tetraeder in besonderer Weise wählen dürfen, z. B. als das von den drei Coordinatenebenen und von der unendlich fernen Ebene gebildete Tetraeder. Hiervon werden wir öfters zur Bequemlichkeit der Rechnungen Gebrauch machen.

Satz von Staudt.

Um die tetraedralen Complexe noch auf eine andere Weise zu definieren, schicken wir einen von Staudt herrührenden Satz voraus. Sind nämlich A, B, C, D die Ecken eines Tetraeders und ist g irgend eine Gerade im Raume, so sagt dieser Satz aus, dass das Doppelverhältnis der Schnittpunkte der Geraden mit den Tetraederflächen gleich dem Doppelverhältnis der vier Ebenen ist, die durch g und die Tetraederecken gelegt werden können. Bei beiden Doppelverhältnissen ist natürlich die Reihenfolge der Elemente in entsprechender Weise zu wählen.

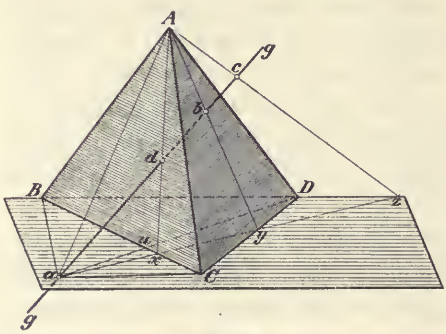

Fig. 64.

Um diese Behauptung zu beweisen, wollen wir mit a, b, c, d die Schnittpunkte der Geraden g mit den Tetraederflächen bezeichnen, die bezüglich den Ecken A, B, C, D gegenüberliegen. (Siehe Fig. 64.) Die Ebene durch A und g schneidet die Tetraederebene BCD in einer Geraden durch a, die BC in x, CD in y, BD in z treffe. Alsdann ist das Doppelverhältnis

$$(abcd) = (ayzx).$$

Letzteres ist aber bekanntlich dasselbe, wie das Doppelverhältnis der in umgekehrter Reihenfolge genommenen Punkte, also

$$(abcd) = (xzya).$$

Schneidet ferner aD die Gerade BC in u, so giebt die Projection des Doppelverhältnisses $(xzya)$ auf BC von D aus sofort

$$(abcd) = (xBCu).$$

Das Doppelverhältnis $(xBCu)$ ist fernerhin gleich dem der vier Ebenen durch g und bez. x, B, C, u. Diese vier Ebenen sind aber die Ebenen durch g und die Eckpunkte A, B, C, D des Tetraeders. Also ist das Doppelverhältnis $(abcd)$ gleich dem Doppelverhältnis der vier Ebenen durch die Gerade g und die Ecken A, B, C, D des Tetraeders.

Ein *anderer Beweis des Staudt'schen Satzes* ist folgender: Ist das betrachtete Tetraeder das der Coordinatenebenen und der unendlich fernen Ebene im gewöhnlichen Coordinatensystem (x, y, z), so giebt es ∞^3 Flächen zweiten Grades, die das Tetraeder zum Polartetraeder haben. Ihre Gleichung lautet: Zweiter Beweis d. Satzes v. Staudt.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Verlangen wir, dass eine allgemein gewählte Gerade g, d. h. eine Gerade, die weder in den Tetraederebenen liegt noch durch eine Tetraederecke geht, auf einer dieser Flächen liege, so giebt dies *drei* lineare Bedingungsgleichungen für $\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}$, da zu fordern ist, dass *drei* Punkte der Geraden auf der Fläche gelegen sind. Es giebt demnach eine und nur eine Fläche zweiten Grades, die das Tetraeder zum Polartetraeder hat und die Gerade g enthält. Die Gerade g ist alsdann ihre eigene reciproke Polare hinsichtlich der Fläche. Wenn wir nun den ganzen Raum der durch die Fläche definierten *Transformation durch reciproke Polaren* unterwerfen, so geht g also in sich über, während die Ecken des Polartetraeders in die gegenüberliegenden Ebenen des Tetraeders und umgekehrt verwandelt werden. Die vier Schnittpunkte der Geraden g mit den Tetraederebenen gehen folglich in die vier Ebenen durch die Gerade g und die Tetraederecken über. Da bei der Transformation durch reciproke Polaren die Doppelverhältnisse ungeändert bleiben, so ist mithin das Doppelverhältnis jener vier Schnittpunkte gleich dem der soeben erwähnten vier Ebenen, sodass also der Staudt'sche Satz bewiesen ist. Transform. durch rec. Polaren.

Aus dem Staudt'schen Satze folgt, *dass ein tetraedraler Complex auch definiert werden kann als die Schar aller Geraden, die mit den Ecken des Tetraeders vier Ebenen mit constantem Doppelverhältnis bilden.* Zweite Defin. des tetr. Compl.

Unterwerfen wir wie soeben den ganzen Raum einer Transformation durch reciproke Polaren hinsichtlich einer Fläche zweiten Grades, die das Tetraeder zum Polartetraeder hat, so ergiebt sich mithin, dass dabei alle Geraden eines tetraedralen Complexes unter einander transformiert werden.

Jeder tetraedrale Complex bleibt somit invariant bei jeder Transformation durch reciproke Polaren hinsichtlich einer zum Tetraeder con-

Tetr. Compl. zu sich selbst dualist. *jugierten Fläche zweiten Grades.* Jeder der ∞^1 tetraedralen Complexe ist also in dieser Weise *zu sich selbst dualistisch*, und zwar auf ∞^3 Weisen vermöge einer Transformation durch reciproke Polaren.

Künftig können wir uns einer abkürzenden Redeweise bedienen: Wir sagen, dass eine Gerade g das Tetraeder in einem gegebenen Doppelverhältnis schneidet oder mit ihm ein gegebenes Doppelverhältnis bestimmt, wenn die vier Schnittpunkte der Geraden g mit den Tetraederebenen dies Doppelverhältnis bilden.

Nehmen wir an, es liege ein bestimmter tetraedraler Complex vor, und betrachten wir alle Complexgeraden in einer beliebig gewählten *Ebene e.* Die Ebene schneidet die Tetraederebenen in vier Geraden g_1, g_2, g_3, g_4. Die in der Ebene e gelegenen Complexgeraden sind diejenigen Geraden, deren Schnittpunkte mit g_1, g_2, g_3, g_4 das für den Complex charakteristische Doppelverhältnis bilden. Sie umhüllen demnach einen *Kegelschnitt k*, der g_1, g_2, g_3, g_4 zu Tangenten hat. Da der Complex zu sich selbst dualistisch ist, so folgt hieraus auch, dass alle Complexgeraden, die durch einen beliebig gewählten *Punkt p* gehen, einen *Kegel zweiten Grades* bilden, der die Geraden von p nach den Tetraederecken enthält. *Der tetraedrale Complex ist somit vom zweiten Grade.* Zugleich sehen wir, dass alle Geraden in einer Tetraederebene und auch alle Geraden durch eine Tetraederecke dem Complexe angehören.

Complex-Kegelschnitt.

Complexkegel.

Der Kegelschnitt, der von den Complexgeraden in der Ebene e umhüllt wird, artet nur dann in zwei Punkte aus, wenn drei der vier Geraden g_1, g_2, g_3, g_4 durch einen Punkt gehen, mit anderen Worten, wenn die Ebene e durch eine Tetraederecke geht. Entsprechend zerfällt der Complexkegel eines Punktes p dann und nur dann in zwei Ebenen, wenn der Punkt p in einer Tetraederebene liegt.

Liegt ein bestimmter tetraedraler Complex vor, so besteht sein Tetraeder aus den vier Ebenen, welche die ∞^3 in den Ebenen des Raumes gelegenen Complex-Kegelschnitte berühren. Hierin liegt, dass tetraedrale Complexe mit verschiedenen Tetraedern nie mit einander identisch sein können.

Gleichung d. tetr. Compl.

Um die tetraedralen Complexe analytisch zu behandeln, wollen wir als die Ebenen des Tetraeders die Coordinatenebenen $x=0$, $y=0$, $z=0$ sowie die unendlich ferne Ebene wählen. Die Gerade

(1) $$x = rz + \varrho, \quad y = sz + \sigma$$

schneidet alsdann die drei ersten Tetraederebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ in den Punkten a, b, c (vgl. Fig. 65), deren z-Coordinaten sind:

$$z_a = -\frac{\varrho}{r}, \quad z_b = -\frac{\sigma}{s},$$

$$z_c = 0,$$

dagegen die unendlich ferne Tetraederebene in einem Punkte d, dessen z-Coordinate unendlich gross ist. Eines der Doppelverhältnisse der vier Punkte a, b, c, d, nämlich

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd},$$

ist gleich dem Verhältnis $ac:bc$, also gleich

$$\frac{z_c - z_a}{z_c - z_b} = \frac{s\varrho}{r\sigma}.$$

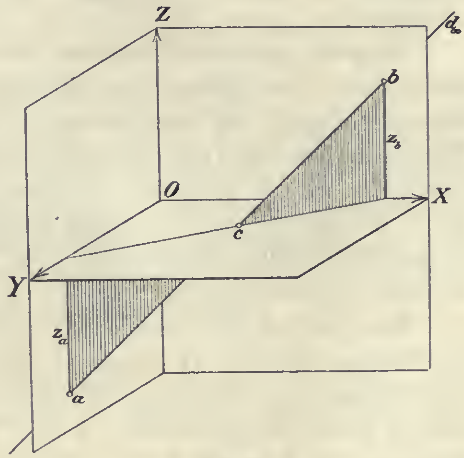

Fig. 65.

Verlangen wir, dass dies Doppelverhältnis den constanten Wert $\varkappa$ habe, so muss

$$\frac{s\varrho}{r\sigma} = \varkappa \tag{2}$$

gesetzt werden.

Alle Geraden (1) *also, die der Gleichung* (2) *bei gegebenem* $\varkappa$ *genügen, bilden einen tetraedralen Complex.*

Lie's Untersuchungen*) über die tetraedralen Complexe nehmen ihren Ausgangspunkt von einer einfachen Transformationstheorie, die wir hier zunächst entwickeln.

Zu diesem Zwecke betrachten wir alle projectiven Transformationen, bei denen die Ecken A, B, C, D des gegebenen Tetraeders und also auch die Ebenen des Tetraeders einzeln fest bleiben. Schneidet eine Gerade g die Ebenen des Tetraeders in den Punkten a, b, c, d und wird diese Gerade g durch eine jener projectiven Transformationen in die Gerade g_1 übergeführt, die mit den Tetraederebenen die Punkte a_1, b_1, c_1, d_1 gemein habe, so ist klar, dass die Transformation die Punkte a, b, c, d gerade in die Punkte a_1, b_1, c_1, d_1 überführt. Da ferner die projective Transformation die Doppelverhältnisse nicht ändert, so ist Proj. Trf., bei d. das Tetraeder inv. bleibt.

$$(abcd) = (a_1 b_1 c_1 d_1).$$

*) Göttinger Nachr. Jan. 1870.

Also folgt, dass jede projective Transformation, bei der die Ecken des Tetraeders einzeln fest bleiben, die Geraden eines jeden tetraedralen Complexes, der zu dem gewählten Tetraeder gehört, unter einander vertauscht.

Es giebt projective Transformationen, die zwar das Tetraeder fest lassen, aber seine Ecken unter einander vertauschen. Wir wollen aber für das Folgende die Vereinbarung treffen, dass unter einer projectiven Transformation, die ein Tetraeder invariant lässt, immer eine solche verstanden werden soll, die jede Ecke des Tetraeders einzeln in Ruhe lässt. Alsdann können wir unser obiges Ergebnis so ausdrücken: *Ein tetraedraler Complex bleibt invariant bei jeder projectiven Transformation, die sein Tetraeder invariant lässt.*

Nun giebt es aber gerade ∞^3 projective Transformationen, welche die Punkte A, B, C, D einzeln in Ruhe lassen. Wenn wir z. B. als das Tetraeder wie oben das der drei Coordinatenebenen und der unendlich fernen Ebene wählen, so hat jede derartige projective Transformation die Form:

$$(3) \qquad x_1 = \lambda x, \quad y_1 = \mu y, \quad z_1 = \nu z.$$

Hierin sind λ, μ, ν beliebige von Null verschiedene Constanten. Die Gerade

$$(1) \qquad x = rz + \varrho, \quad y = sz + \sigma$$

geht bei der Transformation (3) in die Gerade über:

$$(4) \qquad x_1 = \frac{\lambda}{\nu} r z_1 + \lambda \varrho, \quad y_1 = \frac{\mu}{\nu} s z_1 + \mu \sigma.$$

Die Liniencoordinaten der neuen Geraden (4) sind:

$$r_1 = \frac{\lambda}{\nu} r, \quad s_1 = \frac{\mu}{\nu} s,$$

$$\varrho_1 = \lambda \varrho, \quad \sigma_1 = \mu \sigma,$$

sodass

$$\frac{s_1 \varrho_1}{r_1 \sigma_1} = \frac{s \varrho}{r \sigma}$$

ist, womit nach Formel (2) die Invarianz der tetraedralen Complexe bei den projectiven Transformationen (3) auch analytisch dargethan ist.

Sind r, s, ϱ, σ bestimmt gewählt, während λ, μ, ν alle möglichen constanten Werte annehmen mögen, so stellen die Gleichungen (4) gerade ∞^3 Geraden dar. Jede Gerade geht somit vermöge aller ∞^3 projectiven Transformationen (3) in ∞^3 Geraden über. Da sie aber in Geraden desselben tetraedralen Complexes verwandelt wird, so folgt, dass es unter den projectiven Transformationen (3) stets eine giebt, die eine bestimmt gewählte allgemeine Gerade des tetraedralen Complexes in eine andere solche Gerade desselben Complexes überführt.

Ein tetraedaler Complex ist hiernach der Inbegriff aller Geraden, in die eine gegebene Gerade übergeht, sobald auf sie alle ∞^3 projectiven Transformationen ausgeübt werden, die das vorgelegte Tetraeder invariant lassen.

Wir fassen unsere Ergebnisse zusammen in dem

Satz 1: *Übt man auf den Raum alle ∞^3 projectiven Transformationen aus, welche die Ecken eines gegebenen Tetraeders einzeln invariant lassen, so bleibt jeder der ∞^1 tetraedralen Complexe dieses Tetraeders invariant. Unter diesen Transformationen ist stets eine enthalten, die eine beliebig gegebene allgemeine Gerade eines dieser Complexe in eine beliebige andere allgemeine Gerade desselben Complexes überführt.* **Invarianz des tetr. Compl. bei proj. Trf.**

In unserer Theorie der tetraedralen Complexe spielt der Umstand eine wesentliche Rolle, dass die ∞^3 projectiven Transformationen

(3) $$x_1 = \lambda x, \quad y_1 = \mu y, \quad z_1 = \nu z,$$

welche die Ecken und Ebenen des Tetraeders invariant lassen, *paarweis mit einander vertauschbar* sind. Führen wir nämlich nach der Transformation (3) die folgende aus: **Vertauschb. der proj. Trf.**

(5) $$x_2 = \lambda_1 x_1, \quad y_2 = \mu_1 y_1, \quad z_2 = \nu_1 z_1,$$

so ist die Aufeinanderfolge beider äquivalent der projectiven Transformation

(6) $$x_2 = \lambda\lambda_1 x, \quad y_2 = \mu\mu_1 y, \quad z_2 = \nu\nu_1 z.$$

Diese Gleichungen ändern sich nicht, wenn λ, μ, ν mit λ_1, μ_1, ν_1 vertauscht werden, d. h. wenn man die Reihenfolge der beiden nach einander auszuführenden Transformationen (3) und (5) ändert. Die ∞^3 projectiven Transformationen, die das Tetraeder invariant lassen, sind also in der That paarweis mit einander vertauschbar.

Ferner ist es begrifflich klar und erhellt auch analytisch ohne weiteres aus den Gleichungen (6), dass die Aufeinanderfolge zweier projectiver Transformationen, die das Tetraeder invariant lassen, einer projectiven Transformation äquivalent ist, die ebenfalls das Tetraeder invariant lässt, *dass also alle ∞^3 projectiven Transformationen* (3) *eine Gruppe bilden* und zwar eine *Gruppe von paarweis vertauschbaren Transformationen.* Da die Gruppe ∞^3 Transformationen enthält, so bezeichnen wir sie als eine *dreigliedrige* Gruppe. Sie hat noch eine besondere Eigenschaft:

Es ist in der Gruppe (3) stets eine und nur eine Transformation enthalten, die einen bestimmt gewählten Punkt allgemeiner Lage

(x, y, z) in einen anderen bestimmt gewählten Punkt allgemeiner Lage (x_1, y_1, z_1) überführt, denn die Gleichungen (3) sind nach λ, μ, ν auflösbar und zwar in eindeutiger Weise. Nach unserer Terminologie ist

Dreigl. einf. trans. Gruppe v. proj. Trf.

daher die betrachtete Gruppe *einfach transitiv*, was eben ausdrücken soll, dass sie gerade eine Transformation enthält, die einen bestimmt gewählten Punkt allgemeiner Lage in einen andern bestimmt gewählten Punkt allgemeiner Lage verwandelt. Wir könnten leicht beweisen, dass sie auch gerade nur eine Transformation enthält, die eine bestimmt gewählte Ebene allgemeiner Lage in eine andere bestimmt gewählte Ebene allgemeiner Lage überführt.

Wohlbemerkt aber enthält sie *keine* Transformation, die eine bestimmt gewählte *Gerade* allgemeiner Lage in eine andere bestimmt gewählte Gerade allgemeiner Lage verwandelt. Nach Satz 1 enthält sie vielmehr eine und nur eine Transformation, die eine bestimmt gewählte Gerade allgemeiner Lage in eine beliebige solche bestimmt gewählte Gerade verwandelt, die das Tetraeder nach demselben Doppelverhältnis schneidet, wie die gegebene Gerade.

Monge'sche Gl. des tetr. Compl.

Wie bekannt, gehört zu jedem Complex eine *Monge'sche Gleichung* (vgl. S. 254); wir wollen jetzt die Monge'sche Gleichung eines tetraedralen Complexes aufstellen.

Die ∞^3 Geraden

(1) $$x = rz + \varrho, \quad y = sz + \sigma,$$

die der Bedingung

(2) $$\frac{s\varrho}{r\sigma} = \varkappa$$

genügen, bilden einen tetraedralen Complex. Sind x, y, z sowie die Verhältnisse von dx, dy, dz die Coordinaten eines Linienelementes der Geraden (1), so ist bekanntlich (vgl. § 3 des 7. Kap., S. 283, 284):

$$\frac{dx}{r} = \frac{dy}{s} = \frac{dz}{1} = \frac{y\,dz - z\,dy}{\sigma} = \frac{z\,dx - x\,dz}{-\varrho} = \frac{x\,dy - y\,dx}{s\varrho - r\sigma}.$$

Schreiben wir die Bedingungsgleichung (2) in den hierdurch gegebenen Differentialausdrücken, so lautet die gesuchte Monge'sche Gleichung:

$$dy(z\,dx - x\,dz) + \varkappa\,dx(y\,dz - z\,dy) = 0$$

oder:

$$-x\,dy\,dz + \varkappa y\,dz\,dx + (1 - \varkappa)\,z\,dx\,dy = 0.$$

Sie lässt sich symmetrisch schreiben:

(7) $$(b - c)\,x\,dy\,dz + (c - a)\,y\,dz\,dx + (a - b)\,z\,dx\,dy = 0,$$

wenn nämlich

$$\frac{-1}{b - c} = \frac{\varkappa}{c - a} = \frac{1 - \varkappa}{a - b}$$

ist. Letztere Beschränkungen stellen in Wahrheit nur die eine Gleichung dar:

$$(8)\qquad \varkappa = \frac{a-c}{b-c}.$$

Die Gleichung (7) enthält also nur anscheinend mehr als eine wesentliche Constante. Bedeuten a, b, c beliebig gewählte Constanten, die nicht alle drei einander gleich sind, so ist folglich die Gleichung (7) die Monge'sche Gleichung eines tetraedralen Complexes, dessen Tetraeder von den Coordinatenebenen und der unendlich fernen Ebene gebildet wird. Die Geraden des Complexes schneiden das Tetraeder nach dem durch (8) gegebenen Doppelverhältnis $\varkappa$.

Die Monge'sche Gleichung (7) lässt sich auch so schreiben:

$$(7')\quad a(y\,dz - z\,dy)\,dx + b(z\,dx - x\,dz)\,dy + c(x\,dy - y\,dx)\,dz = 0.$$

Daher kann die *Gleichung des tetraedralen Complexes in homogenen Liniencoordinaten*, vorausgesetzt, dass das Coordinatentetraeder das des Complexes ist, nach S. 284, so geschrieben werden:

$$(9)\qquad a p_{23} p_{41} + b p_{31} p_{42} + c p_{12} p_{43} = 0.$$

Die Complexkegel sind die Elementarkegel der Monge'schen Gleichung (7).

Wir haben Folgendes gefunden:

Satz 2: *Alle ∞^3 projectiven Transformationen, bei denen die Ecken eines gegebenen Tetraeders invariant bleiben, sind paarweis vertauschbar und bilden überdies eine continuierliche Gruppe. Diese Gruppe ist einfach transitiv, d. h. sie enthält eine und nur eine Transformation, die einen gegebenen Punkt allgemeiner Lage in einen anderen gegebenen Punkt allgemeiner Lage überführt. Jede Transformation der Gruppe lässt die ∞^1 zu dem gegebenen Tetraeder gehörigen tetraedralen Complexe sowie ihre ∞^1 Monge'schen Gleichungen einzeln invariant.*

Schliesslich wollen wir jetzt eine beliebige Ebene e betrachten, welche die Tetraederebenen in den Geraden g_1, g_2, g_3, g_4 schneide. Wie wir S. 314 sahen, umhüllen alle in dieser Ebene gelegenen Geraden des tetraedralen Complexes einen Kegelschnitt k, der g_1, g_2, g_3, g_4 berührt. (Siehe Fig. 66.) Wählen wir in der Ebene einen beliebigen Punkt p, der zunächst nicht auf k gelegen sei. Durch p gehen ∞^1 Complexgeraden,

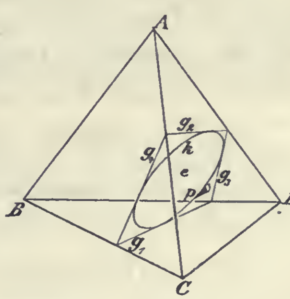

Fig. 66.

die einen Kegel zweiten Grades durch die Tetraederecken bilden. Der

Kegel wird die Ebene e also in zwei Geraden schneiden, die Tangenten von k sind. Rückt der Punkt p auf k, so fallen diese beiden Tangenten zusammen. Die Ebene e wird mithin von allen den Kegeln des vorgelegten tetraedralen Complexes berührt, deren Scheitel p auf dem Kegelschnitt k liegen, und zwar berührt der Kegel die Ebene jedesmal in der Tangente des Kegelschnittes k im Punkte p.

Complex-kegel, die geg. Ebene berühren.

Übrigens ist dies Ergebnis nur ein Ausfluss des allgemeineren früher aufgestellten Satzes, nach dem die Schmiegungsebene einer Complexcurve zugleich Tangentialebene des Complexkegels an der betreffenden Stelle ist. (Vgl. Satz 21, § 5 des 7. Cap., S. 303.) Denn der Kegelschnitt k ist eine Complexcurve, und die Schmiegungsebene dieser ebenen Curve ist die Ebene e.

Zu dem Tetraeder gehören ∞^1 tetraedrale Complexe. Diejenigen Geraden eines jeden dieser ∞^1 Complexe, die in der Ebene e liegen, umhüllen einen Kegelschnitt k, der g_1, g_2, g_3, g_4 berührt. So ergiebt sich in der Ebene e eine *Schar von ∞^1 Kegelschnitten mit vier gemeinsamen Tangenten.* Durch jeden Punkt p der Ebene e gehen zwei Kegelschnitte der Schar. Also giebt es unter den ∞^1 Kegeln, welche die ∞^1 tetraedralen Complexe einem Punkte p der Ebene e zuordnen, gerade zwei, welche die Ebene e berühren. (Siehe Fig. 67.)

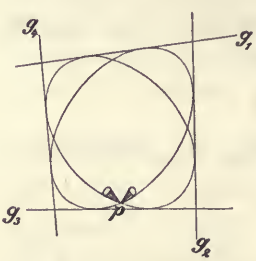

Fig. 67.

Die bis jetzt vorgetragenen Ergebnisse werden wir später, vom dritten Paragraphen an, nach verschiedenen Richtungen hin verwerten.

§ 2. Ältere Untersuchungen über die tetraedralen Complexe.

Der gegenwärtige Paragraph enthält eine kurze geschichtliche Darstellung der älteren Untersuchungen über die tetraedralen Complexe. Der Natur der Sache nach wenden wir uns hierbei insbesondere an solche Leser, die schon ein gewisses Mass liniengeometrischer Kenntnisse haben. Wir betonen deshalb ganz besonders, *dass der gegenwärtige Paragraph* ohne Schaden für die Verständlichkeit der späteren Entwickelungen *überschlagen werden kann.*

Soweit uns bekannt, sind es die tetraedralen Complexe, also gewisse Complexe zweiten Grades, die unter den nicht-trivialen Liniencomplexen zuerst eine eingehende Untersuchung erfahren haben. Es waren Betrachtungen in der Mechanik, die auf diese Complexe wie etwas später auch auf die linearen Complexe geführt haben:

Bewegg. eines Körpers m. festem Pkt.

Wenn ein starrer materieller Körper in einem Punkte festgehalten wird und sich alsdann ohne Einwirkung äusserer Kräfte, also insbesondere auch ohne Einwirkung der Schwere, bewegt, so ist die Bewegung in jedem Zeitelemente eine infinitesimale Drehung um eine Axe, die durch den festen Punkt geht. Von Moment zu Moment wird eine andere Gerade im Körper die momentane Drehaxe, und sie hat ebenso von Moment zu Moment eine andere Lage im Raume. Im Laufe der Bewegung ergeben sich also ∞^1 momentane Drehaxen im Körper, die einen Kegel bilden, dessen Spitze der festgehaltene Punkt ist. Zugleich ist der Ort dieser Axen im Raume ein Kegel, dessen Spitze ebenfalls jener feste Punkt ist. Sieht man von der Geschwindigkeit der Bewegung völlig ab, so kann man den ganzen Verlauf der Bewegung alsdann auch dadurch herstellen, dass man den mit dem Körper festverbunden zu denkenden ersten Kegel auf dem genannten zweiten, im Raume festgedachten Kegel ohne Gleiten abrollen lässt. Dabei muss man natürlich von einer solchen ursprünglichen Lage beider Kegel ausgehen, in der sie sich längs jener Geraden berühren, die zu Anfang der Bewegung die momentane Drehaxe ist.

Es ist nun insbesondere denkbar, dass der Körper zu Anfang eine solche Lage und Bewegung gehabt hat, dass die momentane Drehaxe während des ganzen Verlaufes der Bewegung dieselbe bleibt, sowohl was ihre Lage relativ zum Körper als auch ihre absolute Lage im Raume anlangt. In diesem Falle reducieren sich die beiden Kegel auf eine Gerade durch den festen Punkt, und die ganze Bewegung ist eine beständige Rotation um eine stationäre Axe. Ist der materielle Körper und der feste Punkt von vornherein gegeben, so giebt es, wie man beweisen kann, drei Geraden durch den festen Punkt, welche die Rolle dieser stationären Drehaxe spielen können. Diese drei Geraden stehen paarweis auf einander senkrecht. Man nennt sie die *Trägheitsaxen* des festen Punktes.

Denkt man sich denselben starren materiellen Körper gegeben, aber einen anderen Punkt des Körpers festgehalten, so werden auch durch diese neuen Punkt drei derartige, paarweis zu einander senkrechte stationäre Drehaxen hindurchgehen. Somit sind jedem Punkte des Körpers in einer ganz bestimmten Weise drei mit dem Körper fest verbunden zu denkende Geraden zugeordnet, die einander in dem betreffenden Punkte senkrecht schneiden, die Trägheitsaxen des Punktes. Man kann nachweisen, dass verschiedenen Punkten verschiedene stationäre Drehaxen oder Trägheitsaxen zugehören, dass also eine solche Drehaxe im allgemeinen eben nur für *einen* ihrer Punkte stationäre Drehaxe ist. Es gehören infolgedessen allen ∞^3 Punkten des Körpers — auch den Punkten ausserhalb des Körpers, die man sich mit ihm starr verbunden zu denken hat — insgesamt ∞^3 stationäre Drehaxen zu. Ihr Inbegriff bildet daher das, was wir heutzutage einen *Liniencomplex* nennen, und zwar einen Liniencomplex, der ganz besonders interessante Eigenschaften hat. **Complex d. Trägheitsaxen.**

Auf diesen Liniencomplex hat zuerst Binet 1811*) die Aufmerksamkeit gelenkt.

Binet. Binet zeigte, dass die Schar der Trägheitsaxen identisch ist mit der Schar aller ∞^3 Normalen von ∞^1 confocalen Flächen zweiten Grades. Jedem starren Körper wird demnach in ganz bestimmter Weise eine Schar von confocalen Flächen zweiten Grades zugeordnet, die mit ihm fest verbunden zu denken sind. Durch einen beliebigen Punkt des Raumes gehen bekanntlich gerade drei Flächen, die in einer gegebenen Schar confocaler Flächen zweiten Grades enthalten sind, und diese drei Flächen durchsetzen einander senkrecht, also längs ihrer Krümmungslinien. Construiert man in einem Punkte die drei Normalen zu den drei hindurchgehenden Flächen, so erhält man gerade die drei Trägheitsaxen des betreffenden Punktes. Diese drei Normalen sind offenbar identisch mit den Tangenten an die Krümmungslinien der drei Flächen in dem betrachteten Punkte. In Binet's Abhandlung befindet sich auch — wie nebenbei bemerkt sei — wohl zum *ersten*

---

*) Binet, *Mémoire sur la théorie des axes conjuguées et des momens d'inertie des corps*, Journ. de l'École polyt. 9. Bd., 16. Heft (1813), S. 41. (Gelesen im Institut 1811.)

Male die bekannte cubische Gleichung zur Bestimmung der Hauptaxen einer Fläche zweiten Grades.

Ampère. Man kann sich nun die Frage nach allen Trägheitsaxen durch einen gegebenen Punkt vorlegen, von denen allerdings, wie wir wissen, nur drei zu einander senkrechte Geraden die Trägheitsaxen gerade dieses Punktes sind. Diese Frage wurde von Ampère 1821 *) beantwortet. Er fand, dass die durch einen Punkt gehenden Trägheitsaxen des starren Körpers einen Kegel zweiten Grades bilden. Durch Zusammenfassen der Ergebnisse Binet's und Ampère's geht übrigens unmittelbar der folgende Satz hervor, der jedenfalls später (1855) von Jullien**) ausdrücklich formuliert wurde: Die Normalen, die von einem gegebenen Punkt auf ∞^1 confocale Flächen zweiten Grades gefällt werden können, bilden einen Kegel zweiten Grades.

Confoc. Fl. 2. Grades.

Dupin. Die Theorie der confocalen Flächen zweiten Grades hat seit Dupin***) die Mathematiker vielfach beschäftigt, indem sowohl geometrische wie physikalische, insbesondere mechanische Fragen mit der Theorie dieser Flächen in Zusammenhang stehen. Alle diese geometrischen Untersuchungen beziehen sich — wenn auch nicht immer unmittelbar — auf den von Binet eingeführten Liniencomplex zweiten Grades.

Ist

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1$$

die Gleichung der Schar confocaler Flächen zweiten Grades in Punktcoordinaten x, y, z mit dem Parameter λ, so ist

$$(a^2+\lambda)u^2+(b^2+\lambda)v^2+(c^2+\lambda)w^2=1$$

ihre Gleichung in den zugehörigen Ebenencoordinaten u, v, w. Da die letztere Gleichung linear in λ ist, so folgt, dass es eine und nur eine unter den confocalen Flächen giebt, die eine gegebene Ebene (u, v, w) berührt. Zieht man im Berührpunkt die Normale zur Fläche oder Ebene, so ist also jeder Ebene des Raumes eine Normale zu ihr zugeordnet. Da diese Normalen in ihrer Gesamtheit den von Binet betrachteten Liniencomplex darstellen, so sind hiermit — wie wir uns in jetziger Sprachweise ausdrücken können — die Geraden des Binet'schen Liniencomplexes ein-eindeutig auf die Schar aller ∞^3 Ebenen des Raumes abgebildet. Diese Abbildung wurde, wenn wir nicht irren, zuerst von Chasles, später auch von Plücker untersucht.

Abb. d. Geraden d. Compl. auf d. Ebenen. Chasles.

Unter den hierdurch erhaltenen Ergebnissen erinnern wir an das Folgende, das wir aus Salmon-Fiedler's analytischer Geometrie †) herübernehmen: Dreht sich eine Ebene um eine feste Gerade, so beschreibt die zugeordnete Normale ein hyperbolisches Paraboloid. Dreht sie sich insbesondere um eine Complexgerade (Normale), so umhüllt die zugeordnete Normale einen Kegelschnitt und zwar eine Parabel, welche die drei Hauptebenen berührt.

Normalen ähnlicher Fl. 2. Ordn. Chasles hat ferner den Complex aller ∞^3 Normalen von ∞^1 *ähnlichen und ähnlich gelegenen concentrischen Flächen zweiter Ordnung*

---

*) Ampère, *Mémoire sur quelques nouvelles propriétés des axes permanens de rotation des corps et des plans directeurs de ces axes*, Mém. de l'Acad. 5. Bd. (1821—22), S. 86. (Gelesen 1821, gedruckt 1826.)

**) Jullien, *Problèmes de mécanique rationelle*, Paris 1855, 2. Bd., S. 54.

***) Dupin, *Développements de géométrie*, Paris 1813.

†) Salmon, *Analytische Geometrie des Raumes, bearb. von* Fiedler, 1. *Teil*, 2. Aufl. Leipzig 1864, 3. Aufl. 1879 (hier S. 221). Da sich hier keine Litteraturnachweise finden, wissen wir nicht, wer zuerst diese Sätze aufgestellt hat.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \text{Const.}$$

betrachtet und einige unter den Eigenschaften dieses Complexes angegeben, u. A., dass alle Geraden des Complexes, die durch einen gegebenen Punkt gehen, einen Kegel zweiten Grades bilden, der Complex also vom zweiten Grade ist. Dieser Complex ist factisch, wie wir später sehen werden, identisch mit dem Binet'schen Complexe. Wir glauben aber nicht, dass Chasles *) dies ausdrücklich bemerkt hat.

Auf der anderen Seite gelangte Chasles zu einem Complex, indem er ausging von der Betrachtung einer infinitesimalen Bewegung. Er construierte nämlich die ∞^3 Tangenten der Fortschreitungsrichtungen der Punkte bei einer infinitesimalen Bewegung und erkannte insbesondere, dass durch jeden Punkt des Raumes ∞^1 dieser Geraden gehen, die einen Kegel zweiten Grades bilden, andererseits, dass in jeder Ebene ∞^1 dieser Geraden so liegen, dass sie einen Kegelschnitt umhüllen. Er zeigte somit, dass diese ∞^3 Geraden einen Complex zweiten Grades bilden. Dieser Complex ist vom projectiven Gesichtspunkte aus als eine Ausartung des Binet'schen Complexes zu betrachten. Chasles studierte ferner gewisse Curven und Flächen, die mit dem erwähnten Complex in Verbindung gesetzt werden können. Tg. d. Pkte. bei inf. Bewegg.

Weiterhin ging Chasles noch von einem anderen Standpunkt aus, indem er zwei Lagen eines starren Körpers annahm und die ∞^3 verbindenden Geraden durch entsprechende Punkte des Körpers in den beiden Lagen zog. Dadurch kam er abermals zu einem Complex und zwar zu genau demselben, von dem soeben die Rede war. Verbindende entspr. Pkte. bei endl. Bewegg.

Endlich sei noch bemerkt, dass Chasles am Schlusse seiner langen Abhandlung aus dem Jahre 1861 ausdrücklich darauf hinwies, dass man analoge Betrachtungen anstellen kann, wenn man die Punkte des Raumes einer beliebigen projectiven Transformation unterwirft und die ∞^3 Geraden construiert, die jedesmal einen Punkt in seiner ursprünglichen Lage mit demselben Punkt in seiner neuen Lage verbinden. Dies führt gerade auf den tetraedralen Complex.

In seinen Untersuchungen über Strahlensysteme erster und zweiter Ordnung (1866) beschäftigte sich Kummer **) eingehend mit den *Strahlensystemen*, deren Geraden dem oben besprochenen Liniencomplex aller Normalen von confocalen Flächen zweiter Ordnung angehören. Kummer. Er erkannte, dass dieser Complex eine grosse Anzahl wesentlich verschiedener Strahlensysteme von zweiter Ordnung und von zweiter, dritter u. s. w. bis sechster Classe enthält. Strahlensysteme im Complexe. Sehr sorgfältig discutierte er diese Strahlensysteme sowie ihre Brennflächen, die alle von vierter Ordnung sind. Insbesondere ist die Brennfläche eines in diesem Complexe enthaltenen Strahlensystems zweiter Ordnung und zweiter Classe die nach Kummer benannte Fläche vierter Ordnung und vierter Classe. Ist das Strahlensystem von zweiter Ordnung und sechster Classe, so ist es dualistisch zu dem System der Normalen einer Fläche zweiter Ordnung, das ja von sechster Ordnung und zweiter Classe ist. Die Brennfläche des soebengenannten Kummer'schen Strahlensystems zweiter Ordnung und sechster Classe ist von zwölfter Ordnung und vierter Classe. Wir werden uns später gelegentlich mit den Strahlensystemen beschäftigen, die einem tetraedralen Complex angehören, und werden Methoden angeben, die mit grosser Leichtigkeit sowohl zu diesen Ergebnissen Kummer's als auch zu wesentlich weitergehenden Ergebnissen führen.

---

*) Chasles, *Propriétés géometriques relatives au mouvement infiniment petit etc.*, Comptes Rendus 16. Bd. (1843), S. 1420. Ferner: *Propriétés relatives au déplacement fini quelconque etc.*, Comptes Rendus 51. Bd. (1860), S. 855, 905, u. 52. Bd. (1861), S. 77, 189, 487.

**) Vgl. die in der letzten Fussnote auf S. 272 genannte Abhandlung.

Normalen-syst. einer Fl. 2. O. Über das oben berührte Strahlensystem aller Normalen einer Fläche zweiter Ordnung giebt es eine ausgedehnte Litteratur. Wir erinnern hier nur an einige Eigenschaften dieses Normalensystems: Liegt die Fläche zweiter Ordnung in der Form vor:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

und schneidet die Normale des Flächenpunktes P oder (x, y, z) die drei Coordinatenebenen in den Punkten A, B, C, so gelten die seit langer Zeit bekannten Relationen:

$$PA = \frac{a^2}{p}, \quad PB = \frac{b^2}{p}, \quad PC = \frac{c^2}{p},$$

wenn p den Abstand der Tangentenebene des Punktes P vom Mittelpunkt bezeichnet. Diese Beziehungen lehren, dass die drei Abschnitte PA, PB, PC für alle Normalen der Fläche constante Verhältnisse haben, und dies heisst wieder, dass die vier Punkte P, A, B, C sowie der unendlich ferne Punkt D der Normalen so liegen, dass das Doppelverhältnis aus irgend vieren dieser Punkte für alle Normalen der Fläche constant ist.

Gehen wir von der betrachteten Fläche zweiter Ordnung zu einer ähnlichen und ähnlich gelegenen Fläche zweiter Ordnung mit demselben Mittelpunkt über, so ändern p, a, b, c ihre Verhältnisse zu einander nicht. Daraus folgt, dass auf allen Normalen der ∞^1 ähnlichen, ähnlich gelegenen und concentrischen Flächen zweiter Ordnung die Verhältnisse der drei Strecken PA, PB, PC, also auch der Strecken AB, AC, BC constant sind. Hieraus ergiebt sich nun der längst bekannte Satz, der jedoch vielleicht erst in neuerer Zeit ausdrücklich formuliert wurde:

Normalen ähnl. Fl. 2. O. *Die ∞^3 Normalen von ∞^1 ähnlichen, ähnlich gelegenen und concentrischen Flächen zweiter Ordnung bestimmen ein constantes Doppelverhältnis mit den drei Hauptebenen und der unendlich fernen Ebene.*

Tetraedraler Complex. Sie bilden also einen *tetraedralen Complex.*

Da nun ferner

$$AB = \frac{a^2 - b^2}{p}, \quad BC = \frac{b^2 - c^2}{p}, \quad CA = \frac{c^2 - a^2}{p}$$

ist, so hängen die Verhältnisse von AB, BC, CA nur von den Verhältnissen der Differenzen der Halbaxenquadrate ab. Diese Differenzen aber sind für *confocale* Flächen zweiter Ordnung constant. Also folgt:

Normalen confoc. Fl. 2. O. *Alle ∞^3 Normalen von ∞^1 confocalen Flächen zweiter Ordnung bestimmen ein constantes Doppelverhältnis mit den drei Hauptebenen und der unendlich fernen Ebene.*

Sie bilden daher ebenfalls einen tetraedralen Complex, und wir sehen, dass der von Binet betrachtete Complex zweiten Grades ein allgemeiner tetraedraler Complex ist.

Es ist uns nicht bekannt, ob der soeben formulierte Satz in der Litteratur vor 1869 ausdrücklich ausgesprochen worden ist. Jedenfalls ist er ein Ausfluss aus längst bekannten einfachen Sätzen.

Satz v. Staudt. v. Staudt bemerkte 1856*), dass die Schnittpunkte einer Geraden mit den vier Ebenen eines Tetraeders stets dasselbe Doppelverhältnis bilden wie die Ebenen, welche durch die Gerade und die vier Ecken des Tetraeders gehen, vorausgesetzt natürlich, dass man beide Male eine entsprechende Reihenfolge der Elemente des Doppelverhältnisses festsetzt. (Vgl. § 1, S. 312.) Aus diesem Satze

*) v. Staudt, *Beiträge zur Geometrie der Lage*, 1. Heft, Nürnberg 1856, S. 21.

fliesst sofort die in § 1 angegebene Eigenschaft des tetraedralen Complexes, zu sich selbst dualistisch zu sein vermöge jeder solchen Transformation durch reciproke Polaren, bei der die Ecken des Tetraeders in die gegenüberliegenden Tetraederebenen übergehen *).

Seit dem Jahre 1865 betrachtete de la Gournerie **) eingehend die Curven und Flächen, die durch lineare Gleichungen zwischen x^m, y^m, z^m definiert werden. Er nannte sie *tetraedral-symmetrische Curven und Flächen.* Er zeigte, dass die Tangenten einer tetraedral-symmetrischen Curve ein constantes Doppelverhältnis mit dem Tetraeder der Coordinatenebenen und der unendlich fernen Ebene bilden. Diese Curven sind also Curven des tetraedralen Complexes. Unter den von de la Gournerie untersuchten Curven finden sich Kegelschnitte und Curven dritter und vierter Ordnung, unter den von ihm untersuchten Flächen solche von zweiter und dritter Ordnung sowie die Steiner'sche Fläche vierter Ordnung. Wir werden diese Gebilde späterhin mit Hülfe der Punkttransformation **De la Gournerie.**

$$x_1 = x^m, \quad y_1 = y^m, \quad z_1 = z^m$$

ableiten. Bei de la Gournerie kommt diese Transformation nicht vor.

Durch Plücker's 1865 begonnenen Veröffentlichungen über Liniengeometrie ***) erhielten die älteren Arbeiten über Nullsysteme und Normalensysteme von confocalen Flächen zweiten Grades ein ganz neues Interesse. Sie erschienen jetzt als Teile einer allgemeineren Theorie, die von Plücker allerdings nur skizziert wurde. Jedenfalls aber fanden die vorstehenden Theorien durch ihn eine neue Beleuchtung, und die Bahn für weitere Untersuchungen war gebrochen. **Plücker.**

Im Jahre 1868 erschien der zweite Teil von Reye's *Geometrie der Lage* †), die eine übersichtliche Darstellung der Staudt'schen geometrischen Untersuchungen gab. Dieses Werk enthält gleichzeitig eine ziemlich ausführliche Theorie des tetraedralen Complexes. Für einen nicht geringen Teil waren allerdings die betreffenden Entwickelungen entweder schon bekannt oder jedenfalls naheliegende Folgerungen aus schon bekannten Ergebnissen. Wenn aber auch das Verdienst des Reye'schen Werkes in erster Linie ein pädagogisches ist, so haben doch seine Ausführungen über den tetraedralen Complex daneben einen selbständigen wissenschaftlichen Wert. **Reye**

Reye kommt auf den tetraedralen Complex, indem er — Andeutungen von Chasles folgend — entsprechende Punkte zweier projectiv auf einander bezogener Räume durch Geraden verbindet. Indem er andererseits jedem Punkte des Raumes eine Gerade zuordnet, nämlich die Schnittlinie der beiden Polarebenen des Punktes hinsichtlich zweier Flächen zweiten Grades, findet er eine involutorische Abbildung des tetraedralen Complexes auf den Punktraum, die

---

*) Es ist geschichtlich interessant, dass Steiner 1832 in seiner *Systematischen Entwickelung* etc., S. 299, die Frage stellte:

„Wenn im Raume vier beliebige feste Ebenen gegeben sind, von welcher krummen Fläche werden dann alle Geraden, die von denselben in einem und demselben gegebenen Doppelverhältnis geschnitten werden, berührt?"

Er war sich also nicht bewusst, dass die fraglichen Geraden gar keine Fläche erfüllen. In den Gesamm. Werken, 1. Bd., ist die Frage Steiner's ohne Angabe des Originaltextes berichtigt (S. 442). Ferner wird in einer Anmerkung (S. 527) als Ort der Geraden irrtümlich ein Strahlensystem angegeben.

**) De la Gournerie, *Recherches sur les surfaces réglées tétraédrales symétriques*, Paris 1867. In diesem Werke sind drei Abhandlungen vereinigt, die der Verfasser 1865 und 66 in dem Recueil des Savants étrangers veröffenlicht hatte.

***) Vgl. die in der vierten Fussnote S. 274 genannten Arbeiten.

†) Reye, *Die Geometrie der Lage*, Erste Abteilung Leipzig 1866, Zweite Abteilung Leipzig 1868.

sich der von Chasles und Plücker betrachteten Abbildung auf den Ebenenraum dualistisch gegenüberstellt. Die Untersuchung dieser Abbildung führt Reye zu mehreren neuen Ergebnissen. Er fand unter Anderem, dass die Axen aller Kegelschnitte auf einer Fläche zweiten Grades einen tetraedralen Complex bilden. Ganz besonders erwähnen wir aber einen Satz, der, wie wir annehmen, von Reye zuerst ausgesprochen wurde, den Satz nämlich, dass die Secanten einer Raumcurve dritter Ordnung einem tetraedralen Complex angehören. Von H. Müller*) wurde wohl zuerst (1869) ausdrücklich bemerkt, dass die Geraden dieses Complexes mit einem Tetraeder ein constantes Doppelverhältnis bilden.

Lie. Im Februar 1869 veröffentlichte Lie eine Deutung des Imaginären in der ebenen Geometrie**), die u. A. eine Abbildung des tetraedralen Complexes und des linearen Complexes auf den Punktraum lieferte. Im zweiten Teile dieses Werkes gedenken wir einen kurzen Bericht über diese wenig beachteten Untersuchungen zu geben, die von mehreren Gesichtspunkten aus Interesse darbieten. Insbesondere wurde Lie durch diese Betrachtungen zu einer Transformationstheorie der tetraedralen Complexe geführt, die in diesem Kapitel wiedergegeben wird.

§ 3. Über die Curven der tetraedralen Complexe.

Wie im ersten Paragraphen betrachten wir auch hier ein bestimmtes Tetraeder und einen zu diesem Tetraeder gehörigen tetraedralen Complex. Dabei können wir, wie schon früher bemerkt wurde, ohne wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit das Tetraeder aus den drei Coordinatenebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ und der unendlich fernen Ebene zusammensetzen. Insbesondere sollen jetzt die *Curven des Complexes* untersucht werden, die *Curven* also, *deren Tangenten ein constantes Doppelverhältnis mit dem Tetraeder bestimmen****).

Curven des Complexes.

Die Monge'sche Gleichung des tetraedralen Complexes hat die in § 1 unter (7) (S. 318) aufgestellte Form:

$$(10) \qquad (b - c)\, x\, dy\, dz + (c - a)\, y\, dz\, dx + (a - b)\, z\, dx\, dy = 0,$$

die wir auch so schreiben können:

$$(10') \qquad (b - c) \frac{dy}{y} \frac{dz}{z} + (c - a) \frac{dz}{z} \frac{dx}{x} + (a - b) \frac{dx}{x} \frac{dy}{y} = 0.$$

Anscheinend treten hierin drei Constanten auf, aber es ist, wie wir wissen (vgl. S. 319), nur die eine

$$\varkappa = \frac{a - c}{b - c}$$

---

*) H. Müller, *Zur Geometrie auf den Flächen zweiter Ordnung*, Math. Ann. 1. Bd. (1869), S. 414.

**) *Repräsentation der Imaginären in der Plangeometrie.* Verh. d. Ges. d. Wiss., Christiania 1869, S. 16 u. 107.

***) Die Entwickelungen dieses Paragraphen rühren von Lie her. Vgl. Göttinger Nachr., Jan. 1870.

wesentlich, die den Wert des Doppelverhältnisses aller Complexgeraden gegenüber dem Tetraeder angiebt. Die Curven des Complexes sind die Integralcurven der Monge'schen Gleichung (10) oder (10').

Um nun die Integralcurven der Monge'schen Gleichung (10') zu finden, gehen wir davon aus, dass die Coordinaten x, y, z längs einer Integralcurve Functionen eines Parameters t sein werden. Dabei kann anstelle des Parameters t auch irgend eine Function von t als Parameter eingeführt werden. Im allgemeinen wird längs der Integralcurve auch Integrat. d. Monge'schen Gleichg.

$$\frac{dx}{x} : \frac{dy}{y} \tag{11}$$

veränderlich, d. h. eine Function von t sein, und wir können dann den Parameter t so wählen, dass

$$\frac{dx}{x} : \frac{dy}{y} = \frac{1}{a+t} : \frac{1}{b+t}$$

wird. Der Ausnahmefall, dass das Verhältnis (11) längs der Curve constant ist, soll nachher besonders besprochen werden. Unsere Proportion liefert nun nach (10') sofort:

$$\frac{dx}{x} : \frac{dy}{y} : \frac{dz}{z} = \frac{1}{a+t} : \frac{1}{b+t} : \frac{1}{c+t}. \tag{12}$$

Längs der Integralcurve werden also Gleichungen erfüllt sein von der Form:

$$\frac{dx}{x} = \frac{F(t)}{a+t}, \quad \frac{dy}{y} = \frac{F(t)}{b+t}, \quad \frac{dz}{z} = \frac{F(t)}{c+t},$$

wobei die Function $F(t)$ für jede einzelne Integralcurve eine bestimmte ist. Da nun diese Gleichungen immer die Monge'sche Gleichung (10') nach sich ziehen, welche Form auch die Function $F(t)$ haben mag, so ergiebt sich durch Integration die allgemeine Darstellung aller Integralcurven, längs deren das Verhältnis (11) nicht constant ist, in der Form: Glgn. d. allg. Complex-curve.

$$\log x = \int \frac{F(t)\,dt}{a+t}, \quad \log y = \int \frac{F(t)\,dt}{b+t}, \quad \log z = \int \frac{F(t)\,dt}{c+t}. \tag{13}$$

Wählen wir z. B. $F(t) \equiv 1$, so ergiebt sich:

$$x = \lambda(a+t), \quad y = \mu(b+t), \quad z = \nu(c+t),$$

wobei λ, μ, ν willkürliche Constanten sind. Diese Gleichungen stellen die ∞^3 Geraden des Complexes dar, die wir in § 1 durch die Formel (2), S. 315, in anderer Weise analytisch bestimmt haben.

Betrachten wir jetzt den Ausnahmefall, dass längs einer Integralcurve das Verhältnis (11) constant ist. In diesem Falle folgt aus der Ausnahmefall.

Monge'schen Gleichung (10') sofort, dass die Verhältnisse der *drei* Grössen $\frac{dx}{x}, \frac{dy}{y}, \frac{dz}{z}$ längs der Curve constant sind. Wir setzen daher:

$$\frac{dx}{x} : \frac{dy}{y} : \frac{dz}{z} = \frac{1}{\alpha} : \frac{1}{\beta} : \frac{1}{\gamma}. \tag{14}$$

Hierin sind α, β, γ solche Constanten, die infolge von (10') nur an die eine Relation

$$(b-c)\,\alpha + (c-a)\,\beta + (a-b)\,\gamma = 0 \tag{15}$$

gebunden sind. Aus (14) folgt durch Integration sofort:

$$x^\alpha : y^\beta : z^\gamma = A : B : C, \tag{16}$$

wenn A, B, C beliebige Constanten bedeuten. Diese Proportion giebt, wenn wir die Constanten $A, B, C, \alpha, \beta, \gamma$ allgemein wählen, vorausgesetzt, dass die Gleichung (15) erfüllt ist, die allgemeinste Curve des Complexes, längs deren das Verhältnis (11) constant ist. —

Nach Satz 2 des § 1 (S. 319) gestattet der tetraedrale Complex und insbesondere seine Monge'sche Gleichung (10) die ∞^3 projectiven Transformationen:

$$x_1 = \lambda x, \quad y_1 = \mu y, \quad z_1 = \nu z, \tag{17}$$

die eine einfach transitive Gruppe von vertauschbaren Transformationen bilden. Durch diese Transformationen werden mit den Punkten (x, y, z) zugleich auch die ∞^5 *Linienelemente* $(x, y, z, dx : dy : dz)$ des Raumes unter einander vertauscht. Jedes Linienelement geht dabei in ∞^3 Linienelemente über. Es ist leicht einzusehen, dass die Schar dieser ∞^3 Linienelemente bei allen ∞^3 projectiven Transformationen (17) *invariant* bleibt. In der That, sind S und T zwei Transformationen von der Form (17) und geht das Linienelement l vermöge S in l_1 über:

Trf. d. Linienelemente.

$$(l)\, S = (l_1),$$

geht ferner das Element l_1 vermöge T in das Element l_2 über:

$$(l_1)\, T = (l_2),$$

so ist

$$(l)\, ST = (l_1)\, T = (l_2).$$

Die Aufeinanderfolge ST ist aber einer einzigen Transformation S' der Schar (17) äquivalent, da diese Schar eine Gruppe ist. Mithin giebt es stets eine Transformation S' der Schar (17), bei der

$$(l)\, S' = (l_2)$$

ist. l_2 gehört demnach — wie l_1 — zu den ∞^3 Linienelementen, in die das Element l vermöge der ∞^3 Transformationen (17) übergeht. Anders ausgesprochen: Wenn man auf die Schar dieser ∞^3 Linienelemente irgend eine Transformation T der Gruppe (17) ausübt, so wird die Schar der ∞^3 Elemente in sich transformiert. Die Schar bleibt also bei der Gruppe (17) invariant.

Die Gesamtheit aller ∞^5 Linienelemente des Raumes zerlegt sich also in ∞^2 Scharen von je ∞^3 Linienelementen von der Beschaffenheit, dass die ∞^3 Transformationen (17) jede Schar für sich invariant lassen. Wir sagen, dass die Linienelemente einer solchen Schar, also alle Linienelemente, die aus einem vermöge der Gruppe (17) hervorgehen, von derselben *Gattung* sind. Gattung d. Linienel.

Um die mit den Punkttransformationen (17) verknüpften Transformationen der Linienelemente $(x, y, z, dx : dy : dz)$ analytisch darzustellen, haben wir aus (17) noch die Gleichungen abzuleiten:

$$dx_1 = \lambda\, dx, \quad dy_1 = \mu\, dy, \quad dz_1 = \nu\, dz,$$

sodass folgt:

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx}{x}, \quad \frac{dy_1}{y_1} = \frac{dy}{y}, \quad \frac{dz_1}{z_1} = \frac{dz}{z}. \tag{18}$$

Da es unter den Transformationen (17) stets eine giebt, die den allgemein gewählten Punkt (x, y, z) in den allgemein gewählten Punkt (x_1, y_1, z_1) überführt, und da es bei den Linienelementen nur auf die Verhältnisse von dx, dy, dz ankommt, so folgt also:

Zwei Linienelemente $(x, y, z, dx : dy : dz)$ *und* $(x_1, y_1, z_1, dx_1 : dy_1 : dz_1)$ *sind dann und nur dann von derselben Gattung, wenn*

$$\frac{dx}{x} : \frac{dy}{y} : \frac{dz}{z} = \frac{dx_1}{x_1} : \frac{dy_1}{y_1} : \frac{dz_1}{z_1} \tag{19}$$

ist.

Wir kennen eine Schar von ∞^4 Linienelementen, die bei allen Transformationen (17) invariant bleibt, nämlich die Schar aller Linienelemente der invarianten Monge'schen Gleichung (10). Diese Schar zerfällt nach dem Vorhergehenden in ∞^1 invariante Scharen von je ∞^3 Elementen gleicher Gattung.

Nun aber können wir die ∞^4 Linienelemente $(x, y, z, dx : dy : dz)$, die den Integralcurven angehören, bei Einführung eines Parameters t durch die Proportion (12) definieren. Da nach (18) die Verhältnisse von $\frac{dx}{x}, \frac{dy}{y}, \frac{dz}{z}$ bei den ∞^3 projectiven Transformationen (17) ungeändert bleiben, so folgt, dass unter den ∞^4 Linienelementen, die durch die Proportion (12) definiert sind, diejenigen Elemente, die gleiche Gattung haben, zu gleichen Werten des Parameters t gehören.

t als Coord. d. Gattung. *Wir können daher den Parameter t als Bestimmungsgrösse der* G a t t u n g *eines solchen Linienelementes auffassen, das der Monge'schen Gleichung* (10) *genügt.*

Geom. Deutung von t. Hieraus folgt weiter, dass der Parameter t eine *geometrische Bedeutung* haben muss. Es sei nämlich P der Punkt (x, y, z) eines Linienelementes $(x, y, z, dx : dy : dz)$, dessen Gerade g eine Gerade des Complexes ist, und es seien A, B, C, D die Schnittpunkte der Geraden g mit den Tetraederebenen. Geht nun das betrachtete Linienelement bei einer projectiven Transformation (17) in ein neues Element $(x_1, y_1, z_1, dx_1 : dy_1 : dz_1)$ über, dessen Punkt P_1 sei und dessen Gerade g_1 die Tetraederebenen in A_1, B_1, C_1, D_1 treffe, so sind beide Linienelemente von derselben Gattung, sodass t für beide denselben Wert hat, und es sind die Doppelverhältnisse, die sich zwischen den fünf Punkten P, A, B, C, D bilden lassen, gleich den Doppelverhältnissen, die sich in analoger Weise zwischen den fünf Punkten P_1, A_1, B_1, C_1, D_1 bilden lassen. Insbesondere ist $(ABCD) = (A_1 B_1 C_1 D_1) = \varkappa$. Die übrigen Doppelverhältnisse werden Functionen von t allein sein. Um dies auch analytisch zu verificieren, beachten wir, dass das Linienelement $(x, y, z, dx : dy : dz)$ auf der Geraden:

$$\frac{\mathfrak{x} - x}{dx} = \frac{\mathfrak{y} - y}{dy} = \frac{\mathfrak{z} - z}{dz}$$

oder nach (12) auf der Geraden:

$$\frac{(a + t)(\mathfrak{x} - x)}{x} = \frac{(b + t)(\mathfrak{y} - y)}{y} = \frac{(c + t)(\mathfrak{z} - z)}{z}$$

mit den laufenden Coordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ liegt. Diese Gerade lässt sich durch Einführung einer Hülfsveränderlichen τ auch so darstellen:

$$\mathfrak{x} = x - \frac{\tau x}{a + t}, \quad \mathfrak{y} = y - \frac{\tau y}{b + t}, \quad \mathfrak{z} = z - \frac{\tau z}{c + t}.$$

Dabei geben die Werte:

$$\tau = 0, \quad \tau = a + t, \quad \tau = b + t, \quad \tau = c + t, \quad \tau = \infty$$

die Punkte P, A, B, C, D der Geraden. Bilden wir aus P und dreien der Punkte A, B, C, D ein Doppelverhältnis, so erhalten wir eine linear gebrochene Function von t allein. —

Den Gattungsbegriff können wir auch auf *Curven* ausdehnen. Liegt eine Curve im Raume (x, y, z) vor, so wird sie durch die ∞^3 projectiven Transformationen (17) in höchstens ∞^3 Curven übergeführt. Dass die Schar dieser Curven alsdann bei allen Transformationen (17) invariant bleibt, lässt sich genau so beweisen wie der obige entsprechende

Satz für die Linienelemente (vgl. S. 328). Wir sagen, dass diese Curven von derselben *Gattung* sind. Gattung d. Curven.

Wenn eine Curve analytisch in der Form vorliegt:

$$\log x = \varphi(t), \quad \log y = \psi(t), \quad \log z = \chi(t),$$

so wird sie durch die ∞^3 Transformationen (17) in die Curven

$$(20) \quad \log x = \varphi(t) + \text{Const.}, \quad \log y = \psi(t) + \text{Const.}, \quad \log z = \chi(t) + \text{Const.}$$

übergeführt. Diese Gleichungen (20) definieren also eine allgemeine Schar von Curven gleicher Gattung.

Betrachten wir nun eine *Curve des Complexes*. Sie wird durch die Transformationen (17) in höchstens ∞^3 Curven übergeführt, die ebenfalls Curven des Complexes sind, weil die Transformationen (17) die Monge'sche Gleichung (10) invariant lassen. Diese Curven bilden eine Schar von Curven derselben Gattung. So bilden z. B. alle ∞^3 Complexgeraden nach Satz 1 des § 1 (S. 317) eine Schar von Curven gleicher Gattung. Gattung einer Curve d. Compl.

Oben haben sich zwei verschiedene Kategorien von Curven des Complexes ergeben. Die erste Kategorie wird durch die Gleichungen (13) dargestellt. Aus den Formeln (20) folgt sofort, dass sich aus einer Curve des Complexes

$$(13) \quad \log x = \int \frac{F(t)\,dt}{a+t}, \quad \log y = \int \frac{F(t)\,dt}{b+t}, \quad \log z = \int \frac{F(t)\,dt}{c+t}$$

die Curven derselben Gattung durch Addieren willkürlicher Constanten ergeben. Solche additive Constanten treten aber dadurch in vorstehenden Gleichungen zu Tage, dass man die Integrale unbestimmt lässt. Daraus folgt, dass die Gleichungen (13), sobald darin $F(t)$ bestimmt gewählt wird und die Integrationsconstanten unbestimmt gelassen werden, alle Complexcurven einer bestimmten Gattung darstellen. Offenbar sind dies gerade ∞^3 verschiedene Curven. *Die Function $F(t)$ ist daher charakteristisch für die Gattung einer Complexcurve* (13). $F(t)$ charakt. f. d. Gattg. d. Curve.

Die Annahme $F(t) \equiv 1$ liefert, wie wir wissen, alle *Complexgeraden*. Specialfälle.

Die Annahme

$$F(t) \equiv 2$$

liefert die folgenden Complexcurven gleicher Gattung:

$$(21) \qquad x = \lambda(a+t)^2, \quad y = \mu(b+t)^2, \quad z = \nu(c+t)^2.$$

Hierbei sind λ, μ, ν willkürliche Constanten. Es sind dies ∞^3 *Kegelschnitte*. Andererseits leuchtet ein, dass es gerade ∞^3 Kegelschnitte giebt, die Complexcurven sind. Denn jeder Kegelschnitt liegt in einer Kegelschnitte.

Ebene. Die in einer Ebene gelegenen Complexgeraden umhüllen aber den in § 1, S. 314, besprochenen Kegelschnitt k.

Complexkegel. Die Annahme $F \equiv 0$ liefert für x, y, z constante Werte, ergiebt daher einen Punkt. In diesem Fall also sind die ∞^1 Tangenten der Complexcurve in alle Complexgeraden durch einen Punkt übergegangen. Wir sagen daher, dass $F \equiv 0$ einen *Complexkegel* liefert. Es ist dies das Gebilde, das zu einem Complexkegelschnitt, der durch die Annahme $F \equiv 2$ hervorgeht, dualistisch ist.

Setzen wir

$$F(t) \equiv -1,$$

Curven 3. O. so gehen *Complexcurven von dritter Ordnung und Classe* und von gleicher Gattung hervor:

$$x = \frac{\lambda}{a+t}, \quad y = \frac{\mu}{b+t}, \quad z = \frac{\nu}{c+t}.$$

Für die Parameterwerte $t = -a, -b, -c, \infty$ ergiebt sich jedesmal eine Tetraederecke. Diese ∞^3 Curven dritter Ordnung gehen also durch alle vier Tetraederecken. Wir kommen im nächsten Paragraphen auf diese Curven zurück.

Da der Complex auf ∞^3 Arten zu sich selbst dualistisch ist (vgl. § 1, S. 314), so ist es von vornherein klar*), dass es auch ∞^3 *Complexcurven dritter Ordnung und Classe* giebt, welche die Ebenen des Tetraeders berühren. In der That, setzen wir

$$F(t) \equiv 3,$$

so kommt die Schar von ∞^3 Complexcurven gleicher Gattung:

$$x = \lambda(a+t)^3, \quad y = \mu(b+t)^3, \quad z = \nu(c+t)^3.$$

Dies sind Curven dritter Ordnung, welche die Ebenen des Tetraeders in den Punkten berühren, die den Parameterwerten $t = -a, -b, -c, \infty$ entsprechen.

Die Annahme

$$F(t) \equiv -2$$

giebt die ∞^3 *Complexcurven sechster Ordnung:*

$$x = \frac{\lambda}{(a+t)^2}, \quad y = \frac{\mu}{(b+t)^2}, \quad z = \frac{\nu}{(c+t)^2}.$$

Setzen wir überhaupt:

$$F(t) \equiv \frac{1}{m},$$

---

*) Beiläufig sei bemerkt, dass bei diesen dualistischen Transformationen überhaupt Gattung in Gattung und insbesondere die durch $F(t)$ charakterisierte Gattung in die durch die Function $2 - F(t)$ charakterisierte Gattung übergeht.

wobei m eine Constante bedeute, so ergeben sich die ∞^3 Complexcurven gleicher Gattung:

$$x = \lambda(a+t)^{\frac{1}{m}}, \quad y = \mu(b+t)^{\frac{1}{m}}, \quad z = \nu(c+t)^{\frac{1}{m}},$$

die sich auch so darstellen lassen:

$$(22) \qquad x^m = \lambda^m(a+t), \quad y^m = \mu^m(b+t), \quad z^m = \nu^m(c+t).$$

Dabei sind λ, μ, ν willkürliche Constanten. Jede solche Curve lässt sich auch durch zwei in x^m, y^m, z^m lineare Gleichungen ausdrücken:

$$Ax^m + By^m + Cz^m + D = 0, \quad \mathfrak{A}x^m + \mathfrak{B}y^m + \mathfrak{C}z^m + \mathfrak{D} = 0.$$

Curven von dieser Beschaffenheit hat De la Gournerie als *tetraedral-symmetrische Curven* bezeichnet*). Insbesondere giebt die Annahme $m = 2$ *Curven vierter Ordnung* als Schnitte von Flächen zweiter Ordnung, die das Tetraeder zum Polartetraeder haben. **Tetraedral-symm. Curven.**

Bisher haben wir nur die durch die Formeln (13) dargestellte Kategorie von Curven des Complexes betrachtet. Diese Kategorie zerfällt in unendlich viele invariante Scharen von je ∞^3 Curven gleicher Gattung. Es ergaben sich aber in den Formeln (15), (16) Complexcurven anderer Art. Für diese Complexcurven ist das Verhältnis (11) constant, d. h. die ∞^1 Linienelemente einer derartigen Curve gehören sämtlich derselben Gattung an. Allgemein fanden wir, dass eine Curve, *die aus lauter Linienelementen derselben Gattung besteht,* durch die Formel (16) gegeben wird. **Ausnahmefall.**

Wenn andererseits auf eine Curve alle ∞^3 Transformationen (17) ausgeübt werden, so kann sie unter Umständen in weniger als ∞^3 Curven übergehen, *indem sie bei ∞^1 Transformationen* (17) *invariant bleibt.* Diese ∞^1 Transformationen führen jedes Linienelement der Curve in ein Linienelement der Curve über, das dieselbe Gattung hat. Die in Rede stehenden Curven gehören also zu den durch die Formel (16) gegebenen. In der That erhellt auch sofort, dass die Curve: **Curven, die ∞^1 proj. Trf. gestatten.**

$$(16) \qquad x^\alpha : y^\beta : z^\gamma = A : B : C$$

die ∞^1 projectiven Transformationen:

$$(23) \qquad x_1 = \sqrt[\alpha]{\varrho}\, x, \quad y_1 = \sqrt[\beta]{\varrho}\, y, \quad z_1 = \sqrt[\gamma]{\varrho}\, z$$

gestattet, wenn ϱ eine beliebige Constante bedeutet. Jede Curve (16) also gehört einer Schar von nur ∞^2 Curven gleicher Gattung an, die sich ergeben, wenn α, β, γ festgehalten werden, während A, B, C beliebige constante Werte annehmen. Insbesondere gehören hierzu die durch (15) und (16) definierten Complexcurven der zweiten Kategorie.

*) Vgl. die zweite Fussnote S. 325.

Wählen wir ϱ in (23) unendlich wenig von Eins verschieden, so giebt (23) eine *infinitesimale* Transformation. Die Curven (16) können also als diejenigen *Curven* definiert werden, *die eine solche infinitesimale projective Transformation zulassen, bei der das Tetraeder invariant bleibt.* In der That ist allgemein

Curven, die eine inf. proj. Trf. gestatten.

$$\delta x = \frac{x}{\alpha}\,\delta t, \quad \delta y = \frac{y}{\beta}\,\delta t, \quad \delta z = \frac{z}{\gamma}\,\delta t$$

eine solche infinitesimale Transformation, und eine Curve, die durch diese Transformation in sich übergeführt wird, muss so beschaffen sein, dass längs der Curve:

$$dx : dy : dz = \frac{x}{\alpha} : \frac{y}{\beta} : \frac{z}{\gamma}$$

wird. Dies giebt integriert gerade die Curven (16).

Da die Gleichungen (16), sobald darin A, B, C willkürlich sind, gerade ∞^2 Curven darstellen, so folgt, dass es keine Curve giebt, die ∞^2 projective Transformationen (17) gestattet, denn eine solche Curve müsste zu den soeben bestimmten gehören und es dürfte nur ∞^1 Curven derselben Gattung geben.

Schliesslich können wir den Gattungsbegriff auch auf *Flächen* ausdehnen. Eine Fläche geht bei den ∞^3 projectiven Transformationen (17) in höchstens ∞^3 Flächen über. Die Schar dieser Flächen ist wieder, wie leicht analog dem Entsprechenden bei den Linienelementen (S. 328) zu beweisen ist, invariant gegenüber allen ∞^3 Transformationen (17). Wir bezeichnen diese Flächen als *Flächen gleicher Gattung.* Insbesondere kann es vorkommen, dass eine Fläche bei den ∞^3 Transformationen (17) in nur ∞^2, ja sogar in nur ∞^1 Flächen übergeht.

Gattung d. Flächen.

Hierzu gehören insbesondere die Flächen:

$$x^\alpha y^\beta z^\gamma = \varrho \quad (\alpha, \beta, \gamma, \varrho = \text{Const.}). \tag{24}$$

Eine solche Fläche wird nämlich von der projectiven Transformation:

$$x_1 = \lambda x, \quad y_1 = \mu y, \quad z_1 = \nu z \tag{17}$$

in sich übergeführt, sobald

$$\lambda^\alpha \mu^\beta \nu^\gamma = 1$$

ist. Hierdurch werden λ, μ, ν an *eine* Bedingung gebunden. Jede Fläche (24) gestattet also ∞^2 unserer projectiven Transformationen. Zu ihrer Gattung gehören daher nur die ∞^1 Flächen, die durch die Gleichung

$$x^\alpha y^\beta z^\gamma = \text{Const.}$$

bei festen α, β, γ dargestellt werden. Insbesondere gestattet die Fläche

(24) diejenigen in der Gruppe (17) enthaltenen infinitesimalen Transformationen

$$\delta x = Ax\,\delta t, \quad \delta y = By\,\delta t, \quad \delta z = Cz\,\delta t,$$

bei denen

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = 0$$

ist. Diese ∞^1 infinitesimalen projectiven Transformationen sind aus den beiden von einander unabhängigen:

$$\delta x = (\beta - \gamma)\,x\,\delta t, \quad \delta y = (\gamma - \alpha)\,y\,\delta t, \quad \delta z = (\alpha - \beta)\,z\,\delta t$$

und

$$\delta x = \beta\gamma(\beta - \gamma)\,x\,\delta t, \quad \delta y = \gamma\alpha(\gamma - \alpha)\,y\,\delta t, \quad \delta z = \alpha\beta(\alpha - \beta)\,z\,\delta t$$

linear ableitbar (vgl. S. 123).

§ 4. Einige Transformationen der Monge'schen Gleichung eines tetraedralen Complexes in sich*).

Liegt eine Monge'sche Gleichung vor: **Neue Veränderl. in Monge'scher Gleichg.**

(25) $$\Omega(x, y, z;\ dx, dy, dz) = 0$$

und führt man in sie neue Veränderliche $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ vermöge einer Transformation

(26) $$\mathfrak{x} = \mathfrak{X}(x, y, z), \quad \mathfrak{y} = \mathfrak{Y}(x, y, z), \quad \mathfrak{z} = \mathfrak{Z}(x, y, z)$$

ein, so ergiebt sich eine neue Monge'sche Gleichung

(27) $$\mathfrak{W}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z};\ d\mathfrak{x}, d\mathfrak{y}, d\mathfrak{z}) = 0.$$

Diese analytische Operation kann man in *zwei* Weisen deuten:

Zunächst kann man der Transformation (26) die Auffassung zu Grunde legen, dass die Punkte (x, y, z) durch die Gleichungen (26) auf ein neues, im allgemeinen krummliniges Coordinatensystem $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ im Raume bezogen werden. Alsdann ist die neue Monge'sche Gleichung (27) nur eine andere analytische Form der ursprünglichen Gleichung (25), indem die Coordinaten $x, y, z,\ dx : dy : dz$ der Linienelemente des Raumes (x, y, z) durch die Coordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z},\ d\mathfrak{x} : d\mathfrak{y} : d\mathfrak{z}$ desselben Linienelementes, aber bezogen auf ein allgemeines krummliniges Coordinatensystem im Raume, ersetzt worden sind. Bei dieser Auffassung ist es evident, dass die Linienelemente einer Curve, sobald sie die Gleichung $\Omega = 0$ erfüllen, auch die transformierte Gleichung $\mathfrak{W} = 0$ erfüllen, da ja beide Gleichungen dieselbe Schar von Linienelementen bestimmen. **Erste Deutung.**

*) Alle Entwickelungen dieses Paragraphen, die vor 1870 noch nicht bekannt waren (vgl. die geschichtliche Übersicht in § 2) rühren von Lie her; vgl. insbesondere Göttinger Nachrichten Jan. 1870, Math. Annalen 5. Bd. (1872) sowie Archiv for Math. og Naturv., Christiania, 4. Bd. (1879).

Zweite Deutung.

Die *zweite* Auffassung unserer analytischen Operation besteht darin, dass wir $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ als rechtwinklige Punktcoordinaten in einem neuen Raume deuten, sodass jeder Punkt (x, y, z) des ursprünglichen Raumes vermöge der Transformation (26) in einen Punkt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ des neuen Raumes abgebildet wird. Hierbei wird auch jedes Linienelement $(x, y, z, dx : dy : dz)$ des ursprünglichen Raumes als ein Linienelement $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, d\mathfrak{x} : d\mathfrak{y} : d\mathfrak{z})$ des neuen Raumes abgebildet und zwar vermöge des Gleichungensystems, das aus den drei Gleichungen (26) und den drei folgenden Gleichungen:

$$(28) \quad \begin{cases} d\mathfrak{x} = \mathfrak{X}_x\, dx + \mathfrak{X}_y\, dy + \mathfrak{X}_z\, dz, \quad d\mathfrak{y} = \mathfrak{Y}_x\, dx + \mathfrak{Y}_y\, dy + \mathfrak{Y}_z\, dz, \\ \qquad d\mathfrak{z} = \mathfrak{Z}_x\, dx + \mathfrak{Z}_y\, dy + \mathfrak{Z}_z\, dz \end{cases}$$

gebildet wird. Dabei gehen die Linienelemente, die einen bestimmten Punkt (x, y, z) gemein haben, in diejenigen Linienelemente des neuen Raumes über, die den zugeordneten Punkt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ gemein haben. Da die Gleichungen (28) linear und homogen in den Grössen dx, dy, dz und $d\mathfrak{x}, d\mathfrak{y}, d\mathfrak{z}$ sind, so erhellt, dass den ∞^2 durch den Punkt (x, y, z) gehenden Linienelementen des alten Raumes die ∞^2 durch den Punkt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ gehenden Linienelemente des neuen Raumes *projectiv* zugeordnet werden. Insbesondere geht also jeder *Kegel* von Linienelementen des Raumes (x, y, z) in einen Kegel von Linienelementen des Raumes $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ in der Weise über, dass beide Kegel von gleicher Ordnung sind.

Diejenigen ∞^4 Linienelemente, die der Monge'schen Gleichung (25) genügen, werden in die ∞^4 Linienelemente des neuen Raumes verwandelt, die der Monge'schen Gleichung (27) genügen. Die Elementarkegel der ersteren Gleichung gehen in Elementarkegel der letzteren über. *Sind die Elementarkegel der Monge'schen Gleichung* (25) *algebraisch von n^{ter} Ordnung, so gilt dasselbe von den Elementarkegeln der neuen Monge'schen Gleichung* (27). Es bedarf keiner grösseren Auseinandersetzung, dass die Linienelemente einer Curve im Raume (x, y, z) in solche Linienelemente übergeführt werden, die im neuen Raume $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ ebenfalls einer Curve angehören, d. h. *dass jede Integralcurve der Monge'schen Gleichung* (25) *vermöge der Transformation* (26) *in eine Integralcurve der Monge'schen Gleichung* (27) *verwandelt wird.* Es beruht dies darauf, dass Linienelemente vereinigter Lage vermöge der Transformation (26), (28) wieder in solche vereinigter Lage übergehen. Es kann aber auch dadurch begründet werden, dass unsere *analytische* Operation in der früher angegebenen ersten Weise begrifflich aufgefasst wird, wodurch alles selbstverständlich wird.

Insbesondere kann es eintreten, dass die neue Monge'sche Gleichung

(27) in $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, d\mathfrak{x} : d\mathfrak{y} : d\mathfrak{z}$ genau dieselbe Form hat wie die alte in $x, y, z, dx : dy : dz$ oder wenigstens auf diese Form gebracht werden kann, dass also mit anderen Worten die neue Monge'sche Gleichung (27) im Raume $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ dieselben Linienelemente bestimmt wie die alte Monge'sche Gleichung (25) im Raume (x, y, z). Alsdann wird es naturgemäss sein, die beiden Räume, die wir bisher absichtlich getrennt gehalten haben, auf dasselbe rechtwinklige Coordinatensystem zu beziehen. In diesem Falle wird die Transformation (26), (28) alle Linienelemente der Monge'schen Gleichung (25) unter einander transformieren und daher jede Integralcurve dieser Gleichung in eine ebensolche überführen. Wir sagen daher in diesem Falle, dass die Monge'sche Gleichung (25) durch die Punkttransformation (26) *in sich übergeführt wird* oder bei der Transformation *invariant bleibt* oder auch, dass diese Gleichung die Punkttransformation *gestattet.*

Nach diesen Vorbemerkungen wollen wir nun die Monge'sche Gleichung eines tetraedralen Complexes

$$(29) \qquad (b - c)\, x\, dy\, dz + (c - a)\, y\, dz\, dx + (a - b)\, z\, dx\, dy = 0$$

in diesem und dem nächsten Paragraphen einigen besonders wichtigen Punkttransformationen unterwerfen. Wir haben schon im ersten Paragraphen (S. 316) erkannt, dass die Gleichung (29) die ∞^3 *projectiven* Transformationen

$$\mathfrak{x} = \lambda x, \quad \mathfrak{y} = \mu y, \quad \mathfrak{z} = \nu z$$

gestattet, bei denen insbesondere jede Integral*gerade*, nämlich jede Gerade des tetraedralen Complexes, in eine ebensolche übergeht.

Wir werden nun noch andere *Punkttransformationen* betrachten, *welche die Monge'sche Gleichung* (29) *invariant lassen**). Es ist dabei zu beachten, dass eine solche Punkttransformation zwar jede Curve des Complexes in eine ebensolche überführt, dass sie jedoch die Complexgeraden im allgemeinen in krumme Curven des Complexes verwandeln wird. Die neuen Veränderlichen wollen wir bis auf weiteres nicht mit $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ bezeichnen, wie wir es oben thaten, sondern mit x_1, y_1, z_1, um die andere Bezeichnung für einen besonderen Zweck im nächsten Paragraphen zurückzubehalten. — Pkttrf., welche d. Monge'sche Gl. inv. lassen.

Die Punkttransformation

$$(30) \qquad x_1 = x^m, \quad y_1 = y^m, \quad z_1 = z^m$$

*) An dieser Stelle finden wir es nicht nötig, die *allgemeinste* Punkttransformation anzugeben, die unsere Monge'sche Gleichung (29) invariant lässt. Implicite wird ihre Bestimmung später dadurch geleistet, dass unsere Monge'sche Gleichung auf eine Form gebracht wird, für welche die Bestimmung sofort geleistet werden kann. [Vgl. § 1 des 11. Kap.]

lässt die Monge'sche Gleichung (29) invariant. In der That folgt dies sofort daraus, dass die Monge'sche Gleichung (29) auch in der schon benutzten Form geschrieben werden kann:

$$(29') \qquad (b-c)\frac{dy}{y}\frac{dz}{z} + (c-a)\frac{dz}{z}\frac{dx}{x} + (a-b)\frac{dx}{x}\frac{dy}{y} = 0$$

und dass nach (30)

$$(31) \qquad \frac{dx_1}{x_1} = m\frac{dx}{x}, \quad \frac{dy_1}{y_1} = m\frac{dy}{y}, \quad \frac{dz_1}{z_1} = m\frac{dz}{z}$$

ist. Die Punkttransformation (30) führt somit jede Curve des tetraedralen Complexes in eine ebensolche über. Auch ist zu bemerken, dass sie die Monge'sche Gleichung (29) invariant lässt, *wie auch die Constanten a, b, c gewählt werden mögen.* Diese Bemerkung benutzen wir später.

Vermöge der Gleichungen (30) und (31) geht jedes Linienelement $(x, y, z, dx:dy:dz)$ in ein neues Linienelement $(x_1, y_1, z_1, dx_1:dy_1:dz_1)$ über. Da nun die Gattung eines Linienelementes nach § 3, S. 329, nur von den Verhältnissen der Grössen $\frac{dx}{x}, \frac{dy}{y}, \frac{dz}{z}$ abhängt, so zeigen die Gleichungen (31), *dass die Transformation* (30) *jedes Linienelement in ein Linienelement derselben Gattung verwandelt.*

Invar. d. Gattg. d. Linienelem.

Beziehg. zw. d. Trf. u. d. dreigl. proj. Gruppe.

Die Transformation (30) hat noch eine andere bemerkenswerte Eigenschaft. Um sie abzuleiten, wollen wir die Transformation (30) mit T bezeichnen, während wir die Transformationen der dreigliedrigen projectiven Gruppe

$$(32) \qquad x_1 = \lambda x, \quad y_1 = \mu y, \quad z_1 = \nu z$$

durch die Zeichen $S_1, S_2, S', S'' \ldots$ ausdrücken. Wenn wir nach einer Transformation (32) oder S_i die Transformation (30) oder T ausüben, so finden wir, dass ihre Aufeinanderfolge der Transformation

$$x_2 = \lambda^m x^m, \quad y_2 = \mu^m y^m, \quad z_2 = \nu^m z^m$$

äquivalent ist. Genau dieselbe Transformation ergiebt sich, wenn wir zuerst T und darauf die Transformation

$$x_1 = \lambda^m x, \quad y_1 = \mu^m y, \quad z_1 = \nu^m z$$

ausführen. Die letzteren Gleichungen aber stellen wieder eine Transformation der dreigliedrigen projectiven Gruppe, sagen wir S_i', dar. Es ist also, symbolisch ausgedrückt:

$$(33) \qquad S_i T = T S_i'.$$

In Worten: Die ∞^3 projectiven Transformationen der Gruppe (32) sind einander zu je zweien, S_i, S_i', derart zugeordnet, dass die Aufeinanderfolge von S_i und T dasselbe liefert wie die Aufeinanderfolge von T und S_i'.

Bezeichnen wir die zu T inverse Transformation

$$x_1 = x^{\frac{1}{m}}, \quad y_1 = y^{\frac{1}{m}}, \quad z_1 = z^{\frac{1}{m}}$$

mit T^{-1}, so giebt die Multiplication der symbolischen Gleichung (33) mit T^{-1} als erstem Factor sofort:

$$T^{-1} S_i T = S_i',$$

und diese Formel ist mit der Formel (33) gleichwertig*).

Wir wenden das Ergebnis in dieser Weise an: Es sei c irgend eine Curve im Raume. Dann giebt es, wie wir wissen (vgl. S. 331), höchstens ∞^3 Curven, die mit c die Gattung gemein haben. Diese Curven gehen durch Ausführung der Transformationen S_i auf c hervor, können also symbolisch durch

$$(c)\, S_1, \quad (c)\, S_2 \ldots$$

dargestellt werden. Diese Curven gehen ferner vermöge T über in die Curven

$$(c)\, S_1\, T, \quad (c)\, S_2\, T \ldots$$

oder nach (33) in die Curven

$$(c)\, T S_1', \quad (c)\, T S_2' \ldots .$$

Letztere Curven aber können auch so erhalten werden: Zuerst führen wir auf die Curve c die Transformation T aus, wodurch sie in die Curve $(c)\, T$ verwandelt wird. Alsdann wird diese Curve $(c)\, T$ vermöge der Transformationen S_1', $S_2' \ldots$ in die soeben erhaltenen unendlich vielen Curven verwandelt. Da die Transformationen S_1', $S_2' \ldots$ der Gruppe (32) angehören, so haben mithin alle erhaltenen Curven dieselbe Gattung wie die Curve $(c)\, T$. Aber diese Curve hat wohlbemerkt im allgemeinen eine andere Gattung als die Curve c. Es hat sich somit ergeben, *dass die Punkttransformation*

(30) $$x_1 = x^m, \quad y_1 = y^m, \quad z_1 = z^m$$

alle Curven gleicher Gattung in solche Curven überführt, die ebenfalls gleiche Gattung, aber im allgemeinen eine andere Gattung als die ursprünglichen Curven haben.

Durch diese Betrachtung ist zugleich bewiesen, dass dasselbe Ergebnis auch für die Transformationen $S_i T$, d. h. für die Transformationen Allgemeinere Trf. d. Monge'schen Gl in sich.

(34) $$x_1 = \lambda x^m, \quad y_1 = \mu y^m, \quad z_1 = \nu z^m$$

*) In der Sprache der Gruppentheorie sagt die letzte Formel aus, dass die dreigliedrige Gruppe (32) vermöge der Transformation T in sich übergeht, also invariant bleibt.

gilt, in denen λ, μ, ν von Null verschiedene Constanten bedeuten. Zugleich erhellt aus dem Früheren (S. 338), dass sie jedes Linienelement in ein Linienelement derselben Gattung verwandeln, sowie dass sie jede Monge'sche Gleichung (29) invariant lassen. Es folgt dies unmittelbar daraus, dass dieselben Sätze für die S_i und für T gelten.

Wir wollen die Transformation (34) direct auf eine Curve eines tetraedralen Complexes ausüben. Nach Formel (13) des § 3 (S. 327) lauten die Gleichungen einer solchen Curve im Allgemeinen:

$$\log x = \int \frac{F(t)}{a+t}\, dt, \quad \log y = \int \frac{F(t)}{b+t}\, dt, \quad \log z = \int \frac{F(t)}{c+t}\, dt,$$

und die Function $F(t)$ ist charakteristisch für ihre Gattung (nach S. 331). Vermöge der Transformation (34) verwandelt sich die vorgelegte Curve in die folgende Curve des Complexes:

$$\log x = \int \frac{m\,F(t)}{a+t}\, dt + \log \lambda, \quad \log y = \int \frac{m\,F(t)}{b+t}\, dt + \log \mu,$$
$$\log z = \int \frac{m\,F(t)}{c+t}\, dt + \log \nu.$$

Die additiven Constanten können fortgelassen werden wegen der auftretenden Integralzeichen, und die Gattung der erhaltenen Curve wird folglich durch $m\,F(t)$ charakterisiert.

Wir fassen die Ergebnisse zusammen in dem

Satz 3: *Die Punkttransformation*

$$x_1 = \lambda x^m, \quad y_1 = \mu y^m, \quad z_1 = \nu z^m$$

lässt eine jede unter den ∞^1 Monge'schen Gleichungen

$$(b - c)\, x\, dy\, dz + (c - a)\, y\, dz\, dx + (a - b)\, z\, dx\, dy = 0$$

einzeln invariant. Sie führt ferner jedes Linienelement in ein Linienelement derselben Gattung und andererseits alle Curven einer Gattung in Curven einer gewissen anderen Gattung über. Insbesondere verwandelt sie die Gattung $F(t)$ einer Integralcurve einer jener Monge'schen Gleichungen in die Gattung $m\,F(t)$ *).

Die Transformation (34) führt jede *Fläche* in eine neue Fläche über. Insbesondere geht die *Ebene e:*

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \tag{35}$$

*) Die einzigen Curven, deren Gattung bei *allen* Punkttransformationen von der Form (34) ungeändert bleibt, sind, wie man leicht sieht, die Curven

$$x^\alpha : y^\beta : z^\gamma = A : B : C,$$

die in § 3 mehrfach auftraten.

hervor, wenn die Transformation (34) auf die Fläche

$$(36) \qquad \lambda A x^m + \mu B y^m + \nu C z^m + D = 0$$

ausgeführt wird. Es ist dies eine Fläche, die de la Gournerie als *tetraedral-symmetrische Fläche* bezeichnet hat. Die Schnittcurve zweier solcher Flächen heisst eine *tetraedral-symmetrische Curve* (vgl. § 3, S. 333). Sie geht vermöge der Transformation (34) in eine *Gerade* über. Tetraedral-symmetr. Fl. u. Curven.

In jeder Ebene e liegen aber ∞^1 Geraden des tetraedralen Complexes, und sie umhüllen einen gewissen Kegelschnitt k (vgl. S. 319, Fig. 66). Diesen Geraden entsprechen vermöge der durch die Transformation (34) vermittelten Abbildung wieder Curven des tetraedralen Complexes. Wir erhalten folglich auf der Fläche (36) ∞^1 tetraedral-symmetrische Curven, deren Tangenten dem tetraedralen Complex angehören.

Bei der Transformation (34) geht der soeben erwähnte Kegelschnitt k, der ja auch eine Curve des Complexes ist, aus einer Curve des Complexes hervor, die auf der tetraedral-symmetrischen Fläche liegt. Da jeder Elementarkegel durch die Transformation (34) wieder in einen Elementarkegel verwandelt wird, und da die Ebene e längs des Kegelschnittes k von den zugehörigen Elementarkegeln nach den Tangenten berührt wird (vgl. S. 320), so folgt, dass die tetraedral-symmetrische Fläche längs der Curve, aus der der Kegelschnitt k vermöge der Transformation (34) hervorgeht, von den zugehörigen Complexkegeln berührt wird. Nach Satz 21 des § 5, 7. Kap., S. 303, sind somit die Tangentenebenen der tetraedral-symmetrischen Fläche längs der besprochenen Curve die Schmiegungsebenen dieser Curve. Also ist diese Curve eine *Haupttangentencurve* der tetraedral-symmetrischen Fläche. Haupttg.-curve d. Fläche.

Somit kennen wir eine Haupttangentencurve der tetraedral-symmetrischen Fläche (36). Aber factisch kennen wir alle. Denn es giebt ja ∞^1 tetraedrale Complexe zu demselben Tetraeder, und die Transformation (34), welche die tetraedral-symmetrische Fläche (36) in die Ebene (35) verwandelt, lässt die Monge'sche Gleichung eines jeden der ∞^1 Complexe invariant. Jeder Complex bestimmt nun in der Ebene e einen Kegelschnitt, und alle diese ∞^1 Kegelschnitte berühren vier feste Geraden, sodass durch jeden Punkt der Ebene e zwei der Kegelschnitte hindurchgehen (vgl. Fig. 67, S. 320). Alle diese ∞^1 Kegelschnitte gehen also vermöge der Transformation (34) aus den ∞^1 Haupttangentencurven der Fläche (36) hervor, und diese Curven überdecken die Fläche doppelt. Wir kennen also alle Haupttangentencurven der Fläche. Daher kommt

Satz 4: *Vermöge der Punkttransformation*

$$x_1 = \lambda x^m, \quad y_1 = \mu y^m, \quad z_1 = \nu z^m$$

wird die tetraedral-symmetrische Fläche

$$\lambda A x^m + \mu B y^m + \nu C z^m + D = 0$$

punktweis so auf die Ebene

$$A x_1 + B y_1 + C z_1 + D = 0$$

abgebildet, dass die Haupttangentencurven der tetraedral-symmetrischen Fläche in diejenigen ∞^1 Kegelschnitte der Ebene übergehen, die gewisse vier feste Geraden berühren. Jede Haupttangentencurve wird von ∞^1 auf der Fläche gelegenen tetraedral-symmetrischen Curven derselben Gattung umhüllt).*

Involut. Trf. Diese Transformation (34) ist insbesondere dann *involutorisch*, d. h. mit ihrer inversen identisch (vgl. S. 7), wenn $m = -1$ ist. Wir gelangen somit zu ∞^3 involutorischen Punkttransformationen:

$$x_1 = \frac{\lambda}{x}, \quad y_1 = \frac{\mu}{y}, \quad z_1 = \frac{\nu}{z}, \tag{37}$$

welche die Monge'sche Gleichung (29) invariant lassen. Erwähnt sei, dass die Transformationen (37) für alle Punkte des Raumes mit Ausnahme der Punkte der Tetraederebenen regulär und eindeutig sind. Die Punkte der Tetraederebene $x = 0$ z. B. gehen in die gegenüberliegende (im Coordinatensystem unendlich ferne) Tetraederecke über. So werden überhaupt alle Punkte einer Tetraederebene in die gegenüberliegende Tetraederecke übergeführt, während umgekehrt jede Ecke in alle Punkte der Gegenebene und jede Kante des Tetraeders in die Gegenkante übergeht.

Wir wollen die ∞^3 involutorischen Transformationen (37) mit $J_1, J_2 \dots$ bezeichnen. Dann wissen wir, dass sie aus den projectiven Transformationen $S_1, S_2 \dots$ sowie aus der einen bestimmten involutorischen Transformation:

$$x_1 = \frac{1}{x}, \quad y_1 = \frac{1}{y}, \quad z_1 = \frac{1}{z},$$

die etwa mit I bezeichnet werde, dadurch hervorgehen, dass man nach den $S_1, S_2 \dots$ die Transformation I ausübt (nach S. 338):

$$J_1 = S_1 I, \quad J_2 = S_2 I, \dots .$$

*) Dieser allgemeine Satz wurde von Lie in den oben citierten Abhandlungen abgeleitet. Schon früher hatte Gordan die Haupttangentencurven auf der *Steiner'schen Fläche vierter Ordnung*, die bei der speciellen Annahme $m = \frac{1}{2}$ hervorgeht (vgl. S. 355), bestimmt. Siehe Crelle's Journal 69. Bd. (1867), S. 11.

Da die ∞^3 projectiven Transformationen $S_1, S_2 \dots$ die Gattung von Curven ungeändert lassen, während I eine einzige ganz bestimmte Transformation ist, so folgt, dass *alle* ∞^3 involutorischen Transformationen $J_1, J_2 \dots$ *alle* Curven einer gegebenen Gattung in lauter Curven einer (im allgemeinen anderen) gemeinsamen Gattung verwandeln. Betrachten wir also z. B. eine Gattung von Curven, die aus ∞^3 verschiedenen Curven besteht, so ergiebt sich, dass diese ∞^3 Curven durch die ∞^3 Transformationen (37) nicht etwa, wie man zunächst vermuten könnte, in ∞^6 verschiedene Curven übergeführt werden, sondern wieder in nur ∞^3 Curven einer Gattung.

Ferner bemerken wir, dass es unter den involutorischen Transformationen $J_1, J_2 \dots$ stets eine giebt, die einen bestimmt gewählten Punkt p in einen anderen bestimmt gewählten Punkt q überführt, vorausgesetzt, dass die Punkte nicht auf Tetraederebenen liegen, analytisch ausgedrückt, dass ihre Coordinaten sämtlich endlich und von Null verschieden sind. Da diese Transformation involutorisch ist, so wird sie zugleich den Punkt q in den Punkt p überführen, also *die beiden Punkte p und q mit einander vertauschen.*

Also haben wir, wenn wir einige der in Satz 3 ausgesprochenen Ergebnisse mit den jetzigen zusammenstellen, den

Satz 5: *Die ∞^3 involutorischen Punkttransformationen*

$$x_1 = \frac{\lambda}{x}, \quad y_1 = \frac{\mu}{y}, \quad z_1 = \frac{\nu}{z}$$

lassen jede unter den ∞^1 Monge'schen Gleichungen

$$(b - c)\, x\, dy\, dz + (c - a)\, y\, dz\, dx + (a - b)\, z\, dx\, dy = 0$$

einzeln invariant. Sie führen jedes Linienelement in ein Linienelement derselben Gattung über. Alle ∞^3 Transformationen geben ausgeführt auf die ∞^3 (bez. ∞^2) Curven einer Gattung zusammen wieder nur ∞^3 (bez. ∞^2) Curven einer Gattung, die im allgemeinen von der ursprünglichen verschieden ist. Eine Integralcurve der obigen Monge'schen Gleichung von der Gattung $F(t)$ führen sie in eine Integralcurve derselben Gleichung und mit der Gattung $-F(t)$ über. Ferner giebt es unter diesen involutorischen Transformationen stets eine bestimmte, die zwei beliebig ausgewählte, aber nicht auf Tetraederebenen gelegene Punkte mit einander vertauscht.

Nunmehr wenden wir diese Eigenschaften der involutorischen Transformationen (37) an:

Insbesondere werden diese Transformationen die ∞^3 Geraden g eines der tetraedralen Complexe in gewisse ∞^3 Curven γ gemeinsamer Ausübung d. involut. Trfn. auf Geraden.

Gattung in demselben Complexe verwandeln. Da die Transformationen (37) involutorisch sind, so folgt, dass sie andererseits die ∞^3 Curven γ in die ∞^3 Complexgeraden g verwandeln.

Betrachten wir nun eine Gerade g des Complexes und zwei Punkte p, q auf ihr. Nach unserem Satze giebt es eine Transformation (37), die p mit q vertauscht. Sie wird andererseits g in eine Complexcurve γ verwandeln, und diese Curve γ muss daher auch durch p und q gehen. Umgekehrt wählen wir irgend eine der Curven γ aus und auf ihr zwei Punkte p, q. Es giebt eine involutorische Transformation, die p mit q vertauscht. Wir wissen aber, dass sie γ in eine Complexgerade g transformiert. Also geht diese Gerade g durch p und q.

Es hat sich demnach ergeben:

Satz 6: *In einem tetraedralen Complex giebt es eine Gattung von ∞^3 Curven γ des Complexes, die zu den ∞^3 Geraden g des Complexes in folgenden Beziehungen stehen:*

Durch zwei Punkte p, q einer Geraden g, die nicht in Tetraederebenen liegen, geht stets eine Curve γ.	*Durch zwei Punkte p, q einer Curve γ, die nicht in Tetraederebenen liegen, geht stets eine Complexgerade g.*

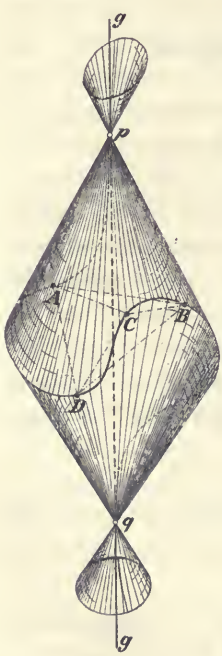

Fig. 68.

Alle Secanten einer Complexcurve γ gehören daher demselben tetraedralen Complex an wie γ.

Durch einen Punkt p gehen ∞^1 Complexgeraden g, die den Complexkegel des Punktes p bilden. Auf der anderen Seite gehen durch den Punkt auch ∞^1 Complexcurven γ, die also eine Fläche erzeugen. Da nach unserem Satze zwei Punkte, sobald sie auf einer Complexgeraden g liegen, auch auf einer Complexcurve γ gelegen sind, so folgt, dass die Fläche der γ mit der Fläche der g, also mit dem Complexkegel identisch ist. Dieser enthält mithin ausser den ∞^1 Complexgeraden g noch ∞^1 Complexcurven γ. Sonstige Complexcurven enthält er nicht, da eine Fläche von Curven des tetraedralen Complexes nur doppelt überdeckt wird (vgl. S. 251).

Haben zwei Complexkegel, deren Spitzen die Punkte p und q seien (siehe Fig. 68), eine Complexgerade g gemein, so haben sie auch die Complexcurve γ durch p und q gemein. Da ihr gesamtes Schnittgebilde vom vierten Grade ist, denn die Kegel sind vom zweiten, und da die Gerade pq dem Schnittgebilde angehört, so folgt, dass letzteres in eine Gerade und eine Curve dritten Grades zerfällt. Diese Curve kann nicht weiter zerfallen, da sonst beide Kegel mehr als eine Gerade gemein hätten. *Die Curve γ durch p und q ist mithin vom dritten Grade* *). Sie geht durch die Ecken A, B, C, D des Tetraeders, da beide Kegel die Ecken enthalten. Wir haben also gefunden:

Satz 7: *Jeder tetraedrale Complex hat ∞^3 Curven dritten Grades durch die Ecken des Tetraeders. Alle Secanten dieser Curven sind Geraden des Complexes.*

Ferner haben wir gesehen:

Satz 8: *Jeder Kegel des tetraedralen Complexes enthält ausser ∞^1 Complexgeraden nur noch ∞^1 Curven des Complexes, nämlich Curven dritten Grades, die durch alle vier Ecken des Tetraeders und durch die Kegelspitze gehen. Zwei Complexkegel, die eine Complexgerade gemein haben, schneiden einander ausserdem noch in einer dieser Curven dritten Grades.*

Führen wir irgend eine der involutorischen Transformationen (37) auf den Kegel aus, so geht seine Spitze in einen neuen Punkt über, während seine Curven γ in die ∞^1 Complexgeraden durch den neuen Punkt übergehen. Der Kegel wird also wieder in einen Complexkegel verwandelt. Daher:

Satz 9: *Jede der ∞^3 involutorischen Transformationen* Invarianz d. Schar d. Compl.-kegel.

$$x_1 = \frac{\lambda}{x}, \quad y_1 = \frac{\mu}{y}, \quad z_1 = \frac{\nu}{z}$$

führt jeden Kegel eines tetraedralen Complexes, dessen Tetraeder aus den Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ und der unendlich fernen Ebene besteht, in einen Kegel desselben Complexes über, indem sie die Geraden bez. Complexcurven dritten Grades des ersteren in die Complexcurven dritten Grades bez. Geraden des letzteren verwandelt **).

Wir fragen uns nun, ob es sonst noch Curven dritten Grades durch die Tetraederecken giebt, die einem tetraedralen Complex angehören. Offenbar müsste jede solche Curve doppelt gekrümmt sein. Beliebige Curve 3. Grades drch. die Ecken.

---

*) Dass die Curven γ vom dritten Grade sind, kann analytisch leicht verificiert werden: Die Complexgeraden haben die Gattung $F \equiv 1$, nach Satz 5 haben mithin die Curven γ die Gattung $F \equiv -1$ und sind deshalb Curven dritten Grades. (Vgl. § 3, S. 332.)

**) In der vorhergehenden Betrachtung machten wir eine specielle Anwendung von einem zwar einfachen, aber oft nützlichen allgemeinen Principe: Liegt irgend eine involutorische Transformation vor und stehen dabei zwei einander entsprechende Gebilde (hier zwei Punkte) in einer gewissen Beziehung, so stehen sie auch in der reciproken Beziehung.

Wir wollen also annehmen, es liege eine beliebige doppelt gekrümmte Curve von dritter Ordnung vor. Auf ihr wählen wir vier beliebige Punkte A, B, C, D und betrachten sie als die Ecken eines Tetraeders. Wenn wir nunmehr von einem Punkt p auf der Curve alle Secanten der Curve ziehen, so erhalten wir ∞^1 Geraden durch p, die bekanntlich einen Kegel zweiten Grades bilden. Insbesondere geht der Kegel durch die Tetraederecken A, B, C, D. Wir wissen andererseits, dass die ∞^1 tetraedralen Complexe, die zu dem ausgewählten Tetraeder gehören, im Punkte p ∞^1 Kegel zweiten Grades bestimmen und zwar *alle*, die durch die Ecken des Tetraeders gehen. Es giebt somit sicher einen tetraedralen Complex, der den erwähnten Secantenkegel von p aus zum Complexkegel hat.

Ist q ein anderer Punkt der Curve, so sehen wir analog, dass alle von q ausgehenden Secanten der Curve Geraden eines tetraedralen Complexes sind. Die von p ausgehenden Secanten schneiden also das Tetraeder in einem gewissen Doppelverhältnis und die von q ausgehenden Secanten ebenfalls. Aber die Gerade pq gehört zu beiden Secantenscharen. Mithin ist bei beiden das Doppelverhältnis dasselbe. Die von p und q ausgehenden Secanten gehören somit sämtlich demselben tetraedralen Complex an.

Unser Ergebnis ist also dies:

Satz 10: *Die Secanten einer doppelt gekrümmten Curve dritten Grades schneiden sämtlich ein Tetraeder, dessen Ecken beliebig auf der Curve gewählt sind, in demselben Doppelverhältnis.*

Das Doppelverhältnis wird aber bei verschiedener Wahl des Tetraeders ein verschiedenes sein.

Da der Satz insbesondere für die Tangenten der Curve gilt, so ist die Curve folglich eine Curve eines gewissen tetraedralen Complexes. Daher:

Satz 11: *Eine doppelt gekrümmte Curve dritten Grades ist stets Curve eines gewissen tetraedralen Complexes, dessen Tetraeder von vier beliebig gewählten Punkten der Curve gebildet wird.*

Nebenbei sei bemerkt, dass wir durch unsere Überlegungen leicht zu dem bekannten Ergebnis gelangen, *dass durch sechs Punkte stets eine und nur eine doppelt gekrümmte Curve dritter Ordnung hindurchgeht,* vorausgesetzt, dass vier der Punkte, A, B, C, D, ein wirkliches Tetraeder bilden und die beiden anderen Punkte, p, q, nicht in den Ebenen des Tetraeders liegen. Denn dann ist das Doppelverhältnis aller Secanten der Curve mit dem Tetraeder bestimmt durch das der Secante pq. Daher sind die Secantenkegel von p und q auch bekannt und mithin auch die Curve dritten Grades als ihr teilweiser Durchschnitt.

Es ist vielleicht nützlich, auch durch Ausrechnung zu verificieren, dass die ∞^3 involutorischen Transformationen (37) alle ∞^3 Geraden des tetraedralen Complexes in ∞^3 Curven dritten Grades durch die Ecken des Tetraeders verwandeln. Jede Gerade wird von den *Flächen dritter Ordnung* von der Form Analyt. Verification.

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{y} + \frac{C}{z} + D = 0$$

in *drei* Punkten getroffen. Vermöge einer involutorischen Transformation (37) geht diese Fläche in eine *Ebene*

$$\frac{A}{\lambda} x_1 + \frac{B}{\mu} y_1 + \frac{C}{\nu} z_1 + D = 0$$

über. Da die Transformation für Punkte, die nicht in den Tetraederebenen liegen, eindeutig ist, so folgt, dass die Curve, die aus der Geraden vermöge der Transformation hervorgeht, von jeder Ebene in drei Punkten geschnitten wird, also eine Curve dritten Grades ist.

Wir wissen ferner, dass alle die ∞^3 Geraden

(38) $$x = rz + \varrho, \quad y = sz + \sigma,$$

für die

(39) $$\frac{s\varrho}{r\sigma} = \varkappa$$

ist, einem bestimmten tetraedralen Complex angehören. (Siehe § 1, S. 315.) Vermöge der ∞^3 Transformationen

(37) $$x_1 = \frac{\lambda}{x}, \quad y_1 = \frac{\mu}{y}, \quad z_1 = \frac{\nu}{z}$$

gehen sie über in die Curven dritter Ordnung:

(40) $$x_1 = \frac{\lambda z_1}{\varrho z_1 + r\nu}, \quad y_1 = \frac{\mu z_1}{\sigma z_1 + s\nu}.$$

In diesen Gleichungen treten nun $\frac{\varrho}{\lambda}, \frac{\sigma}{\mu}, \frac{r\nu}{\lambda}, \frac{s\nu}{\mu}$ als willkürliche Constanten auf. Da aber nach (39) zwischen ihnen die Relation besteht:

$$\frac{\varrho}{\lambda} \cdot \frac{s\nu}{\mu} = \varkappa \cdot \frac{\sigma}{\mu} \cdot \frac{r\nu}{\lambda},$$

so stellen die Gleichungen (40) in der That nur ∞^3 Curven dritten Grades dar. —

Im Vorhergehenden richteten wir unser Augenmerk auf Complexkegel, also auf gewisse Flächen zweiten Grades, die durch die Tetraederecken gehen. Von jetzt ab wollen wir eine *beliebige Fläche zweiten Grades* $\mathfrak{F}$ *betrachten, welche die Ecken* A, B, C, D *des Tetraeders* Fläche 2. Gr. durch die Ecken.

enthält. Dabei setzen wir voraus, dass die Fläche keine Kegelfläche sei und nicht zerfalle.

Auf der Fläche $\mathfrak{F}$ wählen wir einen Punkt p beliebig unter der Voraussetzung, dass die durch ihn gehenden beiden geradlinigen Erzeugenden g, g' der Fläche keine der Tetraderecken A, B, C, D enthalten. (Siehe Fig. 69.) Der Punkt p ist dann die Spitze eines und nur eines Kegels zweiten Grades, der die Gerade g und die Geraden nach den Tetraederecken enthält. Dieser Kegel schneidet die Fläche $\mathfrak{F}$ in einem Gebilde vierten Grades. Weil die Gerade g dazu gehört, so wird das Schnittgebilde ausserdem aus einer Curve γ vom dritten Grade bestehen, die durch die Tetraederecken und durch p geht sowie die Gerade g noch einmal trifft. Die Curve γ zerfällt nicht, da sonst durch p eine Gerade gehen müsste, die auf der Fläche $\mathfrak{F}$ liegt und eine der Tetraederecken enthält, was durch unsere Voraussetzung ausgeschlossen wurde.

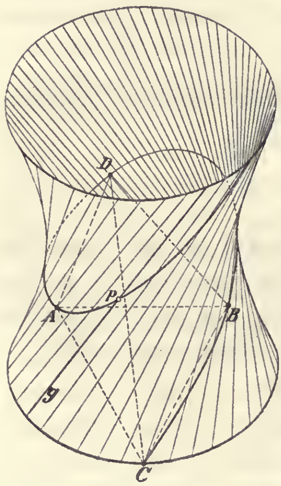

Fig. 69.

Nach Satz 10 schneiden alle Secanten der Curve γ das Tetraeder in einem constantem Doppelverhältnis $\varDelta$. Insbesondere gehört die Gerade g zu diesen Secanten.

Wählen wir nun auf der Curve γ irgend einen Punkt q, so wird der Secantenkegel, dessen Spitze in q liegt und der bekanntlich vom zweiten Grade ist, die Fläche $\mathfrak{F}$ in der Curve dritten Grades γ und also ausserdem noch in einer Geraden schneiden. Durch jeden Punkt q der Curve γ geht somit eine Erzeugende der Fläche, die das Doppelverhältniss $\varDelta$ mit dem Tetraeder bestimmt. Daraus schliessen wir, dass die Erzeugenden der einen Schar $g, g_1, g_2 \ldots$ einer Fläche zweiten Grades ein der Fläche eingeschriebenes Tetraeder A, B, C, D in einem constanten Doppelverhältnis $\varDelta$ schneiden. Dasselbe gilt natürlich von den Erzeugenden $g', g_1', g_2' \ldots$ der anderen Schar. Für diese wird das Doppelverhältnis auch einen gewissen constanten Wert $\varDelta'$ haben. Wir haben mithin erkannt:

Satz 12: *Die Erzeugenden der einen Schar sowie die der anderen Schar auf einer Fläche zweiten Grades schneiden ein beliebiges Tetraeder, sobald dessen Ecken auf der Fläche liegen, in je einem constanten Doppelverhältnis.*

Die Betrachtung, die wir oben für einen Punkt p der Geraden g anstellten, lässt sich für jeden Punkt p von g wiederholen. Die Fläche $\mathfrak{F}$

enthält demnach ∞^1 *Curven dritten Grades* $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 \dots$ durch die Tetraederecken, und diese Curven liegen so, dass ihre sämtlichen Secanten, zu denen die Geraden $g, g_1, g_2 \dots$ gehören, das Tetraeder in dem Doppelverhältnis Δ schneiden. Ebenso enthält die Fläche $\mathfrak{F}$ noch ∞^1 *Curven dritten Grades*, $\gamma', \gamma_1', \gamma_2' \dots$ durch die Tetraederecken, und die Secanten dieser Curven, zu denen $g', g_1', g_2' \dots$ gehören, schneiden das Tetraeder in dem Doppelverhältnis Δ'. Nach Satz 11 gehören die Geraden $g, g_1, g_2 \dots$ und die Curven $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 \dots$ einem bestimmten tetraedralen Complex an, ebenso die Geraden $g', g_1', g_2' \dots$ und die Curven $\gamma', \gamma_1', \gamma_2' \dots$ einem anderen. Zwei Scharen v. Curven 3. Gr. auf d. Fl.

Da eine Fläche zweiten Grades durch neun ihrer Punkte bestimmt ist, so giebt es ∞^5 Flächen $\mathfrak{F}$, welche die Ecken A, B, C, D des gegebenen Tetraeders enthalten. Nach Satz 12 bestimmen die Erzeugenden der einen Schar einer derartigen Fläche ein constantes Doppelverhältnis Δ und die der anderen ein constantes Doppelverhältnis Δ' mit dem Tetraeder. Wenn wir Δ und Δ' geben, so sind dies also zwei Bedingungen, sodass es gerade ∞^3 Flächen zweiten Grades von der verlangten Art giebt. Wir können dies auch so ausdrücken: Es giebt gerade ∞^3 Flächen zweiten Grades, auf denen die Ecken des gegebenen Tetraeders liegen und deren Erzeugende jeder Schar je einem bestimmt gewählten tetraedralen Complex angehören.

Da eine Fläche von den Curven eines tetraedralen Complexes immer nur doppelt überdeckt wird (vgl. S. 251), so ist es sicher, dass auf einer Fläche $\mathfrak{F}$ ausser den Geraden $g, g_1, g_2 \dots$ und Curven $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 \dots$ keine Curven des einen tetraedralen Complexes liegen, und Analoges gilt von den Geraden $g', g_1', g_2' \dots$ und Curven $\gamma', \gamma_1', \gamma_2' \dots$ bezüglich des zweiten Complexes.

Unterwerfen wir eine unter den ∞^3 Flächen $\mathfrak{F}$ einer der ∞^3 involutorischen Transformationen Invol. Trf. ausgef. auf die Flächen 2. Gr.

$$x_1 = \frac{\lambda}{x}, \quad y_1 = \frac{\mu}{y}, \quad z_1 = \frac{\nu}{z}. \tag{37}$$

Wie wir wissen (vgl. S. 344), gehen bei ihr die Curven dritten Grades $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 \dots$, die ja durch die Ecken des Tedraeders laufen und einem bestimmten tetraedralen Complex angehören, in ∞^1 Geraden, $\bar{g}, \bar{g}_1, \bar{g}_2, \dots$ dieses Complexes über. Analoges gilt von den Curven $\gamma', \gamma_1', \gamma_2' \dots$. Vermöge der Transformation (37) geht somit die Fläche $\mathfrak{F}$ in eine Fläche $\bar{\mathfrak{F}}$ über, die zwei Geradenscharen enthält, deren eine, $\bar{g}, \bar{g}_1, \bar{g}_2 \dots$, dem einen, deren andere, $\bar{g}', \bar{g}_1', \bar{g}_2' \dots$, dem anderen tetraedralen Complex angehört, d. h. in eine Fläche zweiten Grades, die auch zu jenen ∞^3 Flächen $\mathfrak{F}$ gehört, denn dass sie die Ecken des Tetraeders enthält, folgt daraus, dass die Gerade g z. B. in eine Curve dritten Grades durch die Ecken verwandelt wird. Wir haben daher gefunden:

Satz 13: *Die Schar der ∞^3 Flächen zweiten Grades, welche die Ecken des Tetraeders enthalten und deren beide Geradenscharen zwei bestimmten tetraedralen Complexen angehören, bleibt bei den ∞^3 involutorischen Transformationen*

$$x_1 = \frac{\lambda}{x}, \quad y_1 = \frac{\mu}{y}, \quad z_1 = \frac{\nu}{z}$$

invariant.

Ferner gehen bei unserer Transformation die Geraden $g, g_1, g_2 \ldots$ und $g', g_1', g_2' \ldots$ in Curven $\bar{\gamma}, \bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2 \ldots$ und $\bar{\gamma}', \bar{\gamma}_1', \bar{\gamma}_2' \ldots$ auf der Fläche $\overline{\mathfrak{F}}$ über, sodass die Geraden $\bar{g}, g_1, \bar{g}_2 \ldots$ und Curven $\bar{\gamma}, \bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2 \ldots$ die einzigen Curven sind, die der eine tetraedrale Complex auf der Fläche $\overline{\mathfrak{F}}$ bestimmt. Andererseits hätten wir direct für die Fläche $\overline{\mathfrak{F}}$ eben jene Betrachtung anstellen können, von der wir bei der Fläche $\mathfrak{F}$ ausgingen. Wir sehen folglich, dass der letzte Satz noch dahin ergänzt werden kann, dass die Geraden und Curven, die einer der beiden Complexe auf einer Fläche $\mathfrak{F}$ bestimmt, in die Curven und Geraden übergeführt werden, die er auf der neuen Fläche $\overline{\mathfrak{F}}$ bestimmt.

Fernerhin wissen wir, dass alle Geraden eines tetraedralen Complexes dieselbe Gattung haben (vgl. § 3, S. 331), sodass also die Geraden $g, g_1, g_2 \ldots$ von derselben Gattung sind. Da ausserdem Curven gleicher Gattung vermöge einer involutorischen Transformation (37) nach Satz 5 stets wieder in Curven gleicher Gattung verwandelt werden, so schliessen wir, dass die Curven $\bar{\gamma}, \bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2 \ldots$ auf $\overline{\mathfrak{F}}$ gleiche Gattung haben. Analoges gilt für die Curven $\bar{\gamma}', \bar{\gamma}_1', \bar{\gamma}_2' \ldots$. Also sehen wir:

Satz 14: *Auf einer Fläche zweiten Grades durch die Ecken des Tetraeders gehören die Geraden der einen Schar sowie ∞^1 Curven dritten Grades durch die Ecken einem tetraedralen Complexe an. Ebenso gehören die Geraden der zweiten Schar sowie ∞^1 Curven dritten Grades durch die Ecken einem zweiten tetraedralen Complexe an. Jede dieser vier Scharen von ∞^1 Linien auf der Fläche besteht aus Curven gleicher Gattung.*

Analyt. Darstellg.

Um einige unserer Ergebnisse auch analytisch zu bestätigen und zu vervollständigen, gehen wir davon aus, dass allgemein:

$$(41) \qquad Ayz + Bzx + Cxy + Lx + My + Nz = 0$$

die Gleichung einer Fläche zweiten Grades durch die Tetraederecken ist. Sie geht vermöge der involutorischen Transformation (37) in die Fläche

$$(42)\quad L\lambda y_1 z_1 + M\mu z_1 x_1 + N\nu x_1 y_1 + A\mu\nu x_1 + B\nu\lambda y_1 + C\lambda\mu z_1 = 0$$

über, die wieder die allgemeine Form (41) hat. Hiermit ist verificiert, dass die Schar aller ∞^5 Flächen zweiten Grades durch die Tetraederecken bei den involutorischen Transformationen (37) invariant bleibt.

Wie wir sahen, zerfällt die Schar in ∞^2 einzeln invariante Scharen von je ∞^3 Flächen zweiten Grades. Da es auch ∞^3 Transformationen (37) giebt, so kommt man auf die Vermutung, dass es unter ihnen eine gebe, bei der eine bestimmt gewählte Fläche zweiten Grades durch die Tetraederecken für sich invariant bleibt. Diese Vermutung ist im allgemeinen richtig, denn nach Formel (42) bleibt die Fläche (41) invariant, wenn

$$\frac{A}{L\lambda} = \frac{B}{M\mu} = \frac{C}{N\nu} = \frac{L}{A\mu\nu} = \frac{M}{B\nu\lambda} = \frac{N}{C\lambda\mu}$$

oder also

$$\lambda = \frac{MN}{BC}, \quad \mu = \frac{NL}{CA}, \quad \nu = \frac{LM}{AB}$$

ist. Wäre eine der sechs Constanten A bis N gleich Null, so enthielte die Fläche eine Tetraederkante. Hiervon ist also abzusehen.

Das letzte Ergebnis liefert mit Satz 14 zusammen das

Theorem 10: *Liegt ein Tetraeder und eine Fläche zweiten Grades vor, die durch die Ecken des Tetraeders geht, so enthält die Fläche vier Scharen von je ∞^1 Curven von der Art, dass die Curven jeder einzelnen Schar durch projective Transformationen, bei denen die Tetraederecken fest bleiben, in einander überführbar sind. Es sind dies die beiden Scharen von Geraden sowie zwei Scharen von Curven dritten Grades durch die Ecken des Tetraeders. Enthält die Fläche keine Tetraederkante, so giebt es, wenn das Tetraeder als das Coordinatentetraeder gewählt wird, eine involutorische Punkttransformation* Gesamtergebnis bez. d. Fl. 2. Grades.

$$x_1 = \frac{\lambda}{x}, \quad y_1 = \frac{\mu}{y}, \quad z_1 = \frac{\nu}{z},$$

bei der die Fläche invariant bleibt und die beiden Geradenscharen mit den beiden Scharen von Curven dritten Grades vertauscht werden *).

Betrachten wir nun die Fläche f, die aus einer Ebene e vermöge einer involutorischen Transformation (37) hervorgeht. Wie wir schon auf S. 347 erkannten, ist diese Fläche f *von dritter Ordnung.* Invol. Trf. ausgeführt auf Ebenen.

*) Dies Theorem sowie eine grosse Anzahl weiterer Sätze, die in diesem Bande nur zu geringem Teile Platz finden können, entwickelte Lie in einem Vortrag in Kummer's Seminar zu Berlin im Wintersemester 1869—70. Vgl. ferner Verh. d. Ges. d. Wiss., Christiania 1869, S. 128.

Um ihre Classe zu bestimmen, betrachten wir zunächst überhaupt alle Tangenten der Fläche f. Vermöge der Transformation (37) gehen diese Tangenten aus den Curven dritten Grades hervor, die durch die Ecken des Tetraeders gehen und die Ebene e berühren. Jede solche Curve liegt aber, wie wir wissen, auf ∞^1 Complexkegeln. Diese Kegel müssen also die Ebene e berühren. Liegt umgekehrt ein die Ebene e berührender Complexkegel vor, so enthält er, wie wir sahen, ∞^1 Curven dritten Grades durch die Ecken des Tetraeders, und augenscheinlich berühren die Curven die Ebene e.

Wollen wir nun insbesondere alle die Tangenten der Fläche f haben, *die von einem gegebenen Punkt dieser Fläche selbst ausgehen*, so müssen wir also alle Curven dritten Grades betrachten, welche die Ebene e berühren und durch einen gegebenen Punkt p der Ebene gehen. Jede solche Curve dritten Grades liegt auf einem Complexkegel, der durch den gegebenen Punkt p läuft und die Ebene e nur berührt. Es kommt also darauf an, die Complexkegel zu bestimmen, die einen gegebenen Punkt p der Ebene e zur Spitze haben und die Ebene berühren. Wir haben aber früher (vgl. § 1, S. 320 sowie Fig. 67) gefunden, dass die Ebene e nur von zwei Complexkegeln berührt wird, die p zum Scheitel haben. Sie berühren die Ebene längs zweier Geraden durch den Punkt p. Bei der Transformation (37) gehen diese Kegel nach Satz 9 in Complexkegel über, welche die Fläche f berühren und zwar längs zweier Curven dritter Ordnung durch die Tetraederecken, die also auf der Fläche f gelegen sind. Diese Betrachtung lehrt also, *dass die von einem Punkte der Fläche f ausgehenden Tangenten der Fläche zwei Kegel zweiten Grades bilden*, sodass mithin die Fläche dritter Ordnung von der *vierten Classe* ist.

Analytisch wird die Fläche dritter Ordnung und vierter Classe durch die Gleichung dargestellt, die aus der linearen Gleichung einer Ebene vermöge einer Transformation (37) hervorgeht und demnach die allgemeine Form hat:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{y} + \frac{C}{z} + D = 0.$$

Diese Gleichung haben wir übrigens schon auf S. 347 aufgestellt.

Also besteht der längst bekannte

Fl. 3. O. u. 4. Cl. **Satz 15:** *Die von einem Punkte der Fläche dritter Ordnung und vierter Classe*

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{y} + \frac{C}{z} + D = 0$$

ausgehenden Tangenten der Fläche bilden zwei Kegel zweiten Grades.

Die Folgerungen, die wir auf den letzten Seiten an einander reihten, gründeten sich wesentlich auf die Betrachtung der involutorischen Transformationen (37). Aber diese sind nur ein Specialfall der Transformationen

$$x_1 = \lambda x^m, \quad y_1 = \mu y^m, \quad z_1 = \nu z^m,$$

die, wie wir sahen (vgl. Satz 3, S. 340), die Monge'sche Gleichung eines jeden der ∞^1 tetraedralen Complexe invariant lassen. Wir wollen jetzt den Specialfall $m = 2$ dieser Transformation, wenn auch nur flüchtig, betrachten und dabei $\lambda = \mu = \nu = 1$ setzen.

Die quadratische Transformation

Quadrat. Transform.

(43) $$x_1 = x^2, \quad y_1 = y^2, \quad z_1 = z^2$$

führt jeden Punkt (x, y, z) in einen einzigen Punkt (x_1, y_1, z_1) über, während die inverse Transformation:

(44) $$x = \sqrt{x_1}, \quad y = \sqrt{y_1}, \quad z = \sqrt{z_1}$$

jeden Punkt (x_1, y_1, z_1) in *acht* Punkte (x, y, z) überführt, entsprechend den acht Combinationen der Vorzeichen der drei Quadratwurzeln. Durch die Transformation (43) werden also zwei Räume (x, y, z) und (x_1, y_1, z_1), die wir uns in einander liegend vorstellen, einander punktweis zugeordnet und zwar in einer *ein-achtdeutigen* Weise.

Eine *Fläche zweiten Grades*, die das Tetraeder zum Polartetraeder hat, deren Gleichung also lautet:

Ausgef. auf Fl. 2. Grades.

$$lx^2 + my^2 + nz^2 + r = 0,$$

geht vermöge der Transformation (43) in eine *Ebene*

$$lx_1 + my_1 + nz_1 + r = 0$$

über. Da sich zwei solche Flächen in einer Raumcurve vierter Ordnung, zwei Ebenen aber in einer Geraden schneiden, so folgt, dass die inverse Transformation (44) jede Gerade in eine Curve vierter Ordnung verwandelt. Da je ∞^3 Geraden einem bestimmten tetraedralen Complex angehören, so sehen wir also, dass ∞^4 Curven vierter Ordnung als Schnitte der ∞^3 Flächen zweiten Grades, die das Tetraeder zum Polartetraeder haben, in der Weise auftreten, dass je ∞^3 Curven dieser Schar Curven eines bestimmten tetraedralen Complexes sind. Da jedem Punkt (x_1, y_1, z_1) acht Punkte (x, y, z) entsprechen, so folgt aus dem Satz, dass drei Ebenen einen Punkt gemein haben, sofort, dass drei unter den ∞^3 Flächen zweiten Grades acht Punkte gemein haben.

Fassen wir nun eine Ebene des Raumes (x, y, z) in's Auge:

Ausgef. auf Ebenen.

(45) $$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Ihr ist im Raume (x_1, y_1, z_1) die Fläche zugeordnet:

(46) $$A\sqrt{x_1} + B\sqrt{y_1} + C\sqrt{z_1} + D = 0.$$

Um die Ordnung der Fläche festzustellen, haben wir die Anzahl ihrer Schnittpunkte mit einer beliebigen Geraden zu bestimmen. Der Geraden entspricht im Raume (x, y, z) eine Curve vierter Ordnung, welche die Ebene (45) in vier Punkten trifft. Jedem dieser Punkte (x, y, z) entspricht im Raume (x_1, y_1, z_1) gerade ein Punkt, sodass die Fläche (46) von der *vierten Ordnung* ist. Allerdings wäre zunächst noch denkbar, dass einige der vier Punkte zusammenfallen, indem sich die Werte der Coordinaten der vier Punkte (x, y, z) zum Teil nur im Vorzeichen unterscheiden. Aber dies trifft offenbar nicht zu, wenn die Ebene (45) allgemeine Lage hat. Dass die Fläche (46) von der vierten Ordnung ist, lässt sich auch rechnerisch durch Fortschaffen der Quadratwurzeln bestätigen.

Fragen wir uns ferner, was für eine Curve einer Geraden des Raumes (x, y, z) entspricht. Die Gerade schneidet eine Fläche zweiten Grades

$$lx^2 + my^2 + nz^2 + r = 0$$

in zwei Punkten (x, y, z), und diese Punkte werden im allgemeinen keine solche Coordinaten haben, die sich nur in den Vorzeichen unterscheiden. Ihnen entsprechen also im Raume (x_1, y_1, z_1) zwei Schnittpunkte der fraglichen Curve mit der beliebigen Ebene:

$$lx_1 + my_1 + nz_1 + r = 0.$$

Demnach ist die Curve ein Kegelschnitt. Jede Gerade wird also vermöge der Transformation (43) in einen Kegelschnitt verwandelt.

Ferner wird eine Ebene

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{45}$$

des Raumes (x, y, z) in jedem Punkte (x, y, z) von einer und nur einer der Flächen zweiten Grades

$$lx^2 + my^2 + nz^2 + r = 0 \tag{47}$$

berührt. Die Ebene hat mit dieser Fläche zwei Geraden gemein, die sich in dem Berührpunkte schneiden. Nun aber geht die Ebene (45) vermöge der Transformation (43) in eine Fläche vierter Ordnung von der Form (46) und die Fläche zweiten Grades (47) in eine Tangentenebene der letzteren Fläche über. Da ausserdem jeder Geraden des Raumes (x, y, z) ein Kegelschnitt des Raumes (x_1, y_1, z_1) entspricht, so folgt der wohlbekannte

Satz 16: *Jede Tangentenebene der Fläche vierter Ordnung*

$$A\sqrt{x_1} + B\sqrt{y_1} + C\sqrt{z_1} + D = 0$$

schneidet die Fläche in zwei Kegelschnitten. Die Fläche enthält also ∞^2 *Kegelschnitte.*

Dieser Satz erinnert an den Satz 15 über eine Fläche dritter Ordnung, die gerade die hierzu dualistische Eigenschaft hat. In der That lassen sich die beiden Flächen

$$A\sqrt{x_1} + B\sqrt{y_1} + C\sqrt{z_1} + D = 0 \tag{46}$$

und

$$\frac{A^2}{x} + \frac{B^2}{y} + \frac{C^2}{z} + D^2 = 0 \tag{48}$$

durch Dualität aus einander ableiten. Denn die Tangentenebene

$$ux + vy + wz + 1 = 0$$

der Fläche (48) hat die Ebenencoordinaten

$$u = \frac{A^2}{D^2x^2}, \quad v = \frac{B^2}{D^2y^2}, \quad w = \frac{C^2}{D^2z^2},$$

wenn (x, y, z) der Berührpunkt ist, sodass infolge von (48) die Gleichung besteht:

$$A\sqrt{u} + B\sqrt{v} + C\sqrt{w} + D = 0,$$

aus der die Gleichung (46) durch die Dualität

$$x_1 = u, \quad y_1 = v, \quad z_1 = w$$

hervorgeht. Die Fläche (46) ist somit von der dritten Classe, da die Fläche (48) von der dritten Ordnung ist.

Die Fläche vierter Ordnung und dritter Classe, deren Tangentenebenen die Fläche in zwei Kegelschnitten schneiden, ist die wohlbekannte *Steiner'sche Fläche vierter Ordnung und dritter Classe.* Sie ist ein specieller Fall der oben besprochenen tetraedral-symmetrischen Flächen, wie de la Gournerie hervorgehoben hat *). (Vgl. S. 341.) Steiner'sche Fläche.

Die Beziehungen, die zwischen den beiden Räumen (x, y, z) und (x_1, y_1, z_1) vermöge der Transformation

$$x_1 = x^2, \quad y_1 = y^2, \quad z_1 = z^2$$

bestehen, wollen wir durch eine Tabelle andeuten, in der links die Gebilde im Raume (x, y, z), rechts die entsprechenden Gebilde im Raume (x_1, y_1, z_1) ihren Platz haben:

1) Fläche zweiten Grades, die das Tetraeder zum Polartetraeder hat.	1) Beliebige Ebene.
2) Curve vierter Ordnung als Schnitt zweier derartiger Flächen und als Curve eines tetraedralen Complexes.	2) Beliebige Gerade.

*) Mit dieser Fläche haben sich bekanntlich Steiner, Kummer, Weierstrass und eine Reihe anderer Mathematiker beschäftigt.

3) Die acht Schnittpunkte dreier derartiger Flächen.	3) *Ein* Punkt als Schnitt dreier Ebenen.
4) Beliebige Gerade.	4) Kegelschnitt als Curve eines tetraedralen Complexes.
5) Beliebige Ebene.	5) Steiner'sche Fläche vierter Ordnung und dritter Classe.

§ 5. Die logarithmische Abbildung*).

Die ∞^1 Monge'schen Gleichungen der zum Coordinatentetraeder gehörigen ∞^1 tetraedralen Complexe haben wir wiederholt in der Form geschrieben:

$$(49)\qquad (b-c)\frac{dy}{y}\frac{dz}{z}+(c-a)\frac{dz}{z}\frac{dx}{x}+(a-b)\frac{dx}{x}\frac{dy}{y}=0.$$

Sie kann auch so geschrieben werden:

$$(b-c)\,d\log y\cdot d\log z+(c-a)\,d\log z\cdot d\log x+(a-b)\,d\log x\cdot d\log y=0.$$

Es ist demnach möglich, solche neue Veränderliche

$$(50)\qquad \mathfrak{x}=\log x,\quad \mathfrak{y}=\log y,\quad \mathfrak{z}=\log z$$

einzuführen, dass die ∞^1 Monge'schen Gleichungen die Form annehmen:

$$(51)\qquad (b-c)\,d\mathfrak{y}\,d\mathfrak{z}+(c-a)\,d\mathfrak{z}\,d\mathfrak{x}+(a-b)\,d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{y}=0,$$

die selbstverständlich auch vom zweiten Grade in den Differentialen ist, in der aber die Coefficienten drei beliebige *Constanten* sind, deren Summe gleich Null ist**). Diese Monge'sche Gleichung (51) ordnet sich der im 1. Beisp., § 1, 7. Kap., S. 254, betrachteten Form unter. Wir deuten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ als Cartesische Punktcoordinaten in einem neuen Raume. Alsdann ist der Raum (x, y, z) durch die Gleichungen (50) punktweis auf den Raum $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ abgebildet. Diese Abbildung heisse die *logarithmische Abbildung*.

Logar. Abbildung.

Bei dieser Abbildung wird nicht nur jeder Punkt auf einen Punkt des neuen Raumes bezogen. Vielmehr wird auch jedes Linienelement

---

*) Die Entwickelungen dieses Paragraphen stammen alle von Lie und zwar aus der Zeit vom Winter 1869 auf 1870. Eine einigermassen ausführliche Darstellung dieser Theorien gab er zuerst im Archiv for Math. og Naturv., Christiania, 4. Bd. (1879). Vgl. auch 2. Bd. (1877).

**) Gauss und Riemann betrachteten quadratische Differentialausdrücke $\Sigma f_{ik}(x_1 \ldots x_n)\, dx_i\, dx_k$ und fragten, ob es möglich ist, solche neue Veränderliche $\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_n$ einzuführen, dass in dem transformierten Ausdruck $\Sigma \mathfrak{f}_{ik}\, d\mathfrak{x}_i\, d\mathfrak{x}_k$ die Coefficienten Constanten werden. Im Texte machen wir eine analoge Reduction, aber nicht für einen Ausdruck, sondern für eine Gleichung, die eine *willkürliche* Constante enthält. Denken wir uns diese Gleichung nach der willkürlichen Constanten aufgelöst, so können wir sagen, dass wir im Texte das *Verhältnis* zweier quadratischer Differentialausdrücke auf eine solche Form bringen, die nur die *Differentiale* der Veränderlichen enthält.

$(x, y, z, dx : dy : dz)$ als ein Linienelement $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, d\mathfrak{x} : d\mathfrak{y} : d\mathfrak{z})$ abgebildet vermöge der Gleichungen (50) und der Gleichungen:

$$(50') \qquad d\mathfrak{x} = \frac{dx}{x}, \quad d\mathfrak{y} = \frac{dy}{y}, \quad d\mathfrak{z} = \frac{dz}{z}.$$

Die ∞^4 Linienelemente, die einer Monge'schen Gleichung (49) genügen, verwandeln sich in die ∞^4 Linienelemente, die der entsprechenden neuen Monge'schen Gleichung (51) genüge leisten. Jede Integralcurve einer der ∞^1 Monge'schen Gleichungen (49) wird als eine Integralcurve der entsprechenden neuen Monge'schen Gleichung (51) abgebildet.

Integralgeraden d. neuen Gl.

Unter den Integralcurven einer Monge'schen Gleichung (51) befinden sich ∞^3 *Geraden* (vgl. 1. Beispiel, § 1 des 7. Kap., S. 254). Es sind dies alle Geraden, die einen gewissen unendlich fernen Kegelschnitt K schneiden, also einen Complex zweiten Grades bilden. Wir können die Incremente $d\mathfrak{x}$, $d\mathfrak{y}$, $d\mathfrak{z}$, die den Punktcoordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ längs einer Geraden zuteil werden, als homogene Punktcoordinaten in der unendlich fernen Ebene auffassen. Alsdann ist die Gleichung (51) geradezu die Gleichung des erwähnten Kegelschnittes K. Dieser Kegelschnitt geht durch die unendlich fernen Punkte der $\mathfrak{x}$-Axe, $\mathfrak{y}$-Axe und $\mathfrak{z}$-Axe, sowie durch den unendlich fernen Punkt der Geraden $\mathfrak{x} = \mathfrak{y} = \mathfrak{z}$. Da factisch ∞^1 Monge'sche Gleichungen (51) vorliegen, so ergeben sich also ∞^1 unendlich ferne Kegelschnitte K und zwar bilden sie das Büschel, das durch die vier genannten Punkte bestimmt wird. (Siehe Fig. 70.)

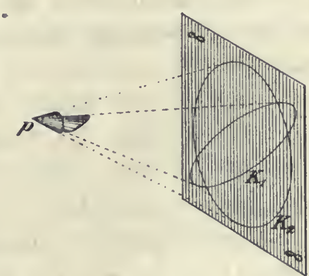

Fig. 70.

Zu diesem Ergebnis kommt man auch so: Im Raume (x, y, z) ordnen die ∞^1 Monge'schen Gleichungen (49) einem bestimmt gewählten Punkt (x, y, z) ∞^1 Elementarkegel zweiten Grades zu. Diese ∞^1 Kegel haben vier Mantellinien gemein, nämlich die nach den Ecken des Coordinatentetraeders gehenden. Da nun die Monge'schen Gleichungen (49) durch die logarithmische Abbildung (50) in die Monge-schen Gleichungen (51) übergeführt werden und jedes Linienelement als Linienelement abgebildet wird, so werden die Elementarkegel der Gleichungen (49) abgebildet als die Elementarkegel der Gleichungen (51). Die zu einem bestimmten Punkt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ gehörigen ∞^1 Elementarkegel der ∞^1 Gleichungen (51) haben demnach vier Linienelemente gemein. Da ferner alle Elementarkegel einer Monge'schen Gleichung (51) einander congruent und gleichgestellt sind (vgl. S. 254), so folgt, dass alle ∞^4 Elementarkegel, die durch die ∞^1 Monge'schen Gleichungen (51) definiert werden, bis ins Unendliche ausgedehnt die unendlich ferne Ebene in ∞^1 Kegelschnitten K durch vier feste Punkte schneiden. So kommen wir wieder zu obigem Ergebnis zurück.

Im Raume (x, y, z) haben zwei *Linienelemente* $(x, y, z,\ dx : dy : dz)$ *gleiche Gattung*, wenn für beide die Verhältnisse der drei Grössen $\frac{dx}{x}, \frac{dy}{y}, \frac{dz}{z}$ dieselben sind (vgl. S. 329). Da nun vermöge der logarithmischen Abbildung (50) die Relationen (50′) bestehen, so folgt, dass sich Linienelemente gleicher Gattung als solche Linienelemente $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z},\ d\mathfrak{x} : d\mathfrak{y} : d\mathfrak{z})$ abbilden, für die $d\mathfrak{x}, d\mathfrak{y}, d\mathfrak{z}$ dieselben Verhältnisse

Linienel. gl. Richtg. haben, d. h. als *Linienelemente gleicher Richtung*. Im Raume $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ entsprechen also Linienelementen gleicher Gattung Linienelemente gleicher Richtung.

Wir haben oben (§ 3, S. 328) diejenigen Curven des Raumes (x, y, z) bestimmt, deren jede aus Linienelementen gleicher Gattung besteht. Sie bilden sich als Curven des Raumes $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ ab, deren jede aus Linienelementen gleicher Richtung besteht, also eine Gerade ist. *Die Curven des Raumes (x, y, z) also, deren jede aus Linienelementen gleicher Gattung besteht, bilden sich ab als die ∞^4 Geraden des Raumes $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$.*

Eine Monge'sche Gleichung (49) hat, wie wir wissen, ∞^3 solche Integralcurven, die aus lauter Linienelementen gleicher Gattung bestehen. Diese Curven bilden sich ab als die Geraden des Complexes, der von der entsprechenden Gleichung (51) definiert wird, also als die Geraden, die einen gewissen Kegelschnitt K des oben erwähnten unendlich fernen Büschels treffen.

In § 3, S. 331, sahen wir, dass alle *Curven einer Gattung* im Raume (x, y, z) gegeben sind durch Gleichungen von der Form:

$$\log x = \varphi(t) + \text{Const.}, \quad \log y = \psi(t) + \text{Const.}, \quad \log z = \chi(t) + \text{Const.}$$

Vermöge der Abbildung (50) gehen aus ihnen die Curven hervor:

$$\mathfrak{x} = \varphi(t) + \text{Const.}, \quad \mathfrak{y} = \psi(t) + \text{Const.}, \quad \mathfrak{z} = \chi(t) + \text{Const.},$$

Congr. u. gleichgestellte Curven. d. h. alle *Curven, die mit einer Curve congruent und gleichgestellt sind.* Offenbar giebt es zu einer *krummen* Curve stets ∞^3 congruente und gleichgestellte. Dagegen giebt es zu einer Geraden nur ∞^2 parallele. Im Raume (x, y, z) besteht also die Gesamtheit einer Curvenschar gleicher Gattung dann und nur dann aus bloss ∞^2 Curven, wenn die Curven im Raume $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ als Geraden abgebildet werden. Es steht dies in Einklang mit dem Vorhergehenden und den Bemerkungen auf S. 333 des § 3. —

Wie wir wissen, gehört zu jeder Monge'schen Gleichung eine *partielle Differentialgleichung erster Ordnung*, deren Integralflächen die Flächen sind, die in allen ihren Punkten von den zugeordneten Elementarkegeln berührt werden. (Vgl. § 1 des 7. Kap., insbes. Satz 3, S. 260.) Wir finden die zur Monge'schen Gleichung (49) gehörige partielle Differentialgleichung nach dem früher angegebenen Verfahren durch Elimination von x', y', z' und ϱ aus den Gleichungen

Partielle Diffgln. 1. O.

$$\begin{aligned}(b-c)\,xy'z' + (c-a)\,yz'x' + (a-b)\,zx'y' &= 0,\\ \varrho p &= (c-a)\,yz' + (a-b)\,zy',\\ \varrho q &= (a-b)\,zx' + (b-c)\,xz',\\ -\varrho &= (b-c)\,xy' + (c-a)\,yx',\end{aligned}$$

wenn die partiellen Differentialquotienten von z nach x und y mit p und q bezeichnet werden. Die Elimination liefert die partielle Differentialgleichung:

$$(52)\quad \begin{aligned}&(b-c)^2x^2p^2 + (c-a)^2y^2q^2 + (a-b)^2z^2 - 2(b-c)(c-a)\,xypq +\\ &+ 2(a-b)(b-c)\,xzp + 2(c-a)(a-b)\,yzq = 0.\end{aligned}$$

Ebenso gehört zur Monge'schen Gleichung (51) eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, die durch Elimination von $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{z}'$ und ϱ aus den Gleichungen hervorgeht:

$$\begin{aligned}(b-c)\,\mathfrak{y}'\mathfrak{z}' + (c-a)\,\mathfrak{z}'\mathfrak{x}' + (a-b)\,\mathfrak{x}'\mathfrak{y}' &= 0,\\ \varrho\mathfrak{p} &= (c-a)\,\mathfrak{z}' + (a-b)\,\mathfrak{y}',\\ \varrho\mathfrak{q} &= (a-b)\,\mathfrak{x}' + (b-c)\,\mathfrak{z}',\\ -\varrho &= (b-c)\,\mathfrak{y}' + (c-a)\,\mathfrak{x}'.\end{aligned}$$

Dabei bezeichnen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ die partiellen Differentialquotienten von $\mathfrak{z}$ nach $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$. Es ergiebt sich die partielle Differentialgleichung:

$$(53)\quad \begin{aligned}&(b-c)^2\,\mathfrak{p}^2 + (c-a)^2\,\mathfrak{q}^2 + (a-b)^2 - 2(b-c)(c-a)\,\mathfrak{p}\mathfrak{q} +\\ &+ 2(a-b)(b-c)\,\mathfrak{p} + 2(c-a)(a-b)\,\mathfrak{q} = 0.\end{aligned}$$

Da vermöge der Punkttransformation (50) auch jedem Flächenelement des Raumes (x, y, z) ein Flächenelement des Raumes $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ zugeordnet wird, so bildet sich jede *Integralfläche* der partiellen Differentialgleichung (52) vermöge (50) als *Integralfläche* der partiellen Differentialgleichung (53) ab. Man kann diese selbstverständliche Bemerkung auch dadurch verificieren, dass man direct in (52) statt

x, y, z vermöge (50) die neuen Veränderlichen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ einführt, wodurch die Gleichung (53) hervorgeht.

Die partielle Differentialgleichung (53) ist frei von $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$. Derartige Differentialgleichungen haben wir schon in § 1 des 7. Kap., S. 265, betrachtet. Wir fanden damals, dass eine solche Differentialgleichung ∞^3 Charakteristiken hat, und dass diese Charakteristiken die Geraden sind, die eine unendlich ferne Curve treffen, deren Gleichung in Liniencoordinaten $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ durch (53) gegeben wird. Hier ist die Curve einer der oben erwähnten *unendlich fernen Kegelschnitte* K. Wir wissen ferner, dass die Integralflächen der partiellen Differentialgleichung (53) die abwickelbaren Flächen sind, deren Erzeugende zu den angegebenen Charakteristiken gehören. Unter den Integralflächen finden sich die ∞^2 Ebenen, die den Kegelschnitt K berühren, und jede andere Integralfläche ist die Enveloppe von ∞^1 solchen Ebenen. Die Geraden einer Developpabeln sind Haupttangentencurven der Fläche, hier also sind die Charakteristiken Haupttangentencurven der Integralflächen. Dies steht in Einklang damit, dass die Integralflächen längs einer solchen Geraden von den Elementarkegeln der Monge'schen Gleichung (51) berührt werden, vgl. Satz 26, § 5 des 7. Kap., S. 308.

Wenden wir nun die Abbildung (50) rückwärts an, indem wir zum Raum (x, y, z) zurückkehren, so sehen wir, dass die partielle Differentialgleichung (52) unendlich viele Integralflächen hat, dass sie ferner gerade ∞^3 Charakteristiken hat und dass die Charakteristiken diejenigen Integralcurven der zugehörigen Monge'schen Gleichung (49) sind, die aus je ∞^1 Linienelementen gleicher Gattung bestehen, sowie endlich, dass die Charakteristiken Haupttangentencurven auf allen Integralflächen sind. Da eine Integralfläche der partiellen Differentialgleichung (53) aus ∞^1 Charakteristiken gebildet wird, von denen je zwei unendlich benachbarte einander schneiden, so folgt, dass wir die allgemeinste Integralfläche der partiellen Differentialgleichung (52) dadurch herstellen können, dass wir ∞^1 solche Integralcurven der Monge-schen Gleichung (49) herausgreifen, deren jede aus ∞^1 Linienelementen gleicher Gattung besteht und von denen jede die unendlich benachbarte schneidet. Zugleich haben wir gefunden:

Satz 17: *Alle Flächen, deren Haupttangentencurven der einen Schar einem tetraedralen Complexe angehören, lassen sich angeben.*

Gemeinsame Integralfl. Betrachten wir *zwei* partielle Differentialgleichungen (53). Zu ihnen gehören zwei unendlich ferne Kegelschnitte K_1 und K_2. (Vgl. Fig. 70, S. 357.) Es leuchtet sofort ein, dass die beiden Gleichungen ∞^1 *gemeinsame Integralflächen* haben, nämlich die Ebenen, die K_1 und K_2

zugleich berühren. Daher haben auch zwei partielle Differentialgleichungen (52) stets ∞^1 gemeinsame Integralflächen.

Andererseits berührt eine beliebige Ebene

$$(54)\qquad \alpha\mathfrak{x} + \beta\mathfrak{y} + \gamma\mathfrak{z} + \delta = 0$$

stets zwei Kegelschnitte K_1 und K_2 des Büschels K und ist daher gemeinsame Integralfläche von zwei partiellen Differentialgleichungen (53). Die Ebene enthält die Parallelgeraden nach dem Berührpunkte von K_1 sowie die Parallelgeraden nach dem Berührpunkte von K_2. Längs dieser Geraden, welche die Ebene doppelt überdecken, wird die Ebene von den Elementarkegeln der einen oder anderen zugehörigen Monge'schen Gleichung (51) berührt. Der Ebene (54) entspricht im Raum (x, y, z) die Fläche:

$$\alpha \log x + \beta \log y + \gamma \log z + \delta = 0,$$

die auch so dargestellt werden kann:

$$(55)\qquad x^\alpha y^\beta z^\gamma = \varrho,$$

wobei $\delta = -\log\varrho$ gesetzt ist. Diese Fläche ist mithin gemeinsame Integralfläche von zwei partiellen Differentialgleichungen (52). Die erwähnten Geraden der Ebene (54) entsprechen nach Satz 26, § 5 des 7. Kap., S. 308, den Haupttangentencurven der Fläche (55), und die Haupttangentencurven jeder Schar sind Curven, deren Linienelemente gleiche Gattung haben und Integralcurven der einen bez. anderen zugehörigen Monge'schen Gleichung (49) sind. Wir sind diesen Flächen (55) schon in § 3, S. 334, begegnet.

Wir haben gesehen, dass den Curven einer Gattung des Raumes (x, y, z) vermöge der logarithmischen Abbildung im Raume $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ congruente und gleichgestellte Curven entsprechen. Eine Fläche nun, die ∞^1 congruente und gleichgestellte Curven enthält, heisst eine *Translationsfläche*. Sie kann dadurch erzeugt werden, dass man eine Curve c so im Raume fortbewegt, dass sie immer congruent und gleichgestellt mit der Curve in der Anfangslage bleibt, dass man sie also als starr ansieht und in Translationsbewegungen fortführt. Jeder Punkt $\mathfrak{p}$ der Curve c beschreibt dabei eine neue Curve γ, und es erhellt, dass alle ∞^1 Bahncurven γ ebenfalls einander congruent und gleichgestellt sind. Jede Fläche, die eine Schar von ∞^1 congruenten und gleichgestellten Curven enthält, muss also notwendig auch eine zweite solche Schar enthalten. (Siehe Fig. 71, S. 362.) Gehen wir von einer Translationsfläche im Raume $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ zu der entsprechenden Fläche im Raume (x, y, z) über, so geht der Satz hervor: **Translationsfläche.**

Satz 18: *Enthält eine Fläche eine Schar von ∞^1 Curven gleicher Gattung, so enthält sie noch eine zweite Schar von ∞^1 Curven gleicher Gattung.*

Betrachten wir wieder eine Translationsfläche mit den beiden Scharen congruenter und gleichgestellter Curven c und γ. Eine Curve c, etwa c_0, wird von den ∞^1 Curven γ in Punkten $\mathfrak{q}_0, \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2 \ldots$ geschnitten, die einander entsprechende Punkte auf den Curven γ sind, sodass die Curven γ in diesen Punkten $\mathfrak{q}_0, \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2 \ldots$ parallele Tangenten haben. Von diesen Tangenten wird also ein Cylinder erzeugt, der die Fläche längs c_0 berührt. Hieraus folgt, dass die Curven c und γ ein *conjugiertes* System bestimmen.

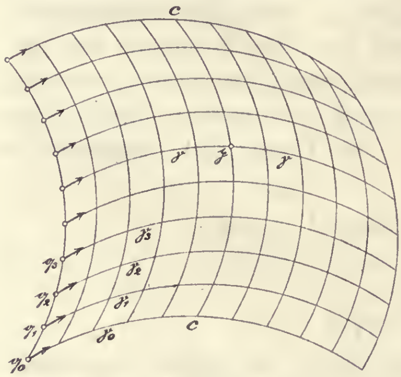

Fig. 71.

Nehmen wir an, dass die Curven c_0 und γ_0 so beschaffen seien, *dass zu jeder Tangente der einen eine parallele Tangente der andern vorhanden ist.* Die Tangenten der Curven γ sind, wie gesagt, in den Punkten, in denen sie eine Curve c treffen, alle einander parallel. Nach der gemachten Voraussetzung giebt es daher auf jeder Curve c einen Punkt $\mathfrak{p}$, in dem die Curve von der hindurchgehenden Curve γ berührt wird. Der Ort dieser Punkte $\mathfrak{p}$ ist eine Curve C, die sowohl Umhüllende *aller Curven c als auch aller Curven γ* ist. Denn wenn die Curve c in die benachbarte Curve durch Translation übergeht, so bewegt sich der mit ihr fest verbunden gedachte Punkt $\mathfrak{p}$ längs der hindurchgehenden Curve γ, d. h. längs c selbst. Die Curve C wird also in jedem Punkt $\mathfrak{p}$ von den hindurchgehenden Curven c und γ berührt.

Umgekehrt sieht man auch leicht ein, dass die Curven c dann und nur dann eine Umhüllende haben, wenn die Curven c_0 und γ_0 paarweis parallele Tangenten haben.

Da die Curven c und γ ein conjugiertes System bilden, so ist die Tangentenrichtung auf der Curve C zu sich selbst conjugiert. Die Umhüllende C ist somit eine *Haupttangentencurve* der Fläche.

Trans-lations-fläche besond. Art.

Wir wollen jetzt eine Translationsfläche betrachten, die ∞^1 congruente und gleichgestellte Curven $c_0, c_1 \ldots$ enthält, *die sämtlich durch einen gemeinsamen Punkt $\mathfrak{P}$ gehen.* Es ist dieser Fall eine Ausartung des soeben betrachteten, indem sich die Umhüllende C der

Curven c auf einen Punkt $\mathfrak{P}$ reduciert. In der That ist auch leicht zu erkennen, dass alle congruenten und gleichgestellten Curven $\gamma_0, \gamma_1 \dots$ der zweiten Schar ebenfalls durch $\mathfrak{P}$ gehen. Denn ein mit c_0 fest verbundener Punkt $\mathfrak{p}_0$ beschreibt eine Curve γ_0, sobald c_0 nach einander die Lagen $c_0, c_1 \dots$ einnimmt, wobei $\mathfrak{p}_0$ einmal gerade mit $\mathfrak{P}$ zusammenfällt.

Bei der Translationsbewegung von c_0 wird also nach und nach jeder Punkt $\mathfrak{p}$ von c_0 einmal mit $\mathfrak{P}$ zusammenfallen. Wird nun mit c_0 ein Punkt $\mathfrak{p}_0$ fest verbunden, der zunächst mit $\mathfrak{P}$ zusammenliegt (Fig. 72), so wird dieser Punkt während der Bewegung eine Curve γ_0 beschreiben. Ist die Bewegung soweit vorgegangen, dass der Punkt $\mathfrak{p}$ von c_0 nach $\mathfrak{P}$ gerückt ist, so wird $\mathfrak{p}_0$ in eine Lage π gelangt sein, sodass $\mathfrak{p}\mathfrak{P}$ gleich und parallel $\mathfrak{P}\pi$ ist, also $\mathfrak{P}$ die Mitte der Strecke $\mathfrak{p}\pi$ ist. Die Curven c_0 und γ_0 haben mithin die Eigenschaft, dass jede durch $\mathfrak{P}$ gehende Gerade, welche die eine, etwa in $\mathfrak{p}$, schneidet, auch die andere in einem Punkte π schneidet, sodass $\mathfrak{p}\pi$ durch $\mathfrak{P}$ halbiert wird. Daher lässt sich die Curve γ_0 durch *Spiegelung* der Curve c_0 an dem Punkte $\mathfrak{P}$ herstellen.

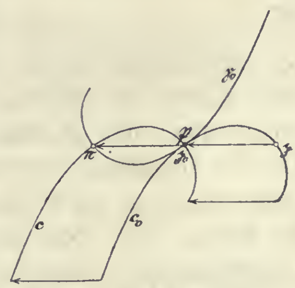

Fig. 72.

Wir kommen hierauf nachher wieder zurück und wollen vorläufig nur einen Satz formulieren, der sich durch Zurückgehen auf den Raum (x, y, z) ergiebt:

Satz 19: *Enthält eine Fläche ∞^1 Curven gleicher Gattung durch einen gemeinsamen Punkt, so enthält sie noch eine zweite Schar von ∞^1 Curven gleicher Gattung durch denselben Punkt.*

Im Raume $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ ist jede Ebene eine Translationsfläche von ganz besonderer Art: Man kann in ihr *zwei ganz beliebige* Curven als die Curven c_0 und γ_0 wählen und die Ebene durch Translationsbewegung der einen Curve längs der andern erzeugen. Die oben betrachtete Ebene (54) geht nun durch logarithmische Abbildung aus der Fläche Translationsfln. mit unendl. vielen Erzeuggn.

$$x^\alpha y^\beta z^\gamma = \varrho \tag{55}$$

hervor. Mithin hat diese Fläche die Eigenschaft, *dass zu jeder auf ihr gezogenen Curve ∞^1 Curven gleicher Gattung auf der Fläche vorhanden sind.*

Im Raume (x, y, z) kennen wir noch einige Flächen, die unendlich viele Scharen von Curven gleicher Gattung enthalten, allerdings nicht so viele, wie die soeben besprochene Flächenart. Eine Ebene

(56) $$Ax + By + Cz + D = 0$$

nämlich enthält ∞^1 Geraden eines jeden einzelnen der ∞^1 tetraedralen Complexe. Diese Geraden umhüllen einen der ∞^1 Kegelschnitte k, deren gemeinsame Tangenten die Schnittlinien der Ebene mit den Tetraederebenen sind. (Vgl. Fig. 66, S. 319.) Die Ebene wird längs des Kegelschnittes von den Elementarkegeln der zugehörigen Mongeschen Gleichung (49) berührt. Daraus folgt im Raume $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ mit Rücksicht auf Satz 21, § 5 des 7. Kap., S. 303, dass jede Fläche

(57) $$Ae^{\mathfrak{x}} + Be^{\mathfrak{y}} + Ce^{\mathfrak{z}} + D = 0$$

∞^1 Scharen von je ∞^1 congruenten und gleichgestellten Curven enthält, also in ∞^1 *Weisen eine Translationsfläche* ist, wobei die je ∞^1 congruenten und gleichgestellten Curven je eine Umhüllende haben, die eine Haupttangentencurve der Fläche ist. Es sind dies alle Haupttangentencurven der Fläche, weil die Kegelschnitte k im Raume (x, y, z) die Ebene (56) ebenfalls doppelt überdecken. Man sieht, dass die Haupttangentencurven der Fläche (57) eine irreducibele Schar bilden.

Wir haben ferner im vorigen Paragraphen gesehen, dass jede Fläche zweiten Grades im Raume (x, y, z), die durch die Ecken des Tetraeders geht, also eine Gleichung von der Form

(58) $$Ayz + Bzx + Cxy + Lx + My + Nz = 0$$

hat, vier Scharen von je ∞^1 Curven gleicher Gattung enthält, nämlich die beiden Scharen der Erzeugenden sowie zwei Scharen von Curven dritten Grades. (Siehe Theorem 10, S. 351.) Hieraus folgt, dass *jede Fläche*

(59) $$Ae^{\mathfrak{y}+\mathfrak{z}} + Be^{\mathfrak{z}+\mathfrak{x}} + Ce^{\mathfrak{x}+\mathfrak{y}} + Le^{\mathfrak{x}} + Me^{\mathfrak{y}} + Ne^{\mathfrak{z}} = 0$$

vier Scharen von je ∞^1 congruenten und gleichgestellten Curven enthält.

Durch unsere logarithmische Abbildung ist ein Entsprechen zwischen zwei Räumen (x, y, z) und $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ vermittelt. Diese gegenseitige Beziehung haben wir schon in Bezug auf die Begriffe: Punkt, Curve, Linienelement, Flächenelement und Fläche betrachtet. Aber wir können die Beziehung auch auf die Transformationen in den Räumen ausdehnen. In der That: Wir wissen, dass die ∞^3 projectiven Transformationen

Logar. Abb. der proj. Trfn.

(60) $$x_1 = \lambda x, \quad y_1 = \mu y, \quad z_1 = \nu z$$

jede Curve des Raumes (x, y, z) im allgemeinen in ∞^3 Curven gleicher Gattung überführt und dass diesen Curven im Raume $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ ∞^3 congruente und gleichgestellte Curven entsprechen. Diese letzteren gehen aber aus einer derselben durch Translation hervor. Jenen ∞^3 projectiven

Transformationen (60) im Raume (x, y, z) entsprechen gerade die ∞^3 Translationen im Raume $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$. Um dies analytisch darzustellen, beachten wir, dass den Punkten (x, y, z) und (x_1, y_1, z_1) des ursprünglichen Raumes vermöge der logarithmischen Abbildung (50) die Punkte mit den Coordinaten

$$(61) \quad \begin{cases} \mathfrak{x} = \log x\,, \quad \mathfrak{y} = \log y\,, \quad \mathfrak{z} = \log z \\ \text{bez.} \\ \mathfrak{x}_1 = \log x_1, \quad \mathfrak{y}_1 = \log y_1, \quad \mathfrak{z}_1 = \log z_1 \end{cases}$$

im neuen Raume entsprechen. Wenn nun die Punkte (x_1, y_1, z_1) vermöge der projectiven Transformation (60) aus den Punkten (x, y, z) hervorgehen, so ist nach (60) und (61):

$$(62) \qquad \mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x} + \log \lambda, \quad \mathfrak{y}_1 = \mathfrak{y} + \log \mu, \quad \mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z} + \log \nu.$$

Diese Gleichungen stellen bei beliebigen Werten der Constanten λ, μ, ν alle ∞^3 Translationen des Raumes $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ dar.

Wenn man also im Raume (x, y, z) eine projective Transformation (60) vornimmt, und wenn man sowohl die ursprünglichen als auch die transformierten Punkte logarithmisch in den Raum $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ abbildet, so sind hier die Bilder der transformierten Punkte durch die Translation (62) aus den Bildern der ursprünglichen Punkte abzuleiten.

Im neuen Raume $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ gestattet eine Curve nur dann eine infinitesimale und infolgedessen ∞^1 endliche Translationen in sich, wenn sie eine Gerade ist. Hiermit steht völlig im Einklang, dass die Geraden des Raumes $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ die Bilder der ∞^4 Curven des Raumes (x, y, z) sind, deren jede aus Linienelementen gleicher Gattung besteht (vgl. S. 358), d. h. deren jede eine infinitesimale projective Transformation der Gruppe (60) gestattet. (Vgl. auch S. 334.)

Eine Ebene (54) im Raume $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ gestattet zwei von einander unabhängige infinitesimale Translationen. In der That entspricht ihr im Raume (x, y, z) eine Fläche (55), die, wie wir früher sahen (in § 3, S. 335), zwei von einander unabhängige infinitesimale Transformationen der Gruppe (60) gestattet.

Wir haben gesehen, dass sich die projectiven Transformationen (60) des Raumes (x, y, z) als die Translationen des Raumes $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ abbilden. Wir können uns nun auch fragen, wie sich die involutorischen Transformationen Logar. Abb. d. involut. Trfn.

$$(63) \qquad x_1 = \frac{\lambda}{x}, \quad y_1 = \frac{\mu}{y}, \quad z_1 = \frac{\nu}{z},$$

die wir im vorigen Paragraphen benutzten, im Raume $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ abbilden. Vermöge der Gleichungen (61) erhalten wir aus (63) sofort:

$$(64) \qquad \mathfrak{x}_1 = \log \lambda - \mathfrak{x}, \quad \mathfrak{y}_1 = \log \mu - \mathfrak{y}, \quad \mathfrak{z}_1 = \log \nu - \mathfrak{z}.$$

Diese Gleichungen bedeuten eine geometrisch leicht herzustellende Transformation im Raume $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$: Ist nämlich $\mathfrak{P}$ der Punkt dieses Raumes, der die constanten Coordinaten $\log \lambda$, $\log \mu$, $\log \nu$ hat, so wird die Verbindende der Punkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ und $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{z}_1)$ in $\mathfrak{P}$ halbiert. Wir haben es also hier mit der *Spiegelung* aller Punkte des Raumes $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ an einem festen Punkte $\mathfrak{P}$ zu thun.

Wenn wir nun eine Curve c im Raume $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ an einem Punkte $\mathfrak{P}$ spiegeln, also die Verbindenden der Punkte c mit $\mathfrak{P}$ über $\mathfrak{P}$ hinaus um sich selbst verlängern, so erhalten wir eine neue Curve γ. Beide Curven sind durch logarithmische Abbildung aus Curven des Raumes (x, y, z) hervorgegangen, und in diesem Raume lässt sich die eine Curve aus der anderen durch die involutorische Transformation (63) ableiten. Erinnern wir uns daran, dass nach Satz 5, § 4, S. 343, die Gattung $F(t)$ einer Complexcurve vermöge der Transformation (63) in die Gattung $-F(t)$ übergeht, so führt uns eine oben über Translationsflächen angestellte Betrachtung (S. 363) zu dem

Satz 20: *Enthält eine Fläche ∞^1 Curven, die einem tetraedralen Complex angehören, ferner gemeinsame Gattung $F(t)$ haben und durch einen gemeinsamen Punkt gehen, so enthält sie auch ∞^1 Curven desselben Complexes, die ebenfalls durch diesen Punkt gehen, aber die gemeinsame Gattung $-F(t)$ haben.*

Einige unter den Ergebnissen, die wir in diesem Paragraphen in knapper Form abgeleitet haben, wollen wir in folgendem Theorem zusammenstellen:

Zusammenfassung. Theorem 11: *Die Gleichungen*

$$\mathfrak{x} = \log x, \quad \mathfrak{y} = \log y, \quad \mathfrak{z} = \log z$$

stellen eine Beziehung zwischen zwei Räumen (x, y, z) und $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ fest, bei der die Linienelemente jeder einzelnen der ∞^1 Monge'schen Gleichungen

$$(b - c)\, x dy\, dz + (c - a)\, y dz\, dx + (a - b)\, z dx\, dy = 0$$

in die Linienelemente der entsprechenden Monge'schen Gleichung

$$(b - c)\, d\mathfrak{y}\, d\mathfrak{z} + (c - a)\, d\mathfrak{z}\, d\mathfrak{x} + (a - b)\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} = 0$$

übergehen. Die ersteren ∞^1 Monge'schen Gleichungen bestimmen ∞^1 tetraedrale Complexe, die letzteren ebenfalls ∞^1 Linien-

complexe zweiten Grades, nämlich solche, deren jeder aus allen Treffgeraden eines Kegelschnittes besteht, der einem Büschel von Kegelschnitten angehört. Die obigen Gleichungen stellen ferner Beziehungen fest zwischen Curven, Flächen und Transformationen in beiden Räumen. Im Folgenden sind einige derselben durch Gegenüberstellung angegeben, wobei sich die linke Seite auf den Raum (x, y, z), *die rechte auf den Raum* $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ *bezieht:*

1) ∞^3 *vertauschbare projective Transformationen:*

$$x_1 = \lambda x, \quad y_1 = \mu y, \quad z_1 = \nu z.$$

1) *Die* ∞^3 *vertauschbaren Translationen:*

$$\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x} + \mathfrak{l}, \quad \mathfrak{y}_1 = \mathfrak{y} + \mathfrak{m}, \quad \mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z} + \mathfrak{n}.$$

2) *Jede Curve:*

$$\frac{x^\alpha}{A} = \frac{y^\beta}{B} = \frac{z^\gamma}{C}$$

gestattet ∞^1 *projective Transformationen der obigen Form.*

2) *Jede Gerade gestattet* ∞^1 *Translationen.*

3) *Jede Fläche*

$$x^\alpha y^\beta z^\gamma = \varrho$$

gestattet ∞^2 *projective Transformationen der obigen Form.*

3) *Jede Ebene gestattet* ∞^2 *Translationen.*

4) *Fläche, die in zwei Weisen dadurch erzeugt werden kann, dass auf eine gewisse Curve nach und nach* ∞^1 *infinitesimale projective Transformationen der obigen Form ausgeführt werden.*

4) *Translationsfläche.*

5) *Jede Ebene kann in* ∞^1 *Weisen dadurch erzeugt werden, dass auf eine Gerade nach und nach* ∞^1 *jener infinitesimalen projectiven Transformationen ausgeübt werden.*

5) *Jede Fläche*

$$Ae^{\mathfrak{x}} + Be^{\mathfrak{y}} + Ce^{\mathfrak{z}} + D = 0$$

ist auf ∞^1 *Weisen als eine Translationsfläche zu erzeugen.*

6) *Die Fläche zweiten Grades*

$$Ayz + Bzx + Cxy + Lx + My + \\ + Nz = 0$$

lässt sich auf vier Weisen so erzeugen, dass auf eine Curve nach und nach ∞^1 *jener infinitesimalen projectiven Transformationen ausgeübt werden.*

6) *Die Fläche*

$$Ae^{\mathfrak{y}+\mathfrak{z}} + Be^{\mathfrak{z}+\mathfrak{x}} + Ce^{\mathfrak{x}+\mathfrak{y}} + \\ + Le^{\mathfrak{x}} + Me^{\mathfrak{y}} + Ne^{\mathfrak{z}} = 0$$

ist auf vier Weisen als eine Translationsfläche zu erzeugen.

7) *Die Transformationen:*

$$x_1 = \lambda x^m, \quad y_1 = \mu y^m, \quad z_1 = \nu z^n.$$

7) *Die Ähnlichkeitstransformationen:*

$$\mathfrak{x}_1 = m\mathfrak{x} + \mathfrak{l}, \quad \mathfrak{y}_1 = m\mathfrak{y} + \mathfrak{m}, \\ \mathfrak{z}_1 = m\mathfrak{z} + \mathfrak{n}.$$

Kapitel 9.

Über einige in der Liniengeometrie auftretende partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Die geometrischen Probleme, die in diesem Kapitel erledigt werden sollen, finden ihren analytischen Ausdruck in partiellen Differentialgleichungen *zweiter* Ordnung. Wir lösen die Probleme hier durch *specielle* Methoden, sodass wir die allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen *zweiter* Ordnung nicht vorauszusetzen brauchen und aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen *erster* Ordnung nur das benutzen, was wir schon bisher abgeleitet haben. Besonders beachtenswert ist, dass wir nicht einmal die *Existenz* von Lösungen der partiellen Differentialgleichungen *zweiter* Ordnung vorauszusetzen brauchen, da unsere Betrachtungen selbst die Existenz von Lösungen für die hier zu behandelnden besonderen Differentialgleichungen nachweisen werden.

Die in diesem Kapitel anzuwendende Methode beruht auf den in diesem Abschnitt eingeführten Begriffen, und der Zweck des Kapitels ist der, durch Anwendung dieser Begriffe dem Leser eine Vorstellung von ihrer Wichtigkeit zu geben. Später werden wir Gelegenheit haben, in viel ausgedehnterem Masse die Tragweite unserer Begriffe und Methoden klar zu stellen.

Die ersten Untersuchungen über partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung rühren von d'Alembert, Euler, Lagrange und Laplace her, die sich aber nur auf Gleichungen beziehen, die in der abhängigen Veränderlichen und ihren Differentialquotienten linear sind. Monge war wohl der erste, der auch nicht-lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung genauer betrachtete. Man hat mit Grund bemerkt, dass die theoretische Grundlage der Untersuchungen von Monge unvollkommen war. In der Gegenwart aber ist es vielleicht wichtiger zu betonen, dass Monge durch Verwendung geometrischer Anschauungen für die Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mächtige Hülfsmittel geschaffen hat, deren Tragweite von seinen Nachfolgern nicht hinreichend gewürdigt wurde, wenn sie auch Monge die grösste Bewunderung zollen. Man ist jedenfalls nach Monge in der Folgezeit zunächst nicht auf der von ihm gebrochenen Bahn weitergegangen.

Nachdem besonders durch Poncelet und Plücker eine Reihe neuer wichtiger Begriffe in die Geometrie eingeführt worden waren, lag es nahe, diese Fortschritte auch für die Theorie der partiellen

Differentialgleichungen zu verwerten, was aber erst in den letzten Jahrzehnten geschehen ist.

Hiermit glauben wir die Gesichtspunkte charakterisiert zu haben, von denen aus die Untersuchungen dieses Kapitels, die, wie gesagt, nur specieller Natur sind und später in der angegebenen Richtung wesentlich zu erweitern sind, angesehen werden sollen.

Noch bemerken wir, dass wir Gewicht darauf legen, dass der Leser durch dieses Kapitel mit einigen unter den Vorkommnissen vertraut wird, die in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in grosser Mannigfaltigkeit auftreten*).

§ 1. Die Flächen, deren Haupttangenten der einen Schar einem gegebenen Liniencomplex angehören.

Jede Monge'sche Gleichung **Probleme in Zusammenhang mit Complexen.**

$$\Omega(x, y, z;\ dx, dy, dz) = 0$$

giebt zu einer Reihe von Integrationsproblemen Veranlassung, von denen wir einige schon früher besprachen. Vgl. § 1 des 7. Kap., S. 256. Insbesondere gilt dies von den Monge'schen Gleichungen, die nach Satz 1 des § 1, 7. Kap., S. 254, Liniencomplexe definieren, d. h. die von der Form sind:

$$(1) \qquad \Phi(ydz - zdy,\ zdx - xdz,\ xdy - ydx,\ dx,\ dy,\ dz) = 0.$$

Dabei wollen wir annehmen, dass der Liniencomplex *nicht linear* sei. Die schon früher besprochenen Integrationsprobleme sind hier die beiden Probleme:

Problem I: *Bestimmung der Curven, die dem Complex angehören,* d. h. der Integralcurven der Monge'schen Gleichung (1). **Problem I.**

Problem II: *Bestimmung der Flächen, die in jedem ihrer Punkte den zugehörigen Complexkegel berühren.* **Problem II.**

Dies zweite Problem findet nach Satz 3, § 1 des 7. Kap., S. 260, seinen analytischen Ausdruck in einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$(2) \qquad F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0,$$

die bei der gemachten Annahme nicht linear ist. (Vgl. S. 267.) Jede Fläche von der gesuchten Art wird nach S. 260 von ∞^1 Complexcurven überdeckt und nach Satz 26, § 5 des 7. Kap., S. 308, sind diese Curven *Haupttangentencurven* der Fläche.

*) Die Theorien dieses Kapitels hat Lie entwickelt und zwar fast sämtlich in den Jahren 1869 bis 72.

Eine Fläche von der gesuchten Art wird also von den Tangenten dieser ∞^1 Curven osculiert. Es ist denkbar, dass diese Curven selbst Geraden des Complexes, also die Integralflächen Regelflächen sind. Sehen wir hiervon ab, so werden die erwähnten Tangenten eine Schar von ∞^2 die Fläche osculierenden Geraden bilden. Ihre Gesamtheit ist ein im Complex enthaltenes Strahlensystem. Die beiden Mäntel der Brennfläche des Strahlensystems (vgl. § 2 des 7. Kap., S. 270, 271) fallen hier in die betrachtete Fläche zusammen. Da in einem Strahlensystem jeder Strahl nur je zwei benachbarte schneidet (vgl. S. 270 sowie Satz 11, § 4 des 7. Kap., S. 294), so folgt, dass er die Brennfläche nur dann osculieren kann, wenn die beiden Mäntel der Brennfläche zusammenfallen, sodass auch die beiden Punkte, in denen der Strahl die Mäntel berührt, zusammenrücken. Unser Problem II ist also, abgesehen von dem angegebenen Ausnahmefall, identisch mit dem Problem, *alle im vorgelegten Liniencomplex enthaltenen Strahlensysteme zu bestimmen, deren Geraden die Brennfläche osculieren.*

An unsere beiden Probleme I und II reihen wir hier noch zwei andere an, zunächst das folgende:

Problem III. Problem III: *Bestimmung der Flächen, deren Haupttangenten der einen Schar dem vorgelegten Liniencomplex angehören.*

Dies Problem steht mit dem Problem II in genauestem Zusammenhang und lässt sich sogar, wie wir sehen werden, darauf zurückführen. Zunächst aber ist es durchaus von ihm verschieden, da es auf die Integration einer partiellen Differentialgleichung *zweiter* Ordnung zurückkommt.

In der That, die Haupttangentencurven der Fläche:

$$z = \omega(x, y)$$

bestimmen sich, wie man weiss, durch die Differentialgleichung zwischen x und y:

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0, \tag{3}$$

wenn

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \equiv r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} \equiv s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \equiv t$$

gesetzt wird. Nun aber soll die Richtung $(dx : dy : dz)$ einer der beiden Haupttangentencurven, die durch den Punkt (x, y, z) der Fläche gehen, der Monge'schen Gleichung (1) genügen. Da auf der Fläche

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

ist, wenn

$$\frac{\partial z}{\partial x} \equiv p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} \equiv q$$

gesetzt wird, so lautet diese Bedingung so:

$$\Phi(yp\,dx + (yq - z)dy,\ (z - xp)dx - xq\,dy,\ x\,dy - y\,dx,\ dx,\ dy,\ p\,dx + q\,dy) = 0.$$

Wenn wir $\frac{dy}{dx}$ mit y' bezeichnen, so fordern wir also, dass y' eine gemeinsame Wurzel der beiden Gleichungen:

$$(3') \qquad r + 2sy' + ty'^2 = 0$$

und

$$\Phi(yp + (yq - z)y', \ (z - xp) - xqy', \ xy' - y, \ 1, \ y', \ p + qy') = 0$$

sei. Aus der letzten Gleichung wird sich y' als Function von x, y, z, p, q ergeben:

$$y' = N(x, y, z, p, q),$$

sodass das Einsetzen dieses Wertes in (3') giebt:

$$(4) \qquad r + 2N(x, y, z, p, q) \cdot s + N(x, y, z, p, q)^2 \cdot t = 0.$$

Die Functionen $z = \omega(x, y)$, die dieser *partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung für z* genügen, geben die Flächen, deren Haupttangenten der einen Schar dem vorgelegten Liniencomplex angehören. Part. Diffgl. 2. O.

Das Problem III findet hiernach seinen Ausdruck in einer partiellen Differentialgleichung *zweiter* Ordnung. Von vornherein kennen wir nun zweierlei Integralflächen dieser Differentialgleichung. Integralflächen.

Erstens nämlich ist jede *Regelfläche, deren Geraden dem Complex angehören*, eine Integralfläche, denn die Geraden der Regelfläche sind ja Haupttangentencurven.

Zweitens ist jede *Fläche, die in jedem ihrer Punkte von dem zugeordneten Complexkegel berührt wird*, eine Integralfläche, denn wie wir oben ausführten, enthält jede solche Fläche ∞^1 Curven, die zugleich dem Complex angehören und Haupttangentencurven sind. Die soeben besprochenen Flächen sind die Integralflächen der partiellen Differentialgleichung *erster* Ordnung (2).

Nun aber behaupten wir, dass es ausser diesen beiden Kategorien von Integralflächen *keine* weiteren Integralflächen der partiellen Differentialgleichung *zweiter* Ordnung (4) giebt. In der That, soll zunächst die Fläche ∞^1 *geradlinige* Haupttangentencurven enthalten, die zugleich dem Complex angehören, so muss sie notwendig eine jener Regelflächen sein. Enthält sie dagegen ∞^1 *krumme* Haupttangentencurven, die zugleich Complexcurven sind, so ist längs jeder solchen Curve die Tangentenebene der Fläche mit der Schmiegungsebene der Curve identisch. Nach Satz 21 des § 5, 7. Kap., S. 303, ist fernerhin die Schmiegungsebene der Complexcurve eine Tangentialebene des dem betreffenden Punkte zugeordneten Complexkegels. Die Fläche muss also in allen ihren Punkten von den zugehörigen Complexkegeln berührt werden und ist demnach eine der in Problem II betrachteten Integralflächen der partiellen Differentialgleichung *erster* Ordnung (2).

Das Problem III ist folglich zurückgeführt auf das Problem II.

Zur Erleichterung der Redeweise sagen wir in der Folge, dass eine partielle Differentialgleichung *erster* Ordnung für z:

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{2}$$

Intermediäre Integralgl.

eine *intermediäre Integralgleichung* einer partiellen Differentialgleichung *zweiter* Ordnung für z:

$$\Psi(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \tag{5}$$

ist, sobald ihre Integralflächen (abgesehen von gewissen singulären) auch diese Differentialgleichung zweiter Ordnung erfüllen.

Hiernach ist die partielle Differentialgleichung (2), auf die das Problem II zurückkam, eine intermediäre Integralgleichung der partiellen Differentialgleichung (4) des Problems III.

Es ist leicht zu erkennen, dass die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung (4) unendlich viele intermediäre Integralgleichungen hat. Greifen wir nämlich aus den ∞^3 Geraden des Complexes deren ∞^2 heraus, also ein Strahlensystem, so sind alle Regelflächen dieses Strahlensystems Integralflächen der partiellen Differentialgleichung (4). Ferner ordnet das Strahlensystem jedem Punkte p eine Gerade g (allgemeiner: einige Geraden) zu und zwar so, dass allen Punkten p von g dieselbe Gerade g zugeordnet ist. Soll eine Fläche in jedem ihrer Punkte p die zugeordnete Gerade g berühren, so wird sie daher die Gerade enthalten. Die Flächen also, die in allen ihren Punkten Geraden des Strahlensystems berühren, sind identisch mit den Regelflächen, deren Geraden dem Strahlensystem angehören. Hierbei sehen wir von den Brennflächen der Strahlensysteme ab, die zwar singuläre Lösungen von (2) sind, aber (5) nicht erfüllen.

Weiterhin wird nun die Forderung, dass die Fläche $z = f(x, y)$ in jedem ihrer Punkte die hindurchgehende gegebene Gerade des Strahlensystems berühre, durch eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung ausgedrückt. Denn wenn α, β, γ die als Functionen von x, y, z bekannten Richtungscosinus der durch den Punkt (x, y, z) gehenden Geraden des Strahlensystems sind, so findet die Forderung ihren Ausdruck in der Gleichung:

$$\alpha p + \beta q - \gamma = 0. \tag{6}$$

Dies ist die partielle Differentialgleichung des Problems.

Es giebt also unendlich viele solche *lineare* partielle Differentialgleichungen erster Ordnung (6), deren Integralflächen sämtlich Regelflächen sind, die dem Complex angehören, sodass also diese Integralflächen zugleich Integralflächen der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung (4) sind. Wir kennen folglich unendlich viele intermediäre Integralgleichungen der partiellen Differentialgleichung (4). Die *intermediäre Integralgleichung* $F = 0$ ist im Gegensatz zu diesen unendlich vielen *nicht linear.*

Beiläufig wollen wir noch den Begriff: *allgemeine Lösung* einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung einführen. Wir verstehen darunter eine Schar von Integralflächen, die so viele Flächen umfasst, dass es unter diesen Flächen stets eine giebt, die eine allgemein gewählte Curve enthält sowie längs dieser Curve nach einem allgemein gewählten Gesetze gegebene Tangentenebenen hat. **Allgemeine Lösung**

Mit Benutzung dieser Bezeichnungsweise können wir erkennen, dass die Regelflächen, deren Geraden dem vorgelegten Complex angehören, eine allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung (4) darstellen. Um dies zu beweisen, müssen wir zeigen, dass es stets eine solche Regelfläche von Complexgeraden giebt, die eine beliebig gegebene Curve enthält und längs dieser Curve beliebig gewählte Tangentenebenen hat.

Es sei c die gewählte Curve (siehe Fig. 73). In jedem Punkte p der Curve sei ferner eine Ebene e gegeben, die daselbst die Curve berührt. Der Complexkegel des Punktes p hat mit der Ebene e mindestens eine Complexgerade g gemein. Wir können so ∞^1 Complexgeraden längs c construieren, die eine Regelfläche bilden. In jedem Punkte p von c kennen wir dann zwei Tangenten der Regelfläche, nämlich die Tangente an c und die Gerade g. Die Tangentenebene der Regelfläche im Punkte p ist also in der That die vorgeschriebene Ebene e.

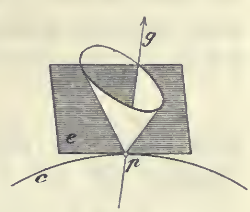

Fig. 73.

Wir fassen unsere Ergebnisse zusammen in dem

Theorem 12: *Alle Flächen, deren Haupttangentencurven der einen Schar einem gegebenen nicht linearen Liniencomplexe* **Ergebnis.**

$$\Phi(ydz - zdy,\ zdx - xdz,\ xdy - ydx,\ dx,\ dy,\ dz) = 0$$

angehören, lassen sich definieren als die Integralflächen einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung von der Form:

$$r + 2Ns + N^2 t = 0.$$

Hierin ist N eine Function von x, y, z, p, q, die sich aus den Gleichungen

$$\Phi = 0, \quad dz - p\,dx - q\,dy = 0, \quad dy - N\,dx = 0$$

durch Elimination von dx, dy, dz ergiebt. Die Integralflächen sind entweder Regelflächen und zwar beliebige Regelflächen des Liniencomplexes, oder aber sie sind beliebige Integralflächen derjenigen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

deren Elementarkegel die Kegel des vorgelegten Complexes sind. Es ist also $F = 0$ eine nicht lineare intermediäre Integralgleichung erster Ordnung von der vorliegenden partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Letztere besitzt unendlich viele lineare intermediäre Integralgleichungen erster Ordnung; nämlich die Regelflächen der Geraden irgend eines im Complexe enthaltenen Strahlensystems sind stets die Integralflächen einer derartigen Gleichung.

Schliesslich wollen wir unsere Theorie durch mehrere Beispiele erläutern.

Beispiele **1. Beispiel:** Wir setzten bisher voraus, der vorgelegte Complex sei nicht linear. Nehmen wir nun einmal an, es sei ein *linearer, aber nicht specieller*, sodass wir als seine Monge'sche Gleichung nach Satz 18, § 3 des 6. Kap., S. 223, diese wählen können:

$$x\,dy - y\,dx + dz = 0.$$

Hier lautet die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung des Problems III, wie man sofort ausrechnen kann, so:

$$(x + q)^2 r + 2(x + q)(y - p) s + (y - p)^2 t = 0.$$

Ihre Integralflächen sind nur die Regelflächen, deren Geraden dem Complex angehören. Es giebt nämlich keine Fläche, die in jedem ihrer Punkte die Ebene berührt, die dem Punkte durch den linearen Complex zugeordnet wird. Die partielle Differentialgleichung erster Ordnung (2) ist hier eben gar nicht vorhanden. (Vgl. § 1 des 7. Kap.)

Ist der Complex ein *specieller linearer*, besteht er also aus allen Treffgeraden einer gewissen Geraden, so verlegen wir letztere in die unendlich ferne Gerade der (xz)-Ebene, sodass die zugehörige Monge'sche Gleichung lautet:

$$dy = 0.$$

Als die Differentialgleichung (4) ergiebt sich hier einfach:

$$r = 0.$$

Ihre Integralflächen lassen sich sofort durch Integration bestimmen als die Regelflächen:

$$z = Y(y)\,x + Y_1(y),$$

deren Geraden der (xz)-Ebene parallel sind, also dem Complex angehören.

2. Beispiel: Der Complex bestehe aus allen Tangenten einer gegebenen nicht abwickelbaren Fläche Ω (vgl. § 1 des 7. Kap., S. 255). In diesem Falle ist die partielle Differentialgleichung (2) sofort zu integrieren. Da nämlich die Elementarkegel hier Tangentenkegel der Fläche Ω sind, so sind die Integralflächen die abwickelbaren Flächen, die Ω umhüllen, und zu ihnen tritt noch Ω selbst. (Vgl. S. 266.) Die allgemeine Integralfläche von (2) ist also eine Regelfläche, deren Geraden dem Complex angehören. Hier reduciert sich daher die Gesamtheit *aller* Integralflächen der partiellen Differentialgleichung *zweiter* Ordnung (4) auf die aller Regelflächen, deren Erzeugende dem Complex angehören. Im vorliegenden Fall sind die Charakteristiken der Gleichung (2) die Tangenten der Fläche Ω.

3. Beispiel: Es liege der Complex aller Geraden vor, die eine feste unendlich ferne Curve c treffen. Hier sind die Integralflächen der partiellen Differentialgleichung (2) einerseits die Ebenen, die c berühren, andererseits alle Developpabeln, die c enthalten. (Vgl. § 1 des 7. Kap., S. 265.) Man sieht, dass sie auch in diesem Falle unter den Regelflächen enthalten sind, deren Geraden dem Complex angehören. Die Charakteristiken der Gleichung (2) sind auch hier Geraden, nämlich die Treffgeraden der Curve c.

4. Beispiel: Es liege ein tetraedraler Complex vor, dessen Tetraeder wir wie früher aus den drei Coordinatenebenen und aus der unendlich fernen Ebene zusammensetzen. (Vgl. § 1 des 8. Kap.) In diesem Falle sind die Integralflächen der Gleichung (2) dadurch leicht zu bestimmen, dass man die logarithmische Abbildung vornimmt (vgl. § 5 des 8. Kap., S. 360). Dabei geht, wie wir schon sahen, die Monge'sche Gleichung des tetraedralen Complexes in eine Monge'sche Gleichung im neuen Raume über, deren Elementarkegel bis ins Unendliche verlängert sämtlich einen festen Kegelschnitt K treffen, womit wir zum vorigen Fall zurückkommen. Im ursprünglichen Raume sind also die Integralflächen von (2) Flächen, deren Charakteristiken Complexcurven mit je ∞^1 Linienelementen gleicher Gattung sind. Da diese Curven *krumm* sind, so ergiebt sich hier, dass die partielle Differentialgleichung (4) nicht nur solche Integralflächen hat, deren Haupttangentencurven der einen Schar *gerade* sind. Im gegenwärtigen Beispiel umfasst daher die auf S. 373 erwähnte allgemeine Lösung, nämlich die Schar der Regelflächen, deren Geraden dem tetraedralen Complex angehören, *nicht* alle Integralflächen der Differentialgleichung (4).

Die vorgeführten Beispiele legen die Frage nahe, unter welchen Bedingungen die Integralflächen der partiellen Differentialgleichung *zweiter* Ordnung (4) *sämtlich* Regelflächen des Complexes sind, d. h. unter welchen Bedingungen die Integralflächen der partiellen Differentialgleichung *erster* Ordnung (2) sämtlich Regelflächen des Complexes sind. Wir behalten uns vor, hierauf bei anderer Gelegenheit zurückzukommen; wir werden sehen, dass diese Frage identisch ist mit der Frage, wann die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung (2) *Geraden* sind.

§ 2. Eine Classe von partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Integralflächen Translationsflächen sind*).

Im ersten Paragraphen haben wir drei Integrationsprobleme be sprochen, die mit den Monge'schen Gleichungen gegebener Liniencomplexe verknüpft sind. Ein viertes Problem ist das folgende:

Problem IV. **Problem IV:** *Gegeben ist ein nicht linearer Liniencomplex. Gesucht werden die Flächen, die zwei conjugierte Scharen von Curven des Complexes enthalten.*

Derartige Flächen wollen wir als *conjugiert zu dem gegebenen Liniencomplex* bezeichnen. Mit Benutzung dieser Redeweise können wir das Problem dann so aussprechen: *Wir suchen alle zu einem gegebenen Liniencomplex conjugierten Flächen.*

Gegenwärtig werden wir dies Problem nur für den speciellen Fall erledigen, dass der Complex aus allen *Treffgeraden einer ebenen Curve* besteht; im nächsten Paragraphen erledigen wir das Problem alsdann noch für den Fall eines tetraedralen Complexes. Von besonderem Interesse ist der Fall, dass der Complex aus allen Treffgeraden des Kugelkreises, d. h. aus allen Minimalgeraden, besteht. In diesem Fall haben die gesuchten Flächen die Eigenschaft, dass die auf ihnen verlaufenden Minimalcurven zwei conjugierte Scharen sind, sodass die Haupttangentencurven der Flächen ein Orthogonalsystem bilden, also die Flächen allgemeine *Minimalflächen* sind. Indem wir das oben formulierte Problem überhaupt für den Fall des Complexes aller Treffgeraden einer ebenen Curve lösen, bestimmen wir folglich insbesondere auch alle Minimalflächen im Raume. —

---

*) Einigermassen ausführlich stellte Lie diese Theorien zum ersten Male im Archiv for Math. og Naturv., Christiania, 2. Bd. (1877) dar.

Um unser Problem anzugreifen, wollen wir uns also eine ebene *krumme* Curve K geben und den Complex aller Treffgeraden von K betrachten. Da das Conjugiertsein eine projective Eigenschaft ist, so leuchtet ein, dass wir ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit die Curve K als Curve in der unendlich fernen Ebene auffassen dürfen. Ist nun eine Fläche zu dem vorgelegten Liniencomplex conjugiert, so wird die Tangentenebene eines Punktes p der Fläche die unendlich ferne Curve K in mehreren Punkten treffen (Fig. 74). Darunter müssen zwei Punkte P_1, P_2 so enthalten sein, dass die Richtungen von p nach P_1 und nach P_2 im Flächenpunkte p zu einander conjugiert sind. Es ist nützlich, die Curve K zunächst als zerfallend in zwei Curven K_1 und K_2 aufzufassen, sodass P_1 auf K_1 und P_2 auf K_2 liegt. Ob dann diese beiden Curven Zweige derselben analytischen Curve sind oder nicht, kommt im Folgenden zunächst nicht in Betracht.

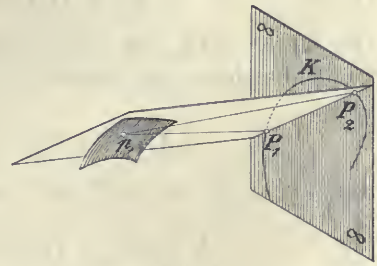

Fig. 74.

Eine Richtung im Raume (x, y, z) wird bestimmt durch die Verhältnisse der Incremente dx, dy, dz, welche die Coordinaten x, y, z eines Punktes beim Fortschreiten nach dieser Richtung erfahren. Da alle einander parallelen Geraden die unendlich ferne Ebene in demselben Punkte treffen, so können wir dx, dy, dz als homogene Punktcoordinaten in der unendlich fernen Ebene auffassen (vgl. § 1 des 7. Kap., S. 255). Die Curven K_1 und K_2 können also analytisch durch zwei Gleichungen von der Form Analyt. Form d. Problems.

$$(7) \qquad \frac{dy_1}{dz_1} - \varphi_1\left(\frac{dx_1}{dz_1}\right) = 0, \quad \frac{dy_2}{dz_2} - \varphi_2\left(\frac{dx_2}{dz_2}\right) = 0$$

gegeben werden oder auch so:

$$(7') \qquad \eta_1 - \varphi_1(\xi_1) = 0, \quad \eta_2 - \varphi_2(\xi_2) = 0.$$

Hier bedeuten dann ξ_1, η_1 nicht-homogene Punktcoordinaten der Curve K_1 und ξ_2, η_2 nicht-homogene Punktcoordinaten der Curve K_2.

Wenn nun die beiden Richtungen, die vom Flächenpunkte p oder (x, y, z) in der Tangentenebene nach P_1 und P_2 gehen, bestimmt sind durch die Verhältnisse $dx_1 : dy_1 : dz_1$ bez. $dx_2 : dy_2 : dz_2$, so sind diese Richtungen, wie bekannt, nur dann zu einander conjugiert, wenn

$$dx_1\, dx_2 \cdot r + (dx_1\, dy_2 + dx_2\, dy_1) \cdot s + dy_1\, dy_2 \cdot t = 0$$

ist, sobald auf der Fläche:

$$r \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

ist. Die Forderung lautet daher, wenn mit $dz_1 dz_2$ dividiert wird:

$$\xi_1 \xi_2 r + (\xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1) s + \eta_1 \eta_2 t = 0. \tag{8}$$

Da ferner $(dx_1 : dy_1 : dz_1)$ und $(dx_2 : dy_2 : dz_2)$ Richtungen in der Tangentenebene des Punktes (x, y, z) sein sollen, so muss ausserdem sein:

$$dz_1 - p\,dx_1 - q\,dy_1 = 0, \quad dz_2 - p\,dx_2 - q\,dy_2 = 0,$$

wenn $p \equiv \frac{\partial z}{\partial x}$, $q \equiv \frac{\partial z}{\partial y}$ ist, oder auch:

$$1 - p\xi_1 - q\eta_1 = 0, \quad 1 - p\xi_2 - q\eta_2 = 0. \tag{9}$$

Es bestehen somit zwischen $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, p, q, r, s, t$ die fünf Gleichungen (7′), (8) und (9). Aus ihnen lassen sich $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$ eliminieren. Denn aus (7′) und (9) folgen für $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$ gewisse Functionen von p und q, die in (8) eingesetzt eine Gleichung ergeben von der Form:

$$R(p, q)\, r + 2S(p, q)\, s + T(p, q)\, t = 0. \tag{10}$$

Das Problem, alle Flächen zu finden, die hinsichtlich des Liniencomplexes aller Treffgeraden einer (unendlich fernen) ebenen Curve conjugiert sind, findet mithin seinen analytischen Ausdruck in einer *partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung* von der Form (10), die frei von x, y, z ist. In ihr sind allerdings die Functionen R, S, T nicht ganz beliebige Functionen von p, q, obgleich sie von den willkürlich zu wählenden Functionen φ_1 und φ_2 abhängen. Es ist aber für die Folge nicht nötig, die Formen von R, S, T genauer zu kennen.

Partielle Diffgl. 2. O.

Beispiel.

Beispiel: Sind die Curven K_1 und K_2 Geraden, etwa die unendlich fernen Geraden der (xz)-Ebene und der (yz)-Ebene, so lauten die Gleichungen (7′):

$$\eta_1 = 0, \quad \xi_2 = 0,$$

sodass sich als partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung einfach

$$s = 0$$

ergiebt. Die Integralflächen dieser Differentialgleichung sind die Flächen:

$$z = X(x) + Y(y).$$

Hierin sind X und Y beliebige Functionen von x bez. y allein. Jede Integralfläche schneidet alle Ebenen parallel der (xz)-Ebene in congruenten und gleichgestellten Curven und ebenso alle Ebenen parallel der (yz)-Ebene. Sie ist also eine Translationsfläche von besonderer Art (vgl. S. 361).

Wir denken uns, es liege ein bestimmtes Curvenpaar K_1 und K_2 (oder eine einzige Curve K) in der unendlich fernen Ebene vermöge der Gleichungen (7′) vor, und es sei (10) die zugehörige partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung unseres Problems. Jede Integralfläche enthält zwei conjugierte Scharen von Curven c_1, c_2, sodass die Tangenten der Curven c_1 sämtlich K_1 und die Tangenten der Curven c_2 sämtlich K_2 treffen. Längs einer Curve c_2 construieren wir die Tangenten an die hindurchgehenden Curven c_1. Sie bilden nach einem bekannten Satze der Flächentheorie eine Developpabele, und die Erzeugenden der Developpabeln treffen die unendlich ferne Curve K_1. Hierbei sind zwei Fälle denkbar, erstens der, dass die Developpabele die Curve K_1 völlig enthält, zweitens der, dass ihre Geraden nach einem bestimmten Punkt von K_1 gehen. Im ersteren Falle würde es Developpabeln geben, die sämtlich K_1 enthalten und die Integralfläche berühren, und zwar berührten sie die Fläche nach ∞^1 verschiedenen Curven c_2. Sobald also die Integralfläche nicht selbst eine Developpabele ist, deren Geraden K_1 treffen, so folgt, dass in diesem Falle ∞^1 Developpabeln gleichzeitig der Curve K_1 und der Integralfläche umschrieben wären. Dies ist jedoch absurd. Mithin liegt der Fall vor, dass jede der ∞^1 Developpabeln aus ∞^1 Geraden nach einem gemeinsamen Punkt auf K_1 besteht und somit ein *Cylinder* ist.

Sobald also eine Integralfläche von (10) nicht selbst eine Developpabele ist, deren Geraden K_1 und K_2 treffen, so giebt es zwei Scharen von ∞^1 Cylindern, welche die Fläche nach den conjugierten Curven c_2 bez. c_1 berühren.

Die Coordinaten x, y, z der Punkte einer solchen Integralfläche können als Functionen zweier Parameter aufgefasst werden; und wir dürfen insbesondere ξ_1 und ξ_2 als die Parameter wählen, denn zu jedem Punkte p der Fläche gehört ein bestimmter Punkt P_1 der Curve K_1 und ein bestimmter Punkt P_2 der Curve K_2, und es sind andererseits P_1 und P_2 durch ξ_1, ξ_2 nach (7′) bestimmt.

Die Curven c_2 der Fläche sind nunmehr die Curven $\xi_1 = \text{Const.}$, da die Cylinder, die der Fläche längs der Curven c_2 umschrieben sind, je einen bestimmten Punkt P_1 von K_1 enthalten. Entsprechend giebt $\xi_2 = \text{Const.}$ die Curven c_1. Nach (7′) ergiebt sich also, dass auf der Integralfläche x, y, z solche Functionen von ξ_1, ξ_2 sind, dass

$$\frac{\partial x}{\partial \xi_1} : \frac{\partial y}{\partial \xi_1} : \frac{\partial z}{\partial \xi_1} = \xi_1 : \varphi_1(\xi_1) : 1,$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi_2} : \frac{\partial y}{\partial \xi_2} : \frac{\partial z}{\partial \xi_2} = \xi_2 : \varphi_2(\xi_2) : 1$$

oder auch:

$$(11)\qquad \begin{cases} dx = \varrho_1 \xi_1 \, d\xi_1 + \varrho_2 \xi_2 \, d\xi_2, \\ dy = \varrho_1 \varphi_1(\xi_1) \, d\xi_1 + \varrho_2 \varphi_2(\xi_2) \, d\xi_2, \\ dz = \varrho_1 \, d\xi_1 + \varrho_2 \, d\xi_2 \end{cases}$$

ist. Hierin sind ϱ_1, ϱ_2 noch unbekannte Functionen von ξ_1, ξ_2. Stellen wir die Integrabilitätsbedingungen für die vollständigen Differentiale dx, dy, dz auf, so kommt:

$$\xi_1 \frac{\partial \varrho_1}{\partial \xi_2} = \xi_2 \frac{\partial \varrho_2}{\partial \xi_1},$$

$$\varphi_1(\xi_1) \frac{\partial \varrho_1}{\partial \xi_2} = \varphi_2(\xi_2) \frac{\partial \varrho_2}{\partial \xi_1},$$

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial \xi_2} = \frac{\partial \varrho_2}{\partial \xi_1}.$$

Da die zweireihigen Determinanten der Matrix:

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \varphi_1(\xi_1) & \varphi_2(\xi_2) \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

nicht sämtlich verschwinden, weil sonst die Punkte P_1 und P_2 jedesmal zusammenfielen, also die beiden conjugierten Scharen c_1 und c_2 in eine Schar, daher in eine Schar von Haupttangentencurven zusammenfielen, und wir somit auf das im ersten Paragraphen behandelte Problem und damit nach S. 375 auf *Developpabeln* zurückkämen, so folgt, dass

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial \xi_2} \equiv \frac{\partial \varrho_2}{\partial \xi_1} \equiv 0$$

ist. ϱ_1 ist demnach eine Function von ξ_1 allein und ϱ_2 eine Function von ξ_2 allein. Die Formeln (11) lassen sich alsdann integrieren und geben:

Integralflächen.

$$(12)\qquad \begin{cases} x = \int \varrho_1(\xi_1)\, \xi_1 \, d\xi_1 + \int \varrho_2(\xi_2)\, \xi_2 \, d\xi_2, \\ y = \int \varrho_1(\xi_1)\, \varphi_1(\xi_1) \, d\xi_1 + \int \varrho_2(\xi_2)\, \varphi_2(\xi_2) \, d\xi_2, \\ z = \int \varrho_1(\xi_1) \, d\xi_1 + \int \varrho_2(\xi_2) \, d\xi_2. \end{cases}$$

Die Gleichungen der Integralflächen haben also die allgemeine Form:

$$(12')\qquad \begin{cases} x = \Phi_1(\xi_1) + \Phi_2(\xi_2), \\ y = \Psi_1(\xi_1) + \Psi_2(\xi_2), \\ z = X_1(\xi_1) + X_2(\xi_2). \end{cases}$$

Setzen wir für ξ_2 alle möglichen Constanten, so ergeben sich lauter congruente und gleichgestellte Curven auf der Fläche. Dasselbe gilt, wenn für ξ_1 alle möglichen Constanten gesetzt werden. Mithin enthält die Fläche zwei Scharen congruenter und gleichgestellter Curven und ist demnach eine *Translationsfläche* (vgl. § 5 des 8. Kap., S. 361). Trans-lations-flächen.

Umgekehrt: Wählen wir im Raume zwei Curven c_1 und c_2 so, dass ihre Tangenten sämtlich die Curve K_1 bez. K_2 treffen, anders ausgedrückt, wählen wir als Curve c_1 bez. c_2 die Rückkehrcurve einer abwickelbaren Fläche, die K_1 bez. K_2 enthält, so bestimmen diese beiden Curven zunächst offenbar eine Translationsfläche, die man erhält, wenn man beide Curven c_1, c_2 als starr voraussetzt und alsdann die eine so an der andern entlang bewegt, dass sie immer dieselbe Stellung bewahrt. Die beiden Scharen congruenter und gleichgestellter Curven auf der Fläche sind, wie wir wissen (vgl. S. 362), zu einander conjugiert. Da ferner K_1 und K_2 unendlich fern liegen, so enthalten die Tangentenflächen dieser Curven sämtlich K_1 bez. K_2. Also ist die Fläche eine Integralfläche unserer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung (10). Umkehrung d. Betrachtg.

Die vorhergehende Überlegung vervollständigt dies Ergebnis, indem sie zeigt, dass diese Construction *alle* Integralflächen der partiellen Differentialgleichung (10) liefert. Allerdings schlossen wir oben den Fall aus, dass die Integralfläche eine Developpabele ist, deren Geraden K_1 und K_2 treffen. Dieser Fall kann, wenn von Cylindern abgesehen wird, nur dann eintreten, wenn K_1 und K_2 eine irreducibele Curve K bilden; dann sind die Developpabeln, die K enthalten, sämtlich Integralflächen. Auf ihnen fallen die beiden conjugierten Curvenscharen in die Schar der geradlinigen Erzeugenden zusammen. Nach den Ergebnissen des ersten Paragraphen sind diese Developpabeln die Integralflächen einer partiellen Differentialgleichung *erster* Ordnung, die daher eine intermediäre Integralgleichung von (10) ist.

Die vorhin angegebene Construction der Translationsflächen kann dazu dienen, die Integralflächen der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung (10) ohne jede Integration zu bestimmen. Eine Ebene nämlich, welche die unendlich ferne Curve K_1 oder Bestimmg. d. Integralfl. ohne Integration.

$$\eta_1 - \varphi_1(\xi_1) = 0$$

oder

$$\frac{dy_1}{dz_1} - \varphi_1\left(\frac{dx_1}{dz_1}\right) = 0$$

berührt, hat, wie man ohne Mühe erkennen kann, eine Gleichung von der Form:

$$\varphi_1'(\xi_1)\, x - y + (\varphi_1(\xi_1) - \xi_1 \varphi_1'(\xi_1))\, z + m = 0,$$

in der m eine beliebige Constante ist, während x, y, z die laufenden Coordinaten bedeuten. Diese Ebene berührt die Curve K_1 im Punkte (ξ_1, η_1). Wollen wir die Rückkehrcurve c_1 einer Developpabeln haben, die K_1 enthält, so müssen wir ∞^1 derartige Ebenen auswählen. Dies geschieht, indem wir für m eine beliebige Function $\omega_1(\xi_1)$ setzen und ξ_1 alle Werte durchlaufen lassen. Die Rückkehrcurve selbst ergiebt sich, indem wir die Gleichung

$$\varphi_1'(\xi_1)x - y + (\varphi_1(\xi_1) - \xi_1\varphi_1'(\xi_1))z + \omega_1(\xi_1) = 0$$

zweimal nach ξ_1 differenzieren:

$$\varphi_1''x - \xi_1\varphi_1''z + \omega_1' = 0,$$
$$\varphi_1'''x - (\varphi_1'' + \xi_1\varphi_1''')z + \omega_1'' = 0$$

und die drei letzten Gleichungen nach x, y, z auflösen. Es kommt:

$$x = \frac{\xi_1(\varphi_1''\omega_1'' - \varphi_1'''\omega_1') - \varphi_1''\omega_1'}{\varphi_1''^2},$$
$$y = \frac{\varphi_1\varphi_1''\omega_1'' - (\varphi_1'\varphi_1'' + \varphi_1\varphi_1''')\omega_1' + \varphi_1''^2\omega_1}{\varphi_1''^2},$$
$$z = \frac{\varphi_1''\omega_1'' - \varphi_1'''\omega_1'}{\varphi_1''^2}.$$

Analoge Formeln ergeben sich für die Rückkehrcurve c_2 einer Developpabeln, die K_2 enthält. Eine Translationsfläche also, die ∞^1 Curven enthält, die congruent und gleichgestellt mit c_1 sind, sowie ∞^1 Curven, die congruent und gleichgestellt mit c_2 sind, stellt sich so dar:

$$(13)\quad \begin{cases} x = \dfrac{\xi_1(\varphi_1''\omega_1'' - \varphi_1'''\omega_1') - \varphi_1''\omega_1'}{\varphi_1''^2} + \dfrac{\xi_2(\varphi_2''\omega_2'' - \varphi_2'''\omega_2') - \varphi_2''\omega_2'}{\varphi_2''^2}, \\ y = \dfrac{\varphi_1\varphi_1''\omega_1'' - (\varphi_1'\varphi_1'' + \varphi_1\varphi_1''')\omega_1' + \varphi_1''^2\omega_1}{\varphi_1''^2} + \\ \quad + \dfrac{\varphi_2\varphi_2''\omega_2'' - (\varphi_2'\varphi_2'' + \varphi_2\varphi_2''')\omega_2' + \varphi_2''^2\omega_2}{\varphi_2''^2}, \\ z = \dfrac{\varphi_1''\omega_1'' - \varphi_1'''\omega_1'}{\varphi_1''^2} + \dfrac{\varphi_2''\omega_2'' - \varphi_2'''\omega_2'}{\varphi_2''^2}. \end{cases}$$

Hierin sind $\varphi_1(\xi_1)$ und $\varphi_2(\xi_2)$ die durch K_1 bez. K_2 gegebenen Functionen, während $\omega_1(\xi_1)$ und $\omega_2(\xi_2)$ willkürliche Functionen ihrer Argumente sind. Die vorstehenden Gleichungen (13) stellen nach den früheren Erörterungen die allgemeinen Integralflächen der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung (10) dar. Ausser diesen Integralflächen giebt es, wenn von Cylindern abgesehen wird, nur dann noch andere Integralflächen, wenn K_1 und K_2 eine irreducibele Curve K bilden, nämlich die Developpabeln, deren Geraden K treffen.

Noch sei angemerkt: Man kann fragen, wann die Integralfläche (13) *algebraisch* ist. Sie ist es offenbar, wenn ihre erzeugenden Curven c_1 und c_2 algebraisch sind. Nun bemerken wir, dass wir dadurch, dass wir passende additive Constante zu den Werten (13) hinzufügen, eine mit der Integralfläche (13) congruente und gleichgestellte (wenn man will, eine unendlich benachbarte) Integralfläche erhalten, die sie längs einer Curve c_1 schneidet. Ist also c_1 nicht algebraisch, so schneidet die Fläche (13) eine congruente Fläche in einer nicht algebraischen Curve. Sie ist daher ebenfalls nicht algebraisch. Somit sehen wir: Die Fläche (13) ist dann und nur dann algebraisch, wenn ihre erzeugenden Curven c_1, c_2 algebraisch sind*). Algebraische Integralfln.

Wir fassen die Ergebnisse dieses Paragraphen, soweit sie sich auf den Fall beziehen, dass K_1 und K_2 eine irreducibele Curve bilden, zusammen in dem

Theorem 13: *Liegt der Liniencomplex vor, dessen Geraden die Treffgeraden einer unendlich fernen krummen Curve sind, dessen Monge'sche Gleichung also die Form hat:* Gesamt-Ergebnis.

$$\frac{dy}{dz} - \varphi\left(\frac{dx}{dz}\right) = 0,$$

so sind alle zum Complex conjugierten Flächen definiert als die Integralflächen einer gewissen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung von der Form:

$$R(p, q)\, r + 2S(p, q)\, s + T(p, q)\, t = 0.$$

Zunächst gehören zu den Integralflächen alle Developpabeln, deren Geraden nach der gegebenen unendlich fernen Curve laufen. Sie erfüllen eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, die demnach eine intermediäre Integralgleichung der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung ist. Alle übrigen Integralflächen sind die Translationsflächen, deren erzeugende Curven Rückkehrcurven von Developpabeln sind, welche die gegebene unendlich ferne Curve enthalten. Diese Translationsflächen sind dann und nur dann algebraisch, wenn ihre erzeugenden Curven algebraisch sind.

Beiläufig bemerken wir noch Folgendes:

Wir sind oben in den Gleichungen (10) von besonderer Form einer grossen Kategorie von partiellen Differentialgleichungen *zweiter* Ordnung begegnet, deren allgemeine Integralflächen Translationsflächen sind, während allerdings die Integral-

---

*) Wir sehen uns dazu veranlasst, ausdrücklich zu betonen, dass sich auch die obigen Betrachtungen in voller Allgemeinheit in der früher (S. 376) erwähnten Abhandlung von Lie aus dem Jahre 1877 finden.

flächen der intermediären Integralgleichungen erster Ordnung keine Translationsflächen, sondern Developpabeln sind. Es giebt nun noch eine andere grosse Kategorie von partiellen Differentialgleichungen *zweiter* Ordnung, deren Integralflächen Translationsflächen sind. Führt man nämlich auf eine beliebige krumme Curve c alle ∞^3 Translationen aus, so erhält man eine Schar von ∞^3 congruenten und gleichgestellten Curven. Alle Translationsflächen, deren eine Schar von congruenten und gleichgestellten Curven dieser Schar von ∞^3 Curven angehört, sind nun, wie wir hier ohne Beweis erwähnen, die Integralflächen einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Da die Curve c beliebig gewählt werden kann, so erhält man hiermit die erwähnte zweite grosse Kategorie.

Zwischen beiden Kategorien bestehen wichtige Beziehungen. Um sie anzudeuten, wollen wir mit $F = 0$ partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung von der ersten, mit $\Phi = 0$ solche von der zweiten bezeichnen. Liegt dann eine Gleichung $F = 0$ vor, so giebt es unendlich viele, noch eine willkürliche Function enthaltende Gleichungen $\Phi = 0$, deren jede mit $F = 0$ unendlich viele, von einer willkürlichen Function abhängige Integralflächen gemein hat. Es ist Darboux, der sich überhaupt zuerst mit Differentialgleichungen, die in einer Beziehung von der letzteren Art stehen, eingehend beschäftigte.

Schliesslich geben wir noch ohne Beweis an, dass *alle* Translationsflächen überhaupt als die Integralflächen einer gewissen partiellen Differentialgleichung *vierter* Ordnung definiert werden können.

§ 3. Über die Flächen, die zu einem tetraedralen Complex conjugiert sind.

Im vorigen Paragraphen haben wir das Problem, die zu einem gegebenen Complex conjugierten Flächen zu bestimmen, für den Fall gelöst, dass der Complex aus allen Treffgeraden einer ebenen Curve besteht. Jetzt wollen wir dagegen annehmen, es sei ein tetraedraler Complex vorgelegt.

Als das Tetraeder des Complexes wählen wir die Coordinatenebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ und die unendlich ferne Ebene, sodass die Monge'sche Gleichung des tetraedralen Complexes die in § 1 des vorigen Kapitels aufgestellte Form

$$(14) \quad (b - c)\, x\, dy\, dz + (c - a)\, y\, dz\, dx + (a - b)\, z\, dx\, dy = 0$$

hat. Jede Fläche enthält (nach S. 251) zwei Scharen von Curven des tetraedralen Complexes. *Gesucht werden alle Flächen, auf denen die beiden Scharen von Complexcurven conjugiert sind.*

Flächen conj. z. tetr. Compl.

Anal. Form d. Problems.

Es ist leicht einzusehen, dass dies Problem seinen analytischen Ausdruck wiederum in einer partiellen Differentialgleichung *zweiter* Ordnung findet. Wenn wir nämlich wie oben mit p, q; r, s, t die ersten und zweiten Ableitungen von z nach x und y auf einer Fläche der gesuchten Art bezeichnen, so sind zwei Richtungen $(dx : dy : dz)$ und $(\delta x : \delta y : \delta z)$ in einem Punkte der Fläche conjugiert, wenn

$$(15) \qquad r\, dx\, \delta x + s(dx\, \delta y + dy\, \delta x) + t\, dy\, \delta y = 0$$

ist, während überdies

$$(16)\qquad dz = p\,dx + q\,dy, \qquad \delta z = p\,\delta x + q\,\delta y$$

ist. Nun sollen zwei solche conjugierte Richtungen im Punkte (x, y, z) auf der Fläche dem durch die Gleichung (14) bestimmten Elementarkegel angehören. Es soll also zwei Systeme von Verhältnissen $dx:dy:dz$ und $\delta x : \delta y : \delta z$ geben, für die ausser (15) und (16) die Gleichung (14) sowie die Gleichung

$$(17)\qquad (b-c)\,x\,\delta y\,\delta z + (c-a)\,y\,\delta z\,\delta x + (a-b)\,z\,\delta x\,\delta y = 0$$

erfüllt ist, und zwar in jedem Punkte (x, y, z) der Fläche. Aus diesen fünf Gleichungen lassen sich die Grössen dx, dy, dz; $\delta x, \delta y, \delta z$ eliminieren, da sie homogen auftreten. Zunächst bleiben nach Elimination von dz und δz ausser (15) noch die beiden Gleichungen:

$$(c-a)\,yp\,dx^2 + [(b-c)\,xp + (c-a)\,yq + (a-b)\,z]\,dx\,dy + \\ + (b-c)\,xq\,dy^2 = 0,$$

$$(c-a)\,yp\,\delta x^2 + [(b-c)\,xp + (c-a)\,yq + (a-b)\,z]\,\delta x\,\delta y + \\ + (b-c)\,xq\,\delta y^2 = 0,$$

aus denen sich die Summe und das Product von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{\delta y}{\delta x}$ sofort entnehmen lassen. Setzen wir diese Werte in (15) oder

$$r + s\left(\frac{dy}{dx} + \frac{\delta y}{\delta x}\right) + t\,\frac{dy}{dx}\,\frac{\delta y}{\delta x} = 0$$

ein, so ergiebt sich die gesuchte *partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung* unseres Problems: Part. Dffgl. 2. O.

$$(18)\qquad (b-c)\,xq\cdot r - [(b-c)\,xp + (c-a)\,yq + (a-b)\,z]\cdot s + \\ + (c-a)\,yp\cdot t = 0.$$

Um nun unser Problem, das also analytisch auf das der Integration dieser partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung hinausläuft, zu lösen, stellen wir folgende geometrische Betrachtung an:

Betrachten wir eine der gesuchten Flächen $\mathfrak{F}$, auf der die Curven zweier Scharen c und γ einerseits Curven des tetraedralen Complexes, andererseits conjugierte Curven sein sollen. Unter den Curven c greifen wir eine bestimmte heraus. Durch jeden ihrer Punkte geht eine Curve γ, und die Tangenten τ der letzteren sind jedesmal zu den Tangenten von c in denselben Punkten conjugiert. Mithin erzeugen diese Tangenten τ der Curven γ eine abwickelbare Fläche. Nun sind sie aber auch als Tangenten von Complexcurven γ Geraden des tetraedralen Complexes und als solche Curven gleicher Gattung (vgl. § 3 des 8. Kap., S. 331). Geom. Betrachtgen.

Da sie die Erzeugenden einer abwickelbaren Fläche sind, so umhüllen sie eine Curve C, die ebenfalls eine Curve des Complexes ist.

Nehmen wir nun die logarithmische Abbildung (des § 5, 8. Kap.) vor, so verwandelt sich die Developpabele in eine Fläche, auf der ∞^1 congruente und gleichgestellte Curven τ' (S. 358) liegen — nämlich die Bilder der Erzeugenden τ —, und diese ∞^1 Curven umhüllen eine Curve C', nämlich das Bild der Curve C. Nach den Betrachtungen auf S. 362 bildet sich also die Developpabele als eine Translationsfläche ab, auf der zwei Scharen von je ∞^1 congruenten und gleichgestellten Curven liegen, sodass beide Scharen eine gemeinsame Enveloppe C' haben oder also paarweis parallele Tangenten haben. Die eine Schar besteht aus den Curven τ', die andere aus gewissen Curven σ'. Der tetraedrale Complex liefert, wie wir wissen, bei der logarithmischen Abbildung den Complex aller Treffgeraden eines gewissen unendlich fernen Kegelschnittes. Da die Tangenten der Curven τ' diesem Complex angehören, so gilt dasselbe von den Tangenten der Curven σ'. Also sind auch die einander congruenten und gleichgestellten Curven σ' Complexcurven. Ferner haben die ∞^1 Linienelemente der Curven τ' in den Punkten, in denen die Curven τ' eine Curve σ' treffen, sämtlich dieselbe Richtung.

Kehren wir nun zu unserem ursprünglichen Raum zurück, so folgt: Die Developpabele, welche die Fläche $\mathfrak{F}$ längs einer Curve c berührt, enthält ausser den ∞^1 Complexgeraden τ noch ∞^1 Complexcurven σ von gleicher Gattung. Diejenigen Linienelemente der Geraden τ, deren Punkte auf einer bestimmt gewählten Curve σ liegen, sind Linienelemente gleicher Gattung.

Die Developpabele enthält nur zwei Scharen von je ∞^1 Complexcurven. Es ist aber die auf ihr gelegene Curve c eine Complexcurve. Da sie der Schar der Tangenten τ nicht angehört, so muss sie zur Schar σ gehören. Also ergiebt sich auch, dass die ∞^1 Linienelemente der Tangenten τ, deren Punkte auf c liegen, gleiche Gattung haben. Diese Linienelemente sind aber zugleich Linienelemente der Curven γ.

Es hat sich somit ergeben, *dass die ∞^1 Linienelemente, welche die Curven γ in ihren Schnittpunkten mit irgend einer bestimmt gewählten Curve c besitzen, gleiche Gattung haben.* Dasselbe gilt natürlich, wenn man die Curven c mit den Curven γ vertauscht.

Anal. Verwertg. d. Ergebnisse. In § 3 des 8. Kap., S. 327, erkannten wir, dass die damals eingeführte Grösse t als Coordinate der Gattung desjenigen Linienelementes $(x, y, z, dx : dy : dz)$ benutzt werden kann, für das

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} : \frac{1}{y}\frac{dy}{dt} : \frac{1}{z}\frac{dz}{dt} = \frac{1}{a+t} : \frac{1}{b+t} : \frac{1}{c+t} \tag{19}$$

ist. Wir können uns nun auf der Fläche $\mathfrak{F}$ zwei krummlinige Coordinaten u und v in der Weise eingeführt denken, dass $u =$ Const. die Curven der einen Schar c und $v =$ Const. die der andern Schar γ angiebt. Da dann mit $u =$ Const. bez. $v =$ Const. auch die Gattung der Linienelemente der zweiten Schar γ bez. der ersten Schar c constant ist, so können wir als Parameter u und v direct die Coordinaten der Gattung dieser Linienelemente einführen.

Daher müssen sich die Coordinaten x, y, z der Punkte der Fläche $\mathfrak{F}$ so als Functionen von u und v darstellen lassen, dass nach (19) einerseits:

$$\frac{1}{x}\frac{\partial x}{\partial u} : \frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial u} : \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{a+u} : \frac{1}{b+u} : \frac{1}{c+u}$$

und andererseits:

$$\frac{1}{x}\frac{\partial x}{\partial v} : \frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial v} : \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{a+v} : \frac{1}{b+v} : \frac{1}{c+v}$$

wird. Hieraus folgt, wenn ϱ und σ zwei noch unbekannte Functionen von u und v bedeuten, dass auf der Fläche

$$\begin{cases} d\log x = \dfrac{\varrho\, du}{a+u} + \dfrac{\sigma\, dv}{a+v}, \\ d\log y = \dfrac{\varrho\, du}{b+u} + \dfrac{\sigma\, dv}{b+v}, \\ d\log z = \dfrac{\varrho\, du}{c+u} + \dfrac{\sigma\, dv}{c+v} \end{cases} \tag{20}$$

wird. Die rechten Seiten müssen vollständige Differentiale sein. Stellen wir die Bedingungen hierfür auf, so kommt:

$$\frac{1}{a+u}\frac{\partial \varrho}{\partial v} = \frac{1}{a+v}\frac{\partial \sigma}{\partial u},$$
$$\frac{1}{b+u}\frac{\partial \varrho}{\partial v} = \frac{1}{b+v}\frac{\partial \sigma}{\partial u},$$
$$\frac{1}{c+u}\frac{\partial \varrho}{\partial v} = \frac{1}{c+v}\frac{\partial \sigma}{\partial u}.$$

Weil die zweireihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{a+u} & \dfrac{1}{a+v} \\ \dfrac{1}{b+u} & \dfrac{1}{b+v} \\ \dfrac{1}{c+u} & \dfrac{1}{c+v} \end{vmatrix}$$

nur dann sämtlich identisch verschwinden, wenn $a = b = c$ ist, was aber selbstverständlich nach (14) ausgeschlossen ist, so ergiebt sich mit Notwendigkeit, dass

$$\frac{\partial \varrho}{\partial v} = \frac{\partial \sigma}{\partial u} = 0$$

ist. ϱ ist also eine Function U von u allein und σ eine Function V von v allein. Nun liefert die Integration der Gleichungen (20) sofort:

Integralfläche.

$$(21) \quad \begin{cases} \log x = \int \frac{U(u)\,du}{a+u} + \int \frac{V(v)\,dv}{a+v}, \\ \log y = \int \frac{U(u)\,du}{b+u} + \int \frac{V(v)\,dv}{b+v}, \\ \log z = \int \frac{U(u)\,du}{c+u} + \int \frac{V(v)\,dv}{c+v}. \end{cases}$$

Umkehrung. Wir behaupten nun, dass diese Gleichungen (21) stets eine der gesuchten Integralflächen der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung (18) darstellen, sobald für U und V zwei beliebige Functionen von u bez. v gesetzt werden, die nur der einzigen Bedingung unterworfen sind, *dass sie nicht identisch verschwinden.*

In der That, diese Bedingung ist zunächst notwendig und hinreichend dafür, dass die Gleichungen (21) für $u =$ Const. und $v =$ Const. wirkliche Curven und nicht nur Punkte darstellen. Da a, b und c nicht alle drei einander gleich sind, so stellen die Gleichungen (21) fernerhin wirklich eine Fläche dar. Die Curven $u =$ Const. und $v =$ Const. sind überdies Complexcurven, wegen der Übereinstimmung mit der in § 3 des 8. Kap., S. 331, aufgestellten allgemeinen Form (13) der Complexcurven. Es ist also nur noch nötig, zu beweisen, dass die Curven $u =$ Const. und $v =$ Const. auf der Fläche (21) conjugiert sind.

Dies lässt sich so erkennen: Die Linienelemente $(x, y, z, dx : dy : dz)$ der Curven γ oder $v =$ Const. erfüllen nach (21) die Bedingungen, die sich durch Differentiation nach u ergeben:

$$\frac{dx}{x} = \frac{U\,du}{a+u}, \quad \frac{dy}{y} = \frac{U\,du}{b+u}, \quad \frac{dz}{z} = \frac{U\,du}{c+u}.$$

Also erfüllen die ∞^1 Linienelemente der ∞^1 Curven γ oder $v =$ Const., deren Punkte auf einer bestimmt gewählten Curve c oder $u =$ Const. liegen, die Proportion

$$\frac{dx}{x} : \frac{dy}{y} : \frac{dz}{z} = \frac{1}{a+u} : \frac{1}{b+u} : \frac{1}{c+u},$$

d. h. sie sind nach (19) Linienelemente gleicher Gattung. Ausserdem liegen sie auf Complexgeraden. Ziehen wir also in allen Punkten der bestimmt gewählten Curve c oder $u =$ Const. die Tangenten τ an die hindurchgehenden ∞^1 Curven γ oder $v =$ Const., so erhalten wir zunächst eine Regelfläche, deren Geraden dem Complex angehören. Bei der logarithmischen Abbildung geht aus dieser Regelfläche eine Fläche hervor, die ∞^1 congruente und gleichgestellte Curven τ', die Bilder der Geraden gleicher Gattung τ, enthält und daher eine Translationsfläche ist. Auf dieser Translationsfläche liegt auch die Curve c', das Bild von c. Die Curven τ' haben in ihren Schnittpunkten mit c' parallele Linienelemente. Mithin ist c' eine Curve der zweiten Schar von ∞^1 congruenten und gleichgestellten Curven, welche die Translationsfläche enthält. Da der tetraedrale Complex bei der logarithmischen Abbildung den Complex aller Treffgeraden eines unendlich fernen Kegelschnittes liefert, so treffen also die Tangenten jeder Curve τ' und der Curve c' sämtlich diesen Kegelschnitt. Jede Curve τ' hat also mit c' paarweis parallele Tangenten. Nach den Ergebnissen des § 5 des vorigen Kapitels auf S. 362 haben daher die Curven τ' eine gemeinsame Umhüllende C'.

Kehren wir zum ursprünglichen Raum zurück, so sehen wir, dass die ∞^1 Geraden τ eine Curve C, nämlich die Curve, deren Bild C' ist, berühren, sodass sie eine Developpabele bilden. Also ergiebt sich, dass die Fläche (21) längs einer Curve c oder $u =$ Const. von einer Developpabeln umhüllt wird, deren Erzeugende die Tangenten τ an die hindurchgehenden Curven $v =$ Const. sind. Daher sind die Curven $u =$ Const., $v =$ Const. auf der Fläche (21) in der That conjugiert.

Unter den Integralflächen spielen die Developpabeln, die dem Complex angehören, eine besondere Rolle.

Die Gleichungen (21) würden also alle Integralflächen der partiellen Differentialgleichung (18) darstellen, wenn wir nicht von vornherein stillschweigend einen Ausnahmefall ausgeschlossen hätten: Wir nahmen an, dass die auf der Fläche $\mathfrak{F}$ gelegenen Scharen conjugierter Complexcurven c und γ von einander verschieden seien. Wenn sie nun aber zusammenfallen, so müssen sie Haupttangentencurven der Fläche $\mathfrak{F}$ sein. Aber die Flächen $\mathfrak{F}$, die ∞^1 Complexcurven als Haupttangentencurven enthalten, sind nach § 1 dieses Kap., S. 371, die Integralflächen der zur Monge'schen Gleichung (14) gehörigen partiellen Differentialgleichung *erster* Ordnung, die auf S. 359 unter (52) aufgestellt wurde. Diese Flächen haben wir auf S. 375 sämtlich bestimmt. Die genannte partielle Differentialgleichung erster Ordnung ist hiernach eine *intermediäre Integralgleichung* der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung (18). Ausnahmefall.

Bei der logarithmischen Abbildung geht aus der Fläche (21) eine Translationsfläche

$$(22)\qquad \begin{cases} \mathfrak{x} = \int \frac{U\,du}{a+u} + \int \frac{V\,dv}{a+v}, \\ \mathfrak{y} = \int \frac{U\,du}{b+u} + \int \frac{V\,dv}{b+v}, \\ \mathfrak{z} = \int \frac{U\,du}{c+u} + \int \frac{V\,dv}{c+v} \end{cases}$$

hervor. Indem wir uns daran erinnern, dass die Translationen

$$\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x} + \mathfrak{l}, \quad \mathfrak{y}_1 = \mathfrak{y} + \mathfrak{m}, \quad \mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z} + \mathfrak{n}$$

die logarithmischen Bilder der projectiven Transformationen

$$x_1 = \lambda x, \quad y_1 = \mu y, \quad z_1 = \nu z$$

sind (nach Theorem 11, § 5 des 8. Kap., S. 367), erkennen wir, dass wir unsere Ergebnisse so aussprechen können:

Theorem 14: *Die Flächen, die zu einem tetraedralen Complexe conjugiert sind, sind die Integralflächen einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung von der Form:*

$$(b-c)\,xq \cdot r - [(b-c)\,xp + (c-a)\,yq + (a-b)\,z] \cdot s + \\ + (c-a)\,yp \cdot t = 0.$$

Zunächst gehören zu den Integralflächen alle Flächen, deren Haupttangentencurven der einen Schar dem Complex angehören. Diese Flächen, die man sämtlich angeben kann, sind die Integralflächen einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, die daher eine intermediäre und zwar singuläre Integralgleichung der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung ist. Alle übrigen Integralflächen der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung erhält man so: Man wählt zwei beliebige einander in einem Punkte p schneidende Curven c und γ des Complexes aus und übt auf die eine Curve, etwa auf γ, alle projectiven Transformationen aus, die erstens die Ecken des Tetraeders invariant lassen und zweitens den Punkt p von γ in beliebige Punkte von c überführen. Der Ort der so aus γ hervorgehenden Curven ist eine Fläche von der gesuchten Art. Sie lässt zwei Erzeugungen von dieser Art zu.

Log. Abb., angew. auf d. Integralfl.

Die allgemeinen Integralflächen (21) gehen durch die logarithmische Abbildung

$$(23)\qquad \mathfrak{x} = \log x, \quad \mathfrak{y} = \log y, \quad \mathfrak{z} = \log z,$$

wie gesagt, in die Translationsflächen (22) über. Dies Ergebnis konnte man von vornherein durchaus nicht etwa durch directe Übertragung der Ergebnisse des vorigen Paragraphen vermittelst der zu (23) inversen Transformation ableiten, da ja von vornherein noch gar nicht feststand, dass eine Fläche, die zum tetraedralen Complex conjugiert ist, vermöge der logarithmischen Abbildung (23) in eine Fläche übergeht, die zu dem Complex aller Treffgeraden eines gewissen unendlich fernen Kegelschnitts conjugiert ist.

Da nun aber die hier gesuchten Flächen factisch durch logarithmische Abbildung in diese Translationsflächen übergehen, so können wir die Ergebnisse des § 5, 8. Kap., die sich auf die Translationsflächen beziehen (S. 361 u. f.), ohne Weiteres übertragen. Wir erkennen so, dass auf der Fläche (21) die Curve $u = v$, d. h. die Curve*):

$$(24)\qquad \begin{cases} \log x = \int \frac{U(u) + V(u)}{a + u}\, du, \\ \log y = \int \frac{U(u) + V(u)}{b + u}\, du, \\ \log z = \int \frac{U(u) + V(u)}{c + u}\, du \end{cases}$$

sowohl von den Curven $u =$ Const. als auch von den Curven $v =$ Const. umhüllt wird. Ihre Tangenten sind demnach zu sich selbst conjugiert; die Curve $u = v$ ist folglich eine besondere *Haupttangentencurve* der Fläche (21). Offenbar ist sie eine Curve des Complexes. Besond. Haupttg-curve.

Da ferner die Parameter u, v auf der Fläche (21) conjugiert sind, so muss die Differentialgleichung der Haupttangentencurven der Fläche die Form haben:

$$\alpha(u, v)\, du^2 + \beta(u, v)\, dv^2 = 0.$$

In der That ergiebt sich sogar, dass hierin α nur von u und β nur von v abhängt. Rechnet man nämlich die Coefficienten von du^2 und dv^2 in der Differentialgleichung der Haupttangentencurven

$$(25)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} du^2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} dv^2 = 0$$

*) Es ist vielleicht nützlich, darauf hinzuweisen, dass die logarithmische Abbildung nur für die Ecken und Flächen des Tetraeders irregulär ist, dass daher für das ganze übrige Gebiet des Raumes, also auch für die hier betrachtete Curve $u = v$, die allerdings auf der Fläche (21) eine singuläre Rolle spielt, die Übertragung der Ergebnisse vermöge der logarithmischen Abbildung durchaus statthaft ist.

aus, so ergiebt sich nach (21), dass die erste Determinante den Wert hat:

$$UV(U^2 - U)\,xyz \begin{vmatrix} \frac{1}{(a+u)^2} & \frac{1}{(b+u)^2} & \frac{1}{(c+u)^2} \\ \frac{1}{a+u} & \frac{1}{b+u} & \frac{1}{c+u} \\ \frac{1}{a+v} & \frac{1}{b+v} & \frac{1}{c+v} \end{vmatrix}$$

oder also den Wert:

$$\frac{UV(U^2-U)\,xyz(u-v)\cdot(a-b)\,(b-c)\,(c-a)}{(a+u)^2\,(b+u)^2\,(c+u)^2\,(a+v)\,(b+v)\,(c+v)}.$$

Die zweite Determinante ergiebt sich hieraus, wenn man das Vorzeichen ändert und u mit v und U mit V vertauscht. Die Differentialgleichung (25) der Haupttangentencurven lässt sich daher so schreiben:

Diffgl. d. Hauptt g-curven.

$$(25') \quad (u-v)\left\{\frac{U^2-U}{(a+u)\,(b+u)\,(c+u)}\,du^2 + \frac{V^2-V}{(a+v)\,(b+v)\,(c+v)}\,dv^2\right\} = 0.$$

Der Factor $u - v$ giebt gleich Null gesetzt die oben schon bestimmte ausgezeichnete Haupttangentencurve (21). Alle übrigen Haupttangentencurven bestimmen sich aus (25′) durch *Quadratur* *).

Im Theorem 14 haben wir die allgemeine Erzeugungsart der zum tetraedralen Complex conjugierten Flächen angegeben. Da vermöge einer projectiven Transformation, bei der die Ecken des Tetraeders fest bleiben, jede Curve des Complexes wieder in eine Complexcurve übergeht, so folgt aus jenem Satze sofort, dass eine zum tetraedralen Complex conjugierte Fläche $\mathfrak{F}$ stets wieder in eine derartige Fläche $\mathfrak{F}'$ übergeht, sobald man eine projective Transformation ausübt, bei der die Tetraederecken fest bleiben. Dabei gehen die conjugierten Curvenscharen c, γ der Fläche $\mathfrak{F}$ in die conjugierten Curvenscharen c', γ' der Fläche $\mathfrak{F}'$ über.

Algebr. Integralfln.

Wenn die beiden im Theorem 14 genannten Curven c, γ *algebraisch* sind, so ist es offenbar auch die Fläche $\mathfrak{F}$. Aber aus dem soeben erhaltenen Ergebnis lässt sich umgekehrt folgern, *dass die Curven c, γ algebraisch sind, sobald die Fläche $\mathfrak{F}$ algebraisch ist.* Um dies einzusehen, seien wie im Theorem 14 die beiden Complexcurven c und γ durch einen Punkt p gegeben, und es sei danach die dadurch bestimmte Fläche $\mathfrak{F}$ construiert. Führen wir die projective Transfor-

*) Vgl. *Kurzes Résumé mehrerer neuer Theorien*, Ges. d. Wiss. zu Christiania, 30. April 1872.

mation T aus, bei der die Tetraederecken fest bleiben und der Punkt p in den Punkt p' auf c übergeht, so wird dabei die Curve γ in eine Complexcurve γ' auf $\mathfrak{F}$ verwandelt, eben nach dem Theorem. Andererseits geht dabei die Fläche $\mathfrak{F}$ wieder in eine zum tetraedralen Complex conjugierte Fläche $\mathfrak{F}'$ über, wie wir vorhin sahen, und zwar ist γ' Schnittlinie von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$. Wenn nun $\mathfrak{F}$ eine *algebraische* Fläche ist, so ist auch $\mathfrak{F}'$ eine algebraische Fläche, da sie durch die *projective* Transformation T aus $\mathfrak{F}$ hervorgeht. Die gemeinsame Curve γ' ist demnach ebenfalls algebraisch. Dieser Beweis gilt offenbar für alle auf der Fläche $\mathfrak{F}$ gelegenen Complexcurven c, γ, und damit ist die obige Behauptung bewiesen*).

Will man also alle *algebraischen* Flächen finden, die zu dem gegebenen tetraedralen Complex conjugiert sind, so muss man jedesmal zwei einander schneidende *algebraische* Complexcurven c und γ auswählen. Nun aber ist das Problem, alle algebraischen Curven des tetraedralen Complexes zu bestimmen, bis heute noch nicht gelöst worden. Wir beschränken uns daher auf einzelne Beispiele, wie in § 3 des vorigen Kap., S. 331 u. f.

In den Gleichungen (21) stellen $U(u)$ und $V(v)$ nach S. 331 die Gattungen der Complexcurven dar, die auf der Fläche gelegen sind. Nach (24) ist ausserdem $U(u) + V(u)$ die Gattung der Haupttangentencurve $u = v$.

Nach § 3 des 8. Kap. giebt die Annahme Beispiele.

$$U \equiv 2, \quad V \equiv 2$$

eine algebraische Fläche mit zwei Scharen von Complex-Kegelschnitten:

$$x = \alpha^2(a+u)^2(a+v)^2, \qquad y = \beta^2(b+u)^2(b+v)^2,$$
$$z = \gamma^2(c+u)^2(c+v)^2,$$

die sich auch so schreiben lässt:

$$\begin{vmatrix} \sqrt{x} - \alpha a^2 & \alpha a & \alpha \\ \sqrt{y} - \beta b^2 & \beta b & \beta \\ \sqrt{z} - \gamma c^2 & \gamma c & \gamma \end{vmatrix} = 0.$$

*) Alle zum tetraedralen Complex conjugierten Flächen, die durch eine *algebraische* Gleichung zwischen $\log x$, $\log y$, $\log z$ darstellbar sind, werden dadurch erhalten, dass man zwei Complexcurven c und γ auswählt, die durch algebraische Gleichungen zwischen $\log x$, $\log y$, $\log z$ definiert sind. Dies folgt unmittelbar durch logarithmische Abbildung aus den Betrachtungen des § 2, S. 383.

Dies aber ist die in § 4 des vorigen Kap., S. 355, Formel (46), an-

Steiner'sche Fläche. gegebene *Steiner'sche Fläche vierter Ordnung und dritter Classe.*

Die Annahme:

$$U \equiv 2, \quad V \equiv -1$$

giebt eine algebraische Fläche mit einer Schar von Complex-Kegelschnitten und einer Schar von Curven dritten Grades, die dem Complex

Specielle Plücker'sche Complfl. angehören, nämlich die sogenannte *specielle Plücker'sche Complexfläche:*

$$(26) \qquad x = \alpha \frac{(a+u)^2}{a+v}, \quad y = \beta \frac{(b+u)^2}{b+v}, \quad z = \gamma \frac{(c+u)^2}{c+v}.$$

Hier ist $U + V \equiv 1$, sodass also die Haupttangentencurve $u = v$ eine Complexgerade ist.

Setzen wir

$$U \equiv 1, \quad V \equiv -1,$$

so ergiebt sich eine algebraische Fläche mit einer Schar von Complexgeraden — also eine Regelfläche — und einer Schar von Curven dritten Grades, die dem Complex angehören:

$$x = \alpha \frac{a+u}{a+v}, \quad y = \beta \frac{b+u}{b+v}, \quad z = \gamma \frac{c+u}{c+v}.$$

Die Fläche lässt sich auch so schreiben:

$$\begin{vmatrix} a(x-\alpha) & x & \alpha \\ b(y-\beta) & y & \beta \\ c(z-\gamma) & z & \gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Sie ist also eine Fläche zweiten Grades und deshalb notwendig ein

Complex kegel. *Complexkegel*, da auf jeder Fläche zweiten Grades, die kein Kegel ist, die beiden Scharen von Erzeugenden Haupttangentencurven sind, also die eine Schar unmöglich zu einer Schar von Curven dritter Ordnung conjugiert sein kann. Dieser Complexkegel wurde in § 4 des vorigen Kap. eingehend betrachtet.

Wenn

$$U \equiv \frac{1}{2}, \quad V \equiv \frac{1}{2}$$

Fl. 2. Grades. gesetzt wird, so ergiebt sich die *Fläche zweiten Grades:*

$$x = \alpha \sqrt{(a+u)(a+v)}, \quad y = \beta \sqrt{(b+u)(b+v)},$$
$$z = \gamma \sqrt{(c+u)(c+v)},$$

und zwar ist dies eine beliebige Fläche zweiten Grades, die das Tetraeder zum Polartetraeder hat. Die beiden auf ihr gelegenen Scharen conjugierter Complexcurven sind Curven vierter Ordnung.

Setzen wir

$$U \equiv 1, \quad V \equiv -2,$$

so kommt die algebraische Fläche:

$$x = \frac{\alpha(a+u)}{(a+v)^2}, \quad y = \frac{\beta(b+u)}{(b+v)^2}, \quad z = \frac{\gamma(c+u)}{(c+v)^2}$$

mit einer Schar von Complexgeraden und einer dazu conjugierten Schar von Complexcurven sechster Ordnung. Diese Fläche geht offenbar aus der Plücker'schen Complexfläche (26) durch die involutorische Transformation

$$x_1 = \frac{1}{x}, \quad y_1 = \frac{1}{y}, \quad z_1 = \frac{1}{z}$$

hervor. Da hier $U + V \equiv -1$ ist, so ist die Haupttangentencurve $u = v$ eine Complexcurve dritter Ordnung. Sie wird von den ∞^1 Geraden $v =$ Const. umhüllt. Die vorliegende Fläche ist also die *Tangentenfläche einer Complexcurve dritter Ordnung:* Tgfl. einer Complc. 3. O.

$$x = \frac{\alpha}{a+u}, \quad y = \frac{\beta}{b+u}, \quad z = \frac{\gamma}{c+u},$$

die durch die Ecken des Tetraeders geht.

Schliesslich knüpfen wir hier noch einige Bemerkungen an, indem wir auf Satz 19, § 5 des 8. Kap., S. 363, zurückgreifen. Unmittelbar vor jenem Satz war von der Spiegelung an einem Punkte die Rede. Diese Spiegelung:

$$\mathfrak{x}_1 = \log\lambda - \mathfrak{x}, \quad \mathfrak{y}_1 = \log\mu - \mathfrak{y}, \quad \mathfrak{z}_1 = \log\nu - \mathfrak{z}$$

im Raume $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ geht durch die logarithmische Abbildung

$$\mathfrak{x} = \log x, \quad \mathfrak{y} = \log y, \quad \mathfrak{z} = \log z$$

aus der involutorischen Transformation:

$$x_1 = \frac{\lambda}{x}, \quad y_1 = \frac{\mu}{y}, \quad z_1 = \frac{\nu}{z} \tag{27}$$

hervor. (Vgl. auch S. 366.) Die involutorischen Transformationen haben wir auf S. 342 mit $J_1, J_2 \ldots$ bezeichnet. Die involutorische Transformation (27) lässt den Punkt $x = \sqrt{\lambda}$, $y = \sqrt{\mu}$, $z = \sqrt{\nu}$ in Ruhe.

Hiernach können wir den citierten Satz so aussprechen:

Satz 1: *Enthält eine Fläche ∞^1 Curven c von gleicher Gattung durch einen gemeinsamen Punkt p, so enthält sie noch eine zweite Schar von ∞^1 Curven von gemeinsamer Gattung, die durch denselben Punkt p gehen, nämlich die Curven γ, die aus den Curven c vermöge der involutorischen Transformation J hervorgehen, die den Punkt p fest lässt.* Fln. mit Curven gl. Gattg. durch einen Pkt.

Sind insbesondere die Curven c Curven des tetraedralen Complexes, so sind nach Satz 5, § 4 des 8. Kap., S. 343, auch die Curven γ Curven des Complexes. Haben dabei die Curven c die Gattung $F(t)$, so ist $-F(t)$ die Gattung der Curven γ. Letzteres ist schon in Satz 20 des § 5, 8. Kap., S. 366, ausgesprochen worden.

Hiervon machen wir nun eine Anwendung auf die Integralflächen der partiellen Differentialgleichung (18). Es ergiebt sich sofort:

Satz 2: *Enthält eine Integralfläche der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung*

$$(b-c)\,xq\cdot r-[(b-c)\,xp+(c-a)\,yq+(a-b)\,z]\cdot s+ \\ (c-a)\,yp\cdot t=0$$

∞^1 *Complexcurven* c *von gleicher Gattung* $F(t)$, *die sämtlich durch einen gemeinsamen Punkt* (x_0, y_0, z_0) *gehen, so enthält sie auch* ∞^1 *Complexcurven* γ *von gleicher Gattung* $-F(t)$, *die ebenfalls durch jenen Punkt gehen und aus den Curven* c *vermöge der involutorischen Transformation*

$$x_1=\frac{\sqrt{x_0}}{x},\quad y_1=\frac{\sqrt{y_0}}{y},\quad z_1=\frac{\sqrt{z_0}}{z}$$

hervorgehen. Diese Transformation führt die Integralfläche in sich über.

Die Integralfläche (21), auf der die Curven der einen Schar die Gattung $U(t)$, die der anderen Schar die Gattung $V(t)$ haben, ist eine derartige, wenn $U(t)+V(t)\equiv 0$ ist. Dies steht damit in Einklang, dass dann die ausgezeichnete Haupttangentencurve $u=v$, die alle Curven $u=$ Const. und $v=$ Const. umhüllt, die Gattung Null hat und sich daher auf einen Punkt reduciert (nach S. 332). Z. B. die Annahme:

$$U\equiv\frac{1}{m},\quad V\equiv-\frac{1}{m}$$

giebt eine derartige und zwar, wenn m eine rationale Zahl ist, eine algebraische Fläche:

$$x=\alpha\left(\frac{a+u}{a+v}\right)^{\frac{1}{m}},\quad y=\beta\left(\frac{b+u}{b+v}\right)^{\frac{1}{m}},\quad c=\gamma\left(\frac{c+u}{c+v}\right)^{\frac{1}{m}},$$

auf der die conjugierten Complexcurven lauter tetraedral-symmetrische Curven (S. 333) durch den Punkt:

$$x_0=\alpha,\quad y_0=\beta,\quad z_0=\gamma$$

sind.

Weitere Ausführungen. Man kann unbegrenzt viele analoge Theorien entwickeln. Um ein Beispiel zu geben, wollen wir eine Complexgerade g annehmen und eine Complexcurve c_0 construieren, die g berührt. Zu dieser Curve c_0, deren Gattung etwa $F(t)$ sei, giebt es ∞^3 Curven gleicher Gattung. Von diesen gehen durch einen Punkt von g deren ∞^1 und ihre Linienelemente bilden daselbst den Complexkegel, der auch g enthält. Daraus folgt, dass es eine (oder einige) unter diesen Curven giebt, die g in einem bestimmten Punkt berühren. Es giebt also insgesamt ∞^1 Curven c von der Gattung $F(t)$, die g berühren. Wir können sie dadurch construieren, dass wir die ∞^1 projectiven Transformationen auf c_0 ausüben, welche die Ecken des Tetraeders fest lassen und je eine der ∞^1 Tangenten von c_0 in g überführen.

Die so hervorgehenden ∞^1 Curven c haben zusammen ∞^2 Tangenten, und diese ∞^2 Geraden bilden ein *Strahlensystem.* Der eine Mantel der Brennfläche (vgl. S. 270) dieses Strahlensystems ist die von den Curven c gebildete Fläche $\mathfrak{F}$. Nach Satz 18, § 5 des 8. Kap., S. 362, enthält $\mathfrak{F}$ noch eine Schar von ∞^1 Curven γ von gleicher Gattung. Nehmen wir die logarithmische Abbildung wie in § 5 des vorigen Kap. vor, so geht $\mathfrak{F}$ in eine Translationsfläche über, deren eine Schar von Erzeugenden eine gemeinsame Enveloppe hat, die daher auch alle Erzeugenden der zweiten Schar umhüllt (nach S. 362). Daraus folgt, dass auch die Curven γ Curven des Complexes sind und dass die Fläche $\mathfrak{F}$ eine Integralfläche der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung (18) ist. Auf ihr ist die Gerade g die oben (S. 391) besprochene ausgezeichnete Haupttangentencurve. Da ihre Gattung nach S. 331 gleich 1 ist, während diese Gattung die Summe der Gattungen der Curven c und der Curven γ ist, so finden wir, dass die Curven γ die Gattung $1 - F(t)$ haben.

Auch der zweite Mantel $\mathfrak{F}'$ der Brennfläche unseres Strahlensystems ist leicht zu construieren. Ist nämlich l irgend ein Strahl des Systems, d. h. eine Tangente einer Curve c, und führen wir die Transformation durch reciproke Polaren aus, welche die Ecken des Tetraeders mit den gegenüberliegenden Flächen und die Geraden g und l mit einander vertauscht, so geht die betreffende Curve c wieder in eine Complexcurve c' über, da der tetraedrale Complex zu sich selbst dualistisch ist (nach § 1 des 8. Kap., S. 314), und zwar wird c' die Geraden g und l ebenfalls berühren. Wie in der Fussnote zu S. 332 gesagt ist, hat c' die Gattung $2 - F(t)$. Wir haben die Gerade l beliebig aus unserem Strahlensystem ausgewählt gehabt. Die vorstehende Construction lässt sich also auf ∞^2 Arten ausüben. Stets geht dabei eine Curve c in eine Curve c' über, die g berührt. Da alle c' gleiche Gattung haben und da nur ∞^1 Curven gegebener Gattung vorhanden sind, die g berühren, so kommen wir trotzdem nur zu ∞^1 Curven c'. Also muss jede Curve c' ausser g noch je ∞^1 Geraden l des Strahlensystems berühren. Mithin ist die von allen ∞^1 Curven c' gebildete Fläche $\mathfrak{F}'$ der zweite Mantel der Brennfläche des Strahlensystems. Auch dieser zweite Mantel enthält ausser den ∞^1 Curven c' gleicher Gattung $2 - F(t)$ noch ∞^1 Complexcurven γ' gleicher Gattung. Ihre Gattung bestimmt sich genau so wie die Gattung der Curven γ auf $\mathfrak{F}$ und ist also gleich $1 - (2 - F(t))$ oder $F(t) - 1$. Ebenso wie der erste Mantel der Brennfläche ist auch der zweite eine Integralfläche der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung (18). Die Gerade g liegt augenscheinlich auf beiden Mänteln $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$.

Führen wir die Transformation durch reciproke Polaren aus, welche die Tetraederecken mit den gegenüberliegenden Ebenen vertauscht und die Gerade g fest lässt (vgl. S. 313), so geht jede Curve c — aufgefasst als Ort ihrer ∞^1 Tangenten — in eine Complexcurve von der Gattung $2 - F(t)$ über, die auch g berührt, d. h. in eine Curve c', und umgekehrt. Ebenso jede Curve γ in eine Curve γ' und umgekehrt. Hieraus darf man aber nicht schliessen, dass die erwähnte Dualität den Mantel $\mathfrak{F}$ mit dem Mantel $\mathfrak{F}'$ vertauscht. Die Sache liegt vielmehr so: Jeder *Punkt* einer Curve c geht in eine Schmiegungsebene einer Curve c' über, und umgekehrt. Diese Schmiegungsebene ist aber keine Tangentenebene der Fläche $\mathfrak{F}'$, wohl aber eine Tangentenebene der Fläche $\mathfrak{F}$, wie man leicht allgemein — bei beliebigen Strahlensystemen — einsieht. (Vgl. hierzu auch Fig. 59, S. 270.) Daher gehen die Punkte von $\mathfrak{F}$ in die Tangentenebenen von $\mathfrak{F}$ über. Der Mantel $\mathfrak{F}$ bleibt also für sich invariant und ebenso der Mantel $\mathfrak{F}'$.

Hiermit haben wir insbesondere den Satz erhalten:

Satz 3: *Alle Complexcurven einer Gattung, die eine Gerade berühren, erzeugen eine Fläche, die durch eine Transformation vermöge reciproker Polaren in sich selbst übergeht* *).

Als allgemeine Bemerkung zu den Theorien des vorigen Kapitels und denen dieses Kapitels fügen wir hinzu, dass sich analoge Theorien für den Fall entwickeln lassen, dass das Tetraeder ausartet.

§ 4. Beziehungen zwischen der Theorie der Translationsflächen und dem Abel'schen Theorem.

Die in den beiden vorhergehenden Paragraphen behandelten Probleme waren in ihrer analytischen Formulierung die Integrationsprobleme gewisser partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die linear und homogen in den zweiten Ableitungen r, s, t von z nach x, y waren, also die Form hatten:

Lin. hom. part. Diffgl. 2. O.

$$R(x, y, z, p, q)\, r + S(x, y, z, p, q)\, s + T(x, y, z, p, q)\, t = 0. \tag{28}$$

Beschäftigen wir uns daher zunächst einmal mit der geometrischen Deutung einer beliebigen derartigen Gleichung (28).

Wir können sie, wenn wir wollen, auf eine andere Form bringen: Es giebt nämlich zwei Verhältnisse $\alpha_1 : \beta_1$ und $\alpha_2 : \beta_2$, die der in $u : v$ quadratischen Gleichung:

$$Ru^2 + Suv + Tv^2 = 0$$

genügen. Dabei sind $\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2$ Functionen von x, y, z, p, q und es ist

$$R : S : T = \alpha_1 \alpha_2 : (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) : \beta_1 \beta_2.$$

Deshalb lässt sich die partielle Differentialgleichung (28) auch auf die Form bringen:

$$\alpha_1 \alpha_2 \cdot r + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) \cdot s + \beta_1 \beta_2 \cdot t = 0. \tag{28'}$$

Wenn insbesondere $4RT - S^2 \equiv 0$ ist, so fallen beide Verhältnisse $\alpha_1 : \beta_1$ und $\alpha_2 : \beta_2$ zusammen.

Geom. Deutung.

Um nun die Gleichung (28) geometrisch zu deuten, betrachten wir eine ihrer Integralflächen. Wählen wir einen bestimmten Punkt (x, y, z) auf der Fläche, so ist damit auch ein bestimmtes Flächenelement (x, y, z, p, q) ausgewählt, nämlich dasjenige, dessen Ebene die

*) Vgl. Götting. Nachr., Januar 1870, und Verh. d. Ges. d. Wiss. zu Christiania, April 1872, wo eine grosse Kategorie analoger Theorien angedeutet wurde.

Tangentenebene im Punkte (x, y, z) ist. Auf diesem Flächenelement sind nun zwei Fortschreitungsrichtungen $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{\delta y}{\delta y}$ zu einander *conjugiert*, wenn sie der Bedingung genügen: Conjug. Richtgn.

$$r\,dx\,\delta x + s(dx\,\delta y + dy\,\delta x) + t\,dy\,\delta y = 0.$$

Vergleichen wir dies mit (28′), so sehen wir, dass

$$(29) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\beta_1}{\alpha_1}, \quad \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\beta_2}{\alpha_2}$$

die Bedingung des Conjugiertseins erfüllen. Wir können daher sagen: *Die partielle Differentialgleichung* (28) *oder* (28′) *ordnet jedem Flächenelement* (x, y, z, p, q) *zwei Fortschreitungsrichtungen* (29) *zu.* Sie integrieren heisst, *die Flächen bestimmen, auf deren Flächenelementen die zugeordneten beiden Fortschreitungsrichtungen stets zu einander conjugiert sind.*

Wenn insbesondere $4RT - S^2 \equiv 0$ *ist*, also $\frac{\beta_1}{\alpha_1} \equiv \frac{\beta_2}{\alpha_2}$ ist, so ordnet Specialfall. die partielle Differentialgleichung (28) jedem Flächenelement nur eine Richtung auf ihm zu (eigentlich zwei unendlich benachbarte), und ihre Integralflächen sind diejenigen Flächen, auf deren Flächenelementen die zugeordnete Richtung zu sich selbst conjugiert, d. h. eine *Haupttangentenrichtung* ist. Damit kämen wir aber zu dem Problem des § 1 zurück. Haupttg.-richtg.

Liegt ein *Liniencomplex* vor, etwa dadurch, dass man seine Monge'sche Gleichung (vgl. Satz 1, § 1 des 7. Kap., S. 254) angiebt: Lin. hom. part. Diffgl. 2. O., defin. durch e. Complex

$$\Phi(ydz - zdy,\ zdx - xdz,\ xdy - ydx,\ dx,\ dy,\ dz) = 0,$$

so ordnet er jedem Punkt einen Kegel zu. Ein Flächenelement wird auf dem Kegel, der dem Punkt des Elementes zugeordnet ist, eine Anzahl Fortschreitungsrichtungen haben. Setzen wir voraus, dass der Complex nicht linear sei, so sind es mindestens zwei. Suchen wir nun die Flächen, die zu dem Liniencomplex conjugiert sind, so haben wir also zu fordern, dass auf jedem Flächenelement einer Integralfläche zwei dieser Fortschreitungsrichtungen zu einander conjugiert sind. Dies Problem ordnet sich also dem vorhin besprochenen unter und findet daher stets seinen analytischen Ausdruck in einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung von der Form (28).

Das Problem dagegen, alle Flächen zu bestimmen, auf denen die Haupttangentencurven der einen Schar Complexcurven sind, wird durch eine solche partielle Differentialgleichung (28) ausgedrückt, in der $4RT - S^2 \equiv 0$ ist.

System v. zwei lin. hom. part. Diffgl. 2. O.

Betrachten wir jetzt ein System von *zwei* linearen homogenen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$(30)\quad \begin{cases} R_1(x, y, z, p, q)\, r + S_1(x, y, z, p, q)\, s + T_1(x, y, z, p, q)\, t = 0, \\ R_2(x, y, z, p, q)\, r + S_2(x, y, z, p, q)\, s + T_2(x, y, z, p, q)\, t = 0. \end{cases}$$

Wir können dies System auch auf die Form bringen:

$$(30')\quad \begin{cases} \alpha_1\alpha_2 \cdot r + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)\cdot s + \beta_1\beta_2 \cdot t = 0, \\ \alpha_3\alpha_4 \cdot r + (\alpha_3\beta_4 + \alpha_4\beta_3)\cdot s + \beta_3\beta_4 \cdot t = 0. \end{cases}$$

Hierin sind die α und β gewisse gegebene Functionen von x, y, z, p, q. Wenn es eine gemeinsame Integralfläche beider partieller Differentialgleichungen giebt, so müssen die beiden Fortschreitungsrichtungen

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1}, \quad \frac{\beta_2}{\alpha_2},$$

welche die erste auf einem Flächenelement der Integralfläche bestimmt, zu einander conjugiert sein, und dasselbe gilt von den beiden Fortschreitungsrichtungen

$$\frac{\beta_3}{\alpha_3}, \quad \frac{\beta_4}{\alpha_4}.$$

Diese beiden Paare von Strahlen im Punkte (x, y, z) des betreffenden Flächenelementes bestimmen eine Involution der vom Punkte (x, y, z) ausgehenden Fortschreitungsrichtungen auf dem Flächenelement. Die Doppelelemente dieser Involution liefern die beiden *Haupttangenten.* Unser System (30) von zwei partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung ordnet also jedem Flächenelement zwei Fortschreitungsrichtungen zu (nämlich jene Doppelelemente), *und eine Fläche ist dann und nur dann eine gemeinsame Integralfläche, wenn die einem Element der Fläche zugeordneten beiden Richtungen stets die beiden Haupttangentenrichtungen sind.*

Bestimmng. d. Hauptttg.

Selbstverständlich wird bei diesen Betrachtungen vorausgesetzt, dass die Paare von Fortschreitungsrichtungen, die einem Flächenelement von den beiden Differentialgleichungen zugeordnet werden, von einander verschieden seien. Dies ist aber der Fall, wenn die beiden Differentialgleichungen selbst von einander verschieden sind.

Die Frage, ob die beiden partiellen Differentialgleichungen (30) überhaupt gemeinsame Integralflächen haben, wollen wir zunächst nicht weiter erörtern. Es sei nur bemerkt, dass man die Bedingungen der Integrabilität durch mehrmalige Differentiation der Gleichungen nach x und y erhält, indem man untersucht, ob die hervorgehenden Gleichungen einander auch nicht widersprechen.

Integrab.-Bedinggn.

Wir wollen jetzt voraussetzen, dass die Coefficienten R_1, S_1, T_1; R_2, S_2, T_2 der Gleichungen (30) von x, y, z frei seien. Dann sind die beiden Haupttangentenrichtungen, die das System (30) einem beliebigen Flächenelement zuordnet, unabhängig von dem Punktort des Flächenelementes, d. h. sie sind für parallele Flächenelemente ebenfalls parallel. Daraus folgt, dass, wenn eine Fläche eine gemeinsame Integralfläche ist, alsdann auch jede solche Fläche, die aus ihr durch irgend eine Schiebung oder Streckung hervorgeht, d. h. die mit der einen Fläche ähnlich und ähnlich gelegen ist, den beiden partiellen Differentialgleichungen (30) genügt. Zu einer Fläche giebt es aber gerade ∞^4 ähnliche und ähnlich gelegene, vorausgesetzt, dass die Fläche keine Kegelfläche ist. Von x, y, z freie part. Diffgl.

Es hat sich somit ergeben:

Satz 4: *Haben zwei partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung von der Form:* ∞^4 Integralfln.

$$R_1(p, q)\, r + S_1(p, q)\, s + T_1(p, q)\, t = 0,$$
$$R_2(p, q)\, r + S_2(p, q)\, s + T_2(p, q)\, t = 0$$

im Raume (x, y, z) *eine gemeinsame Integralfläche, die kein Kegel ist, so haben sie sicher* ∞^4 *gemeinsame Integralflächen. Diese Flächen sind einander ähnlich und ähnlich gelegen.*

Da die beiden einem Flächenelement durch das System (30) zugeordneten Haupttangentenrichtungen im jetzigen Problem für parallele Elemente ebenfalls parallel sind, so folgt, dass das jetzige Problem auch so ausgesprochen werden kann:

Gegeben ist das sphärische Bild der Haupttangentencurven; gesucht werden alle Flächen, deren Haupttangentencurven dies gegebene sphärische Bild haben. Sphär. Bild d. Haupttgncurven.

Wir specialisieren nun das Problem noch mehr: Wir setzen voraus, die beiden partiellen Differentialgleichungen (30) sollen in der oben (S. 378) angegebenen Weise zu zwei Liniencomplexen gehören, deren jeder aus allen Treffgeraden einer unendlich fernen Curve besteht. Wie wir damals gesehen haben, stellt sich alsdann jede der Gleichungen (30) in der Form dar, dass die Coefficienten R, S, T nur p und q enthalten. Wir führen dies näher aus und bemerken hier vorweg, dass nicht cylindrische Developpabeln als Integralflächen von vornherein ausgeschlossen sind. Complexe d. Treffgeraden ebener Curven.

Es mögen ξ und η die Werte von $\frac{dx}{dz}$ und $\frac{dy}{dz}$ bedeuten, sobald wir irgend eine Fortschreitungsrichtung $(dx : dy : dz)$ im Raume betrachten, sodass also zu allen parallelen Fortschreitungsrichtungen dieselben Werte ξ und η gehören. Die Grössen ξ, η können mithin wie früher als die Punktcoordinaten desjenigen Punktes der unendlich fernen Ebene aufgefasst werden, in dem sich die Geraden aller parallelen Fortschreitungsrichtungen $(dx : dy : dz)$ treffen.

Ein Liniencomplex, der aus allen Treffgeraden einer unendlich fernen Curve K besteht, kann nun durch die Gleichung dieser unendlich fernen Curve in ξ und η definiert werden. Die Ebene eines Flächenelementes (x, y, z, p, q) trifft die unendlich ferne Curve in mehreren Punkten, unter denen wir zwei, etwa P_1, P_2, auswählen, sodass die Richtungen vom Punkte (x, y, z) nach diesen beiden Punkten P_1 und P_2 hin jene beiden Richtungen sind, die durch die zugehörige partielle Differentialgleichung als conjugierte Richtungen definiert werden. Wie in § 2 spielt es auch hier zunächst gar keine Rolle, ob die beiden unendlich fernen Punkte P_1, P_2 auf einer irreducibelen Curve K oder auf zwei einzelnen Curven liegen. Wir nehmen daher vorerst an, der Punkt P_1 oder (ξ_1, η_1) sei ein Punkt der unendlich fernen Curve K_1 oder:

$$\eta_1 - \varphi_1(\xi_1) = 0,$$

ebenso der Punkt P_2 oder (ξ_2, η_2) ein Punkt der unendlich fernen Curve K_2 oder

$$\eta_2 - \varphi_2(\xi_2) = 0,$$

sodass also der betrachtete Complex aus allen Treffgeraden der unendlich fernen Curve

$$[\eta_1 - \varphi_1(\xi_1)]\,[\eta_2 - \varphi_2(\xi_2)] = 0$$

besteht. Auch sei vorausgesetzt, dass P_1 nicht stets mit P_2 zusammenfallen, d. h. dass nicht stets $\xi_1 = \xi_2$, $\eta_1 = \eta_2$ sei.

Entsprechend bestehe der zweite Complex aus allen Treffgeraden der unendlich fernen Curve

$$[\eta_3 - \varphi_3(\xi_3)]\,[\eta_4 - \varphi_4(\xi_4)] = 0,$$

und wir setzen voraus, dass nicht stets $\xi_3 = \xi_4$, $\eta_3 = \eta_4$ sei.

Nun sollen erstens die Richtungen $(dx_1 : dy_1 : dz_1)$ und $(dx_2 : dy_2 : dz_2)$, die nach den Punkten (ξ_1, η_1) und (ξ_2, η_2) gehen, conjugierte Richtungen auf dem Flächenelement (x, y, z, p, q) sein. Da

$$dx_1 : dy_1 : dz_1 = \xi_1 : \eta_1 : 1, \quad dx_2 : dy_2 : dz_2 = \xi_2 : \eta_2 : 1 \tag{31}$$

ist, so haben wir also zu fordern:

$$\xi_1 \xi_2 r + (\xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1) s + \eta_1 \eta_2 t = 0. \tag{32}$$

Analog fordern wir zweitens:

$$\xi_3 \xi_4 r + (\xi_3 \eta_4 + \xi_4 \eta_3) s + \eta_3 \eta_4 t = 0. \tag{33}$$

Da die Richtung $(dx_1 : dy_1 : dz_1)$ auf der Fläche liegen soll, so fordern wir Anal. Form d. Problems.

$$dz_1 - p\,dx_1 - q\,dy_1 = 0$$

oder nach (31):

$$1 - p\,\xi_1 - q\,\eta_1 = 0.$$

Eine Fläche also, die so beschaffen ist, dass in jedem Punkte die beiden durch ihn gehenden Tangenten, die zu dem einen Complex gehören, und ebenso die beiden durch ihn gehenden Tangenten, die zu dem anderen Complex gehören, zu einander conjugiert sind, ist mithin eine gemeinsame Integralfläche der beiden partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die aus (32) und (33) hervorgehen, wenn $\xi_1, \eta_1;\ \xi_2, \eta_2;\ \xi_3, \eta_3;\ \xi_4, \eta_4$ vermöge der acht Gleichungen

$$(34)\qquad \begin{cases} \eta_1 - \varphi_1(\xi_1) = 0, & \eta_2 - \varphi_2(\xi_2) = 0, \\ \eta_3 - \varphi_3(\xi_3) = 0, & \eta_4 - \varphi_4(\xi_4) = 0, \\ 1 - p\xi_1 - q\eta_1 = 0, & 1 - p\xi_2 - q\eta_2 = 0, \\ 1 - p\xi_3 - q\eta_3 = 0, & 1 - p\xi_4 - q\eta_4 = 0 \end{cases}$$

daraus eliminiert werden.

Das alsdann vorliegende Problem ordnet sich den oben betrachteten allgemeinen Problemen unter, und man sieht, dass die Coefficienten von r, s, t in den hervorgehenden partiellen Differentialgleichungen in der That nur von p, q abhängen.

Wir wollen annehmen, dass die beiden hervorgehenden partiellen Differentialgleichungen diese seien:

$$(35)\qquad \begin{cases} R_1(p, q)\, r + S_1(p, q)\, s + T_1(p, q)\, t = 0, \\ R_2(p, q)\, r + S_2(p, q)\, s + T_2(p, q)\, t = 0. \end{cases}$$

Nach den gemachten Voraussetzungen ist dabei weder $4R_1T_1 - S_1^2$ noch $4R_2T_2 - S_2^2$ identisch Null. Wie wir aus den früheren allgemeinen Überlegungen (S. 398) ersehen, können wir die Gleichungen (35) immer auf die Form bringen:

$$(35')\qquad \begin{cases} \alpha_1\alpha_2 r + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)\, s + \beta_1\beta_2 t = 0, \\ \alpha_3\alpha_4 r + (\alpha_3\beta_4 + \alpha_4\beta_3)\, s + \beta_3\beta_4 t = 0, \end{cases}$$

in der die α und β Functionen von p, q allein sind. Übrigens können wir, wie der Vergleich mit (32) und (33) lehrt, annehmen, dass allgemein α_i der Wert ξ_i ist, der sich aus (34) als Function von p, q ergiebt, d. h. dass α_i die Function ist, die der Gleichung

$$1 - p\alpha_i - q\varphi_i(\alpha_i) = 0$$

genügt. Entsprechend ist dann β_i die Function von $p, q,$ die durch

$$\beta_i = \varphi_i(\alpha_i)$$

definiert ist. Die α_i, β_i sind also nichts anderes als die ξ_i, η_i, ausgedrückt als Functionen von p, q.

Unser Problem, das System (35) von simultanen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu integrieren, hat nach den Ergebnissen des § 2 eine einfache *geometrische Bedeutung*. Damals sahen wir, dass die Integralflächen einer partiellen Differentialgleichung, etwa der ersten, diejenigen *Translationsflächen* sind, deren beide Scharen von erzeugenden Curven solche Flächen zu Developpabeln haben, welche die unendlich ferne Curve $\eta_1 = \varphi_1(\xi_1)$ bez. $\eta_2 = \varphi_2(\xi_2)$ enthalten. Die gemeinsamen Integralflächen der beiden Gleichungen (35) sind demnach *Translationsflächen mit vier Erzeugungen durch je* ∞^1 *congruente und gleichgestellte Curven.* Die Tangenten der Curven der einzelnen Scharen gehen dabei nach den vier gegebenen unendlich fernen Curven.

Geom. Deutg. d. Problems.

Aus Satz 4 ersehen wir, dass das System (35), sobald es überhaupt eine nicht kegelförmige Integralfläche zulässt, deren sicher ∞^4 hat. Dies leuchtet auch geometrisch ohne weiteres ein, da die zu einer Translationsfläche ähnlichen und ähnlich gelegenen Flächen wieder Translationsflächen sind, deren Erzeugende Tangenten parallel zu den Erzeugenden der ursprünglichen Fläche haben.

Wir können aber noch mehr erkennen: Differenzieren wir die beiden Gleichungen (35) partiell nach x und partiell nach y, so ergeben sich vier Gleichungen, die in den *dritten* Ableitungen von z linear sind. Ihre Determinante lautet:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} R_1 & S_1 & T_1 & 0 \\ 0 & R_1 & S_1 & T_1 \\ R_2 & S_2 & T_2 & 0 \\ 0 & R_2 & S_2 & T_2 \end{vmatrix}.$$

Ist diese Determinante $\Delta \not\equiv 0$, so bestimmen sich also die dritten Ableitungen von z vollständig als Functionen der niederen. Weitere Differentiationen ergeben alsdann überhaupt alle höheren Ableitungen von z als Functionen der niederen. Nehmen wir nun an, es existiere eine Integralfläche

$$z = f(x, y)$$

und entwickeln wir z nach Potenzen von $x - x_0$ und $y - y_0$ in der Umgebung der Stelle (x_0, y_0), so erhalten wir eine Reihe, deren Coefficienten die Ableitungen von z für die Stelle (x_0, y_0) sind. Sobald wir nun z, p, q und eine der zweiten Ableitungen von z an der Stelle

(x_0, y_0) durch *vier* Constanten geben, sind die andern beiden zweiten Ableitungen von z durch (35) und nach dem Vorhergehenden auch alle höheren Ableitungen an der Stelle (x_0, y_0) gegeben, sodass die Reihenentwickelung bestimmt ist. Mithin enthält sie nur *vier* willkürliche Constanten, d. h. es kann *höchstens* ∞^4 Integralflächen von (35) geben. **Höchstens ∞^4 Integralfln.**

Sobald also die Determinante $\varDelta \mathrel{\not\equiv} 0$ ist und das System (35) mindestens eine nicht developpabele Integralfläche hat, so hat es *gerade* ∞^4 *nicht developpabele Integralflächen,* und zwar sind sie alle einander ähnlich und ähnlich gelegen.

Bilden wir die Determinante $\varDelta$ insbesondere für die Form (35′) des Systems (35), so kommt:

$$\varDelta \equiv \begin{vmatrix} \alpha_1\alpha_2 & \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 & \beta_1\beta_2 & 0 \\ 0 & \alpha_1\alpha_2 & \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 & \beta_1\beta_2 \\ \alpha_3\alpha_4 & \alpha_3\beta_4 + \alpha_4\beta_3 & \beta_3\beta_4 & 0 \\ 0 & \alpha_3\alpha_4 & \alpha_3\beta_4 + \alpha_4\beta_3 & \beta_3\beta_4 \end{vmatrix}.$$

Es fragt sich, was die Bedingung $\varDelta \mathrel{\not\equiv} 0$ bedeutet. Erinnern wir uns daran, dass (vgl. S. 398) $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$ und $\frac{\alpha_2}{\beta_2}$ die Wurzeln der quadratischen Gleichung für u:

$$R_1u^2 + S_1u + T_1 = 0$$

und $\frac{\alpha_3}{\beta_3}$ und $\frac{\alpha_4}{\beta_4}$ die der quadratischen Gleichung:

$$R_2u^2 + S_2u + T_2 = 0$$

sind, so folgt, dass $\varDelta$ dann und nur dann verschwindet, wenn eine Wurzel der ersten Gleichung mit einer Wurzel der zweiten übereinstimmt. $\varDelta$ besitzt daher die Factoren:

$$(\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)(\alpha_1\beta_4 - \alpha_4\beta_1)(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)(\alpha_2\beta_4 - \alpha_4\beta_2).$$

Man überzeugt sich leicht, indem man z. B. die Coefficienten von $\alpha_1^2\alpha_2^2\beta_3^2\beta_4^2$ vergleicht, dass dieses Product direct gleich $\varDelta$ ist.

Die Bedingung $\varDelta \mathrel{\not\equiv} 0$ sagt also aus, dass keines der Verhältnisse

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1},\ \frac{\alpha_2}{\beta_2}$$

mit einem der Verhältnisse

$$\frac{\alpha_3}{\beta_3},\ \frac{\alpha_4}{\beta_4}$$

übereinstimmt, d. h. *dass keine der beiden Richtungen, die einem Flächenelement durch die erste Gleichung* (35′) *zugeordnet wird, mit einer der Richtungen zusammenfällt, die ihm durch die zweite Gleichung* (35′) *zugeordnet wird.* Da wir schon früher voraussetzten, dass die beiden durch eine der Gleichungen (35′) bestimmten Richtungen nicht zu- **Deutung d. Bedingg. $\varDelta \mathrel{\not\equiv} 0$.**

sammenfallen, so werden also unter der Bedingung $\varDelta \neq 0$ alle vier durch die beiden Gleichungen (35′) oder (35) dem Flächenelement zugeordneten Richtungen von einander verschieden sein.

Wir haben gesehen, dass das System von partiellen Differentialgleichungen (35) unter der Voraussetzung $\varDelta \neq 0$, die wir in allem Folgenden machen, gerade ∞^4 Integralflächen zulässt, sobald es wenigstens eine hat. Es fragt sich nun aber, ob die Gleichungen (35) überhaupt eine gemeinsame Integralfläche haben können. Da das ganze Problem gegeben ist, sobald die vier unendlich fernen Curven

$$\eta_1 - \varphi_1(\xi_1) = 0, \quad \eta_2 - \varphi_2(\xi_2) = 0, \quad \eta_3 - \varphi_3(\xi_3) = 0, \quad \eta_4 - \varphi_4(\xi_4) = 0$$

gegeben sind, so erhebt sich also die Frage, wie diese Curven gewählt werden müssen, damit die beiden Gleichungen (35) eine gemeinsame Integralfläche zulassen.

Hat man diese Frage beantwortet, so lassen sich die Integralflächen selbst, wie wir sehen werden, leicht angeben. Die gestellte Frage deckt sich also mit dem Problem, *alle Translationsflächen mit vier Erzeugungen durch congruente und gleichgestellte Curven zu bestimmen.*

Problem: Translfl. mit vier Erzeuggn.

Aus früheren Ergebnissen können wir entnehmen, dass die beiden partiellen Differentialgleichungen (35) in der That unter Umständen eine gemeinsame Integralfläche — und also deren ∞^4 — haben. Wenn wir nämlich annehmen, dass die beiden partiellen Differentialgleichungen (35) zu den beiden Complexen gehören, die aus allen Treffgeraden zweier unendlich ferner Kegelschnitte K_1 und K_2 bestehen (vgl. Fig. 70, S. 357), so werden die Curven $\eta_1 = \varphi_1(\xi_1)$ und $\eta_2 = \varphi_2(\xi_2)$ Zweige des einen Kegelschnittes K_1 und die Curven $\eta_3 = \varphi_3(\xi_3)$ und $\eta_4 = \varphi_4(\xi_4)$ Zweige des anderen Kegelschnittes sein. Wäre nun eine Fläche zu diesen beiden Complexen conjugiert, so würde die Tangentenebene eines Punktes p der Fläche die unendlich ferne Ebene in einer Geraden g schneiden, die mit K_1 die beiden Punkte P_1 und P_2, mit K_2 die beiden Punkte P_3 und P_4 gemein habe. Die Haupttangenten des Punktes p mögen die unendlich ferne Ebene in H_1 und H_2 treffen. Es müssten H_1 und H_2 die Punktepaare P_1, P_2 und P_3, P_4 harmonisch trennen. Nach einem Satze von Desargues aber schneiden alle Kegelschnitte des von K_1 und K_2 bestimmten Büschels die Gerade g in den Punktepaaren einer Involution. Man sieht also, dass H_1, H_2 auch das durch einen beliebigen Kegelschnitt des Büschels auf g bestimmte Punktepaar harmonisch trennen. Daraus folgt, dass eine Fläche, die zu den beiden vorhin erwähnten Complexen conjugiert wäre, überhaupt zu jedem der ∞^1 Complexe conjugiert wäre, deren jeder aus allen Treffgeraden eines Kegelschnittes des Büschels besteht. Wenn es also im vorliegenden Fall überhaupt gemeinsame Integralflächen der beiden partiellen Differentialgleichungen (35) giebt, so müssen sie ∞^1 *Scharen von je* ∞^1 *congruenten und gleichgestellten Curven* enthalten. Solche Flächen haben wir aber in § 5 des 8. Kap., S. 364, gefunden, nämlich diese: Trlfln. mit ∞^1 Erzeuggn.

$$Ae^x + Be^y + Ce^z + D = 0. \tag{36}$$

Sie stehen in der That in der hier besprochenen Beziehung zu allen Kegelschnitten eines Büschels.

Das Problem, alle Translationsflächen mit vier Erzeugungen durch je ∞^1 congruente und gleichgestellte Curven zu bestimmen, lässt sich allgemein lösen. Wir gehen jedoch hier nicht näher darauf ein und beschränken uns auf einige Andeutungen: Da das Problem darauf hinauskommt, die vier unendlich fernen Curven Andeutg. d. allg. Lösg. d. Problems.

$$\eta_1 = \varphi_1(\xi_1), \quad \eta_2 = \varphi(\xi_2), \quad \eta_3 = \varphi_3(\xi_3), \quad \eta_4 = \varphi_4(\xi_4) \tag{37}$$

zu finden, so liegt es in der Natur der Sache, dass sich die Integrabilitätsbedingungen des Systems (35) als Gleichungen darstellen werden, die nur die ξ, η und ihre Ableitungen enthalten. Man könnte leicht erkennen, dass sie die Ableitungen nur bis zu denen von *zweiter* Ordnung enthalten. Es lässt sich nun aber zeigen, wie wir ohne Beweis mitteilen, dass sich nur eine Integrabilitätsbedingung ergiebt und dass sie aussagt, *dass die vier unendlich fernen Curven Zweige einer irreducibelen oder zerfallenden Curve vierter Ordnung sein müssen* *). Unendl. ferne Curve 4. O.

Dass umgekehrt, sobald die Curven (37) Zweige einer Curve vierter Ordnung sind, das System (35) oder (35′) in der That Lösungen besitzt, kann man ableiten aus dem *Abel'schen Theorem*, angewandt auf das Schnittpunktsystem einer beweglichen Geraden g mit der festen Curve vierter Ordnung. Es sei nämlich in den oben eingeführten Punktcoordinaten ξ, η Abel'sches Theorem.

$$F(\xi, \eta) = 0 \tag{38}$$

die Gleichung der unendlich fernen Curve vierter Ordnung. Wir schneiden die Curve mit einer Geraden und lassen diese sich bewegen, bis sie in eine Endlage g kommt, in der die vier Schnittpunkte die

*) Seit 1869 hat sich Lie in einer Reihe von Arbeiten mit den Translationsflächen beschäftigt, vgl. insbesondere Archiv for Math. og Naturv. 1882 und Comptes Rendus 114 Bd., 1892, S. 334. Auf seine Veranlassung wurden unter Leitung von Scheffers eine Reihe von Modellen zu den Translationsflächen mit vier bez. ∞^1 Erzeugungen im Math. Institut der Univ. Leipzig angefertigt.

Abel'sche Integrale 1. Gattg.

Abscissen $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ haben. Bilden wir darauf die drei Abel'schen Integrale erster Gattung:

$$(39) \qquad \int_a^{\xi} \frac{\xi\, d\xi}{F_\eta} = \Phi(\xi), \quad \int_b^{\xi} \frac{\eta\, d\xi}{F_\eta} = \Psi(\xi), \quad \int_c^{\xi} \frac{d\xi}{F_\eta} = X(\xi),$$

indem wir dabei immer zwischen ξ und η die Relation (38) voraussetzen, so sagt das Abel'sche Theorem aus, dass bei passender Wahl der Anfangswerte:

$$\Phi(\xi_1) + \Phi(\xi_2) + \Phi(\xi_3) + \Phi(\xi_4) = 0,$$
$$\Psi(\xi_1) + \Psi(\xi_2) + \Psi(\xi_3) + \Psi(\xi_4) = 0,$$
$$X(\xi_1) + X(\xi_2) + X(\xi_3) + X(\xi_4) = 0$$

ist. Mithin liefern die Gleichungen:

$$(40) \qquad \begin{cases} x = \Phi(\xi_1) + \Phi(\xi_2), \\ y = \Psi(\xi_1) + \Psi(\xi_2), \\ z = X(\xi_1) + X(\xi_2) \end{cases}$$

dieselbe Fläche wie die Gleichungen:

$$(40') \qquad \begin{cases} x = -\Phi(\xi_3) - \Phi(\xi_4), \\ y = -\Psi(\xi_3) - \Psi(\xi_4), \\ z = -X(\xi_3) - X(\xi_4), \end{cases}$$

während die Form dieser Gleichungen lehrt, dass wir es mit einer *Translationsfläche* zu thun haben, *die demnach vier Scharen von je* ∞^1 *congruenten und gleichgestellten Curven enthält, nämlich:*

$$\xi_1 = \text{Const.}, \quad \xi_2 = \text{Const.}, \quad \xi_3 = \text{Const.}, \quad \xi_4 = \text{Const.}$$

Nach (39), (40) und (40′) ist hier:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi_i} : \frac{\partial z}{\partial \xi_i} = \Phi'(\xi_i) : X'(\xi_i) = \xi_i,$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi_i} : \frac{\partial z}{\partial \xi_i} = \Psi'(\xi_i) : X'(\xi_i) = \eta_i.$$

Da aber ξ_i und η_i die Relation (38) erfüllen, so ist hiermit verificiert, dass die Fläche (40), (40′) eine gemeinsame Integralfläche der beiden partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung (35) oder (35′) ist für den Fall, dass zwischen den α_i, β_i (oder ξ_i, η_i) die Relation vierten Grades

$$F(\alpha_i, \beta_i) = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

festgesetzt wird, also für den Fall, dass die vier unendlich fernen Curven eine Curve vierter Ordnung bilden.

Aus der Translationsfläche (40) oder (40′) erhalten wir alle ∞^4 Translationsflächen mit je vier Erzeugungen, die zu der gewählten Curve vierter Ordnung $F(\xi, \eta) = 0$ gehören, wenn wir auf sie eine allgemeine Ähnlichkeitstransformation ausüben.

Offenbar geht die Fläche (40) oder (40′) durch Spiegelung am Anfangspunkte in sich über, denn die Gleichungen (40) und (40′) geben, wenn in ihnen ξ_1 und ξ_3 ein gemeinsamer Wert und ξ_2 und ξ_4 ein gemeinsamer Wert erteilt wird, zwei Punkte der Fläche, deren Coordinaten einander entgegengesetzt gleich sind, also zwei Punkte, deren Mitte der Anfangspunkt ist.

Eine jede der ∞^4 gefundenen Flächen hat folgende Eigenschaft: Construieren wir in einem Punkte p der Fläche die Tangentenebene, so schneidet sie die unendlich ferne Ebene in einer Geraden g, die mit der Curve vierter Ordnung (38) vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 gemein hat. Alsdann sind pP_1, pP_2, pP_3, pP_4 Tangenten, von denen etwa pP_1 und pP_2 und ebenso pP_3 und pP_4 zu einander conjugiert sind.

Zerfällt die Curve vierter Ordnung in eine Curve dritter Ordnung Zerfallen d. Curve 4. O.
und in eine Gerade, so liegt etwa P_4 auf der Geraden, d. h. die Erzeugenden $\xi_4 =$ Const. auf der Fläche haben lauter Tangenten, die eine feste unendlich ferne Gerade treffen und sind daher *eben*. Ist die Gerade insbesondere eine Wendetangente der Curve dritter Ordnung, so sind diese ebenen Erzeugenden *Parabeln*, wie sich leicht zeigen lässt.

Zerfällt die Curve vierter Ordnung in zwei Kegelschnitte K_1 und K_2, so sind *zwei Fälle* denkbar. Entweder liegen die beiden Punkte P_1, P_2, die zu conjugierten Tangenten pP_1 und pP_2 gehören, auf dem einen und also die beiden anderen Punkte P_3, P_4 auf dem anderen Kegelschnitt, oder aber P_1, P_3 liegen auf K_1 und P_2, P_4 auf K_2. Im *ersteren* Falle zeigt sich, dass aus dem Satz von Desargues, wie oben dargethan wurde, folgt, dass die betreffenden Flächen unendlich viele Scharen von je ∞^1 congruenten Curven enthalten, entsprechend den ∞^1 Kegelschnitten des von K_1 und K_2 bestimmten Büschels, während dieser Schluss im zweiten Fall unrichtig wäre. Der erstere Fall liefert, wie gesagt, die Flächen (36). Sie entprechen der Annahme des Büschels von Kegelschnitten:

$$(1 + \varkappa)\,\xi\eta - \xi - \varkappa\eta = 0.$$

Eine Translationsfläche geht ferner bei linearer Transformation des Raumes (x, y, z) wieder in eine Translationsfläche über. Bei einer derartigen Transformation aber wird die unendlich ferne Ebene in sich und zwar projectiv transformiert. Aus der Gleichung (36) gehen daher die Flächen, die zu einem beliebigen unendlich fernen Büschel gehören, durch lineare Transformation hervor. Wählt man insbesondere das Büschel:

$$\xi^2 + \varkappa\xi\eta + \eta^2 + 1 = 0,$$

das aus dem vorhergehenden durch *imaginäre* projective Transformation in ξ, η hervorgeht und das den Kugelkreis (für $\varkappa = 0$) enthält, so wird man auf die *Scherk'sche Minimalfläche* geführt, die in ihrer einfachsten Gestalt so lautet:

Scherk'sche Minimalfl.

$$e^z = \frac{\sin x}{\sin y}.$$

Die Scherk'sche Minimalfläche enthält daher ∞^1 Scharen von je ∞^1 congruenten und gleichgestellten Curven.

Das Kegelschnittsbüschel kann auch ausarten. Ist z. B. das Kegelschnittsbüschel gegeben durch

$$\xi^2 + \eta^2 = \varkappa,$$

so kommt man zur *Minimal-Schraubenfläche:*

Minimal-Schraubenfl.

$$z = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}.$$

In der That enthält diese ∞^1 Scharen von je ∞^1 congruenten und gleichgestellten Schraubenlinien. Je ∞^1 solche liegen nämlich auf ∞^1 congruenten Rotationscylindern, welche die Axe der Schraubenfläche als Erzeugende enthalten.

Das Büschel von Kegelschnitten:

$$\xi^2 + \varkappa\eta^2 + 3\eta = 0$$

liefert die bekannte *Cayley'sche Regelfläche dritter Ordnung* in der Form:

Cayley'sche Regelfl. 3. O.

$$y^3 + 2xy - 2z = 0.$$

Wenn die Curve vierter Ordnung (38) in zwei Kegelschnitte zerfällt und der vorhin erwähnte zweite Fall eintritt, dass P_1, P_2 auf verschiedenen und ebenfalls P_3, P_4 auf verschiedenen Kegelschnitten liegen, ergeben sich Translationsflächen mit nur vier Erzeugungen durch je ∞^1 congruente und gleichgestellte Curven, nämlich die schon in § 5 des 8. Kap., S. 364, besprochenen Flächen:

$$Ae^{y+z} + Be^{z+x} + Ce^{x+y} + Le^x + Me^y + Ne^z = 0.$$

Hierher gehören ferner die aus diesen durch lineare Transformation des Raumes (x, y, z) hervorgehenden Flächen sowie die Ausartungen dieser Flächen, die bei specieller Wahl der beiden Kegelschnitte hervorgehen.

Wir formulieren unsere Ergebnisse als

Theorem 15: *Ist* $F(\xi, \eta) = 0$ *die Gleichung einer irreducibelen oder zerfallenden Curve vierter Ordnung und wird*

$$\int \frac{\xi d\xi}{F_\eta} \equiv \Phi(\xi), \quad \int \frac{\eta d\xi}{F_\eta} \equiv \Psi(\xi), \quad \int \frac{d\xi}{F_\eta} \equiv X(\xi)$$

gesetzt, so stellen die Gleichungen:

$$x = \Phi(\xi_1) + \Phi(\xi_2), \quad y = \Psi(\xi_1) + \Psi(\xi_2), \quad z = X(\xi_1) + X(\xi_2)$$

eine Fläche dar, die in vier verschiedenen Weisen durch Translation je einer Curve erzeugt werden kann.

Wir merken hier noch Folgendes an: Die *Minimalflächen* können definiert werden als die Flächen, die conjugiert sind zu dem Complex aller Minimalgeraden, d. h. aller Treffgeraden des Kugelkreises. Sie gehören daher auch zu den Translationsflächen, indem sie durch Translationsbewegung einer Minimalcurve längs einer anderen Minimalcurve hervorgehen. Man kann nun nach den *Minimalflächen* fragen, *die noch in anderer Weise Translationsflächen sind,* also noch zwei Scharen congruenter und gleichgestellter Curven enthalten. Nach dem Vorhergehenden gelangt man zu ihnen, wenn die unendlich ferne Curve vierter Ordnung in den Kugelkreis und noch einen Kegelschnitt zerfällt. Dies erklärt, dass oben die Scherk'sche Minimalfläche und die Minimal-Schraubenfläche auftrat.

Minimalfl. mit mehrf. Erzeugg. als Translationsfl.

Man kann auch die Aufgabe erledigen, alle *algebraischen* Flächen zu finden, die vier Scharen congruenter und gleichgestellter Curven enthalten. Der Vollständigkeit halber bemerken wir ausdrücklich, dass alle Cylinder und insbesondere die Ebenen in unendlich vielen Weisen als Translationsflächen aufgefasst werden können.

Kapitel 10.

Beziehung zwischen Sätzen über Geraden und Kugeln.

Das gegenwärtige Kapitel ist das *wichtigste* dieses ganzen Bandes. Wir entwickeln nämlich darin eine Reihe von Theorien, die eine ganz hervorragende Bedeutung haben und die uns im zweiten Bande in ausgedehntem Masse wieder beschäftigen werden. Einige unter den wichtigsten Ergebnissen dieses Kapitels deuten wir hier an:

Zunächst bestimmen wir *alle conformen Punkttransformationen* des Raumes, wodurch wir zu dem von Liouville zuerst aufgestellten Satze über diese Transformationen gelangen. Dabei benutzen wir solche Methoden, deren Ausdehnung auf Räume von beliebig vielen Dimensionen wir allerdings in diesem Bande noch nicht geben, dem Leser aber doch nahe legen. Sodann wenden wir uns zu einer schon öfters untersuchten *Beziehung zwischen den Punkten des Raumes und den Kreisen der Ebene.* Insbesondere finden wir, *dass die conformen Punkttransformationen des Raumes denjenigen Berührungstransformationen der Ebene entsprechen, die jeden Kreis in einen Kreis überführen.*

Darauf kommen wir durch gewisse Überlegungen, die wir hier nicht weiter andeuten wollen, zur Betrachtung des Gleichungensystems:

$$X + iY + xZ + z = 0,$$
$$x(X - iY) - Z - y = 0$$

in den beiden Wertsystemen x, y, z und X, Y, Z und zeigen, dass es eine *ein-ein*deutige Beziehung zwischen den *Linienelementen* der beiden Monge'schen Gleichungen

$$x\,dy - y\,dx + dz = 0$$

und

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = 0$$

bestimmt. Die erstere Gleichung ist die eines *linearen Liniencomplexes* im Raume (x, y, z), die letztere definiert den Complex aller *Minimalgeraden* des Raumes (X, Y, Z). Es ergiebt sich, dass durch jenes Gleichungensystem auch ein *ein-ein*deutiges Entsprechen zwischen den Curven des linearen Complexes und den Minimalcurven des Raumes (X, Y, Z) hergestellt wird.

Hieraus leiten wir darauf eine *ein-zwei*deutige Beziehung zwischen den *Flächenelementen* in den beiden Räumen (x, y, z) und (X, Y, Z) ab, bei der die Flächenelemente einer Fläche im einen Raume den Flächenelementen einer Fläche im anderen Raume entsprechen, wobei aber Curven und Punkte als Ausartungen von Flächen auftreten.

Insbesondere den Flächenelementen einer *Geraden* des Raumes (x, y, z), d. h. den Flächenelementen, deren Punkte auf der Geraden liegen und deren Ebenen die Gerade enthalten, entsprechen dabei die Flächenelemente einer *Kugel* des Raumes (X, Y, Z).

Hiermit wird ein merkwürdiger Zusammenhang zwischen der Geometrie der Geraden und der Geometrie der Kugeln hergestellt, der allerdings erst im zweiten Bande eingehender untersucht werden soll. Hier beweisen wir aber wenigstens noch das wichtige Theorem, nach dem den *Haupttangentencurven* einer Fläche im Raume (x, y, z) die *Krümmungslinien* der zugeordneten Fläche im Raume (X, Y, Z) entsprechen.

Anhangsweise führen wir schliesslich noch den Begriff: Verein von Linienelementen im Raume ein und zeigen, dass eine Transformation der Linienelemente des Raumes, die jeden Verein in einen Verein überführt, notwendig eine Punkttransformation ist.

§ 1. Die conformen Punkttransformationen des Raumes. Abbildung der Kreise der Ebene als Punkte des Raumes.

Zuerst beabsichtigen wir, den Begriff: conforme Punkttransformation im Raume aufzustellen und dann alle derartigen Transformationen zu bestimmen. Dabei aber ist es zum besseren Verständnis zweckmässig, alle conformen Punkttransformationen der Ebene, die jeden Kreis in einen Kreis verwandeln, vorher zu bestimmen. Deshalb wollen wir uns zuerst hiermit beschäftigen.

Es mögen x, y gewöhnliche rechtwinklige Punktcoordinaten in der Ebene bedeuten. Eine Punkttransformation

$$x_1 = \varphi(x, y), \quad y_1 = \psi(x, y)$$

heisst dann *conform*, wenn sie in den kleinsten Teilen ähnlich ist, d. h., deutlicher ausgesprochen, wenn sie so beschaffen ist, dass die von einem Punkte (x, y) ausgehenden Bogenelemente bei der Transformation in ihrer Länge nur um einen zwar vom Punktorte (x, y), nicht aber von der Richtung der Bogenelemente abhängigen Factor geändert werden. Analytisch ausgedrückt heisst also die Punkttransformation dann und nur dann conform, wenn sie eine Gleichung von der Form Conf. Pkttrf. i. d. Ebene.

$$dx_1^2 + dy_1^2 = \varrho(x, y)\,(dx^2 + dy^2) \tag{1}$$

nach sich zieht, in der ϱ ein von x, y allein abhängiger Factor ist. Ist dies der Fall, so wird jede unendlich kleine Figur vermöge der Transformation in eine solche neue Figur übergeführt, die der ursprünglichen ähnlich ist, denn man kann leicht nachweisen, dass eine derartige Transformation auch den Winkel, den zwei von einem Punkte ausgehende Bogenelemente mit einander bilden, ungeändert lässt, dass sie also *winkeltreu* ist. Wir brauchen auf diese bekannten Dinge hier nicht näher einzugehen.

Da sich die Gleichung (1) mit Hülfe der imaginären Einheit i auch so schreiben lässt:

$$d(x_1 + iy_1) \cdot d(x_1 - iy_1) = \varrho d(x + iy) \cdot d(x - iy),$$

so bestehen vermöge der conformen Transformation entweder zwei Gleichungen von der Form:

$$x_1 + iy_1 = \Phi(x + iy), \quad x_1 - iy_1 = \Psi(x - iy) \tag{2}$$

oder zwei Gleichungen von der Form:

$$x_1 + iy_1 = \Phi(x - iy), \quad x_1 - iy_1 = \Psi(x + iy).$$

Wir beschränken uns auf den ersten Fall (2), in dem jede unendlich kleine Figur in eine gleichsinnig ähnliche übergeht. Der zweite Fall, in dem jede unendlich kleine Figur in eine ähnliche von entgegengesetztem Sinn verwandelt wird, lässt sich ja durch eine Umklappung der ganzen Ebene auf den ersten Fall zurückführen. Soll nun die Transformation (2) überdies reell sein, so müssen Φ und Ψ dieselben Functionen ihres Argumentes sein. Dadurch kommt man zu der bekannten Darstellung der conformen Transformationen:

$$x_1 + iy_1 = \Phi(x + iy), \quad x_1 - iy_1 = \Phi(x - iy).$$

Ist $X(x, y)$ der reelle und $i\,Y(x, y)$ der imaginäre Teil der Function $\Phi(x + iy)$, so kann man die Transformation auch so schreiben:

$$x_1 = X(x, y), \quad y_1 = Y(x, y).$$

Im Jahre 1779 bestimmte Lagrange*) alle conformen Abbildungen der Rotationsflächen auf die Ebene, insbesondere der Kugel auf die Ebene und damit implicite alle conformen Punkttransformationen in der Ebene. Ferner löste er die Aufgabe, die Kugel so conform auf die Ebene abzubilden, dass sich jeder Kreis auf der Kugel als Kreis abbildet. Es erhellt, dass er damit auch das Problem gelöst hat, die conformen Punkttransformationen in der Ebene zu bestimmen, die jeden Kreis in einen Kreis überführen. Gauss hat 1822**) die naheliegende Verallgemeinerung gegeben, beliebige Flächen conform auf einander abzubilden, eine Verallgemeinerung, die für die Flächentheorie von Bedeutung geworden ist.

Für unsere Zwecke ist es nötig, die von Lagrange bestimmten conformen Transformationen besonderer Art aufzustellen, die Kreise in Kreise verwandeln. Wir schlagen dabei jedoch einen anderen Weg ein.

Conf. Trf. i. d. Ebene, die Kreis i. Kreis trf.

Wir stellen uns also die Aufgabe, *alle die conformen Punkttransformationen der Ebene zu bestimmen, die jeden Kreis in einen Kreis überführen.* Unter diesen Transformationen sind uns von vornherein mehrere bekannt. Offenbar gehören hierher alle *Translationen* oder

---

*) Lagrange, *Sur la construction des cartes géographiques.* Nouveaux Mém. de l'Acad. de Berlin 1779, S. 161. Siehe auch Oeuvres 4. Bd., S. 635.

**) Gauss, *Allgemeine Auflösung der Aufgabe, die Teile einer gegebenen Fläche auf eine andere gegebene Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Teilen ähnlich wird.* Preisschrift, geschrieben 1822, veröff. i. d. Astron. Nachr. 3. Heft, 1825, S. 1, siehe auch Werke, 4. Bd., S. 189. Die Bezeichnung: *conform* führte er in seinen *Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie*, Gött. Abh. 1844, auch Werke 4. Bd. (daselbst insbes. S. 262) ein.

Schiebungen und alle *Rotationen*, also alle Bewegungen der Ebene in sich, ferner alle *Ähnlichkeitstransformationen* sowie insbesondere die wichtigen *Transformationen durch reciproke Radien* (vgl. 3. Beispiel, § 1 des 1. Kap., S. 6). Wir werden sehen, dass die allgemeinste hierhin gehörige Transformation durch eine Aufeinanderfolge der soeben genannten besonderen Transformationen ersetzt werden kann.

Es sei nämlich C irgend eine conforme Transformation der Ebene, bei der jeder Kreis in einen Kreis übergeht. Wir wählen einen beliebigen Punkt p in der Ebene aus. Er wird vermöge C in einen Punkt p_1 übergehen:

$$(p)\,C = (p_1).$$

Nun giebt es auch eine *Translation* T, die p nach p_1 bringt:

$$(p)\,T = (p_1).$$

Die zu ihr inverse Translation T^{-1} bringt p_1 nach p:

$$(p_1)\,T^{-1} = (p).$$

Es wird also:

$$(p)\,CT^{-1} = (p_1)\,T^{-1} = (p),$$

d. h. die Aufeinanderfolge von C und T^{-1} führt den Punkt p schliesslich wieder in sich über, lässt ihn also invariant. Da C und T^{-1} beide conform sind und da sie beide jeden Kreis in einen Kreis verwandeln, so erhellt, dass auch die Transformation, die ihrer Aufeinanderfolge CT^{-1} äquivalent ist, conform ist und jeden Kreis in einen Kreis überführt. Es sei nun R eine Transformation durch reciproke Radien, deren Pol der Punkt p ist. Betrachten wir dann die Aufeinanderfolge der vier Transformationen:

$$RCT^{-1}R.$$

Da sie alle vier conform sind und jede alle Kreise immer wieder in Kreise verwandelt, so ist die Transformation, die der Aufeinanderfolge äquivalent ist, ebenfalls conform, und sie verwandelt jeden Kreis in einen Kreis. Aber sie hat nun einige besondere Eigenschaften. Zunächst können wir sie so schreiben:

$$R(CT^{-1})\,R.$$

Eine beliebige Gerade g wird durch R in einen Kreis durch den Pol p übergeführt (siehe S. 7). Da p bei CT^{-1} fest ist und da CT^{-1} jeden Kreis in einen Kreis verwandelt, so geht der soeben erhaltene Kreis bei CT^{-1} wieder in einen Kreis durch p über. Wenn wir auf diesen Kreis schliesslich R ausüben, so geht er in eine Gerade über. Also folgt, dass die conforme Transformation, die der Aufeinanderfolge $RCT^{-1}R$ äquivalent ist und die jeden Kreis in einen Kreis überführt insbesondere jede Gerade in eine Gerade verwandelt. Eine Transformation aber, die jeden Kreis in einen Kreis und insbesondere jede Gerade in eine Gerade überführt, verwandelt, wie bekannt ist, jede Figur in eine ähnliche Figur. Sie ist also eine Ähnlichkeitstransformation, d. h. sie besteht in einer Drehung der ganzen Ebene um einen festen Punkt, in einer gleichzeitigen Vergrösserung aller von diesem Punkt ausgehender Radienvectoren nach einem constanten Verhältnis und eventuell einer Umklappung der Ebene. Sie sei mit A bezeichnet. Unser Ergebnis wird nun durch die symbolische Gleichung dargestellt:

$$RCT^{-1}R = A.$$

Da die Transformationen durch reciproke Radien involutorisch sind, also die Aufeinanderfolge RR die Identität liefert, so erhalten wir, wenn wir in der symbolischen Gleichung auf beiden Seiten links und rechts den Factor R hinzufügen:

$$CT^{-1} = RAR.$$

Multiplicieren wir beiderseits rechts mit T, so kommt schliesslich:

$$C = RART,$$

in Worten: Die gesuchten conformen Transformationen lassen sich darstellen als Folgen der schon oben erwähnten besonderen Transformationen. Die Translation T ist ein Specialfall der allgemeinen Ähnlichkeitstransformation. Ferner ist zu beachten, dass wir factisch gar keinen Gebrauch davon gemacht haben, dass die betrachteten Transformationen conform sind. Wir haben nur das benutzt, dass sie Kreise in Kreise überführen. Also können wir den Satz aussprechen:

Satz 1: *Jede solche Punkttransformation in der Ebene, bei der jeder Kreis in einen Kreis übergeht, lässt sich als eine Aufeinanderfolge von Ähnlichkeitstransformationen und Transformationen durch reciproke Radien darstellen und ist daher auch conform.*

Besond. Darst. jeder solchen Trf. Wir können dem Satz noch eine speciellere Form geben. Da nämlich R alle Geraden in Kreise durch den Pol p verwandelt, da diese Kreise bei A in alle Kreise durch den Punkt p' übergehen, für den

$$(p)A = (p')$$

ist, da ferner R alle Kreise durch p' in alle Kreise durch den Punkt p'' transformiert, für den

$$(p')R = (p'')$$

ist, und da endlich T diese letzteren Kreise in alle Kreise durch den Punkt O verschiebt, für den

$$(p'')\,T = (O)$$

ist, so folgt, *dass die Aufeinanderfolge $RART$ oder also C alle ∞^2 Geraden der Ebene in alle ∞^2 Kreise durch einen gemeinsamen Punkt O verwandelt.*

Wir wählen nun eine Transformation durch reciproke Radien R_1, die gerade diesen Punkt O zum Pol hat. Die Aufeinanderfolge CR_1 führt dann jede Gerade in eine Gerade über, da ja R_1 alle Kreise durch O wieder in Geraden verwandelt. Diese Aufeinanderfolge ist also einer Ähnlichkeitstransformation A_1 äquivalent. Also ist:

$$CR_1 = A_1$$

oder, wie durch beiderseitiges Hinzufügen des rechten Factors R_1 hervorgeht:

(3) $$C = A_1 R_1.$$

Wir heben hierbei hervor, dass die Transformation durch reciproke Radien R_1 durch ihren Pol O nicht völlig bestimmt ist. Vielmehr muss noch angegeben werden, welchen constanten Wert das Product aus dem ursprünglichen und dem transformierten Radiusvector von O aus haben soll. Offenbar können wir ihn in der vorhergehenden Betrachtung beliebig, aber bestimmt wählen. Wir wählen ihn gleich der Einheit (wie auf S. 6). Wir nennen dann R_1 eine Transformation mit dem Grundkreis vom Radius Eins, weil der Kreis um O mit diesem Radius bei R_1 punktweis invariant bleibt. Nunmehr sprechen wir das durch die Formel (3) ausgedrückte Ergebnis so aus:

Satz 2: *Jede solche Punkttransformation der Ebene, bei der jeder Kreis in einen Kreis übergeht, ist conform und der Aufeinanderfolge einer Ähnlichkeitstransformation und einer Transformation durch reciproke Radien mit dem Grundkreis vom Radius Eins äquivalent.*

Hieraus können wir entnehmen, wieviele derartige Transformationen vorhanden sind: Zwei solche Transformationen:

$$C = A_1 R_1 \quad \text{und} \quad C' = A_1' R_1'$$

sind nämlich dann und nur dann mit einander identisch, wenn

$$A_1 R_1 = A_1' R_1'$$

oder also, wie durch beiderseitige Hinzufügung des linken Factors A_1^{-1} und des rechten Factors R_1' hervorgeht, wenn:

$$R_1 R_1' = A_1^{-1} A_1'$$

ist. Nun hat R_1 den Pol O, und R_1' möge den Pol O' haben. Eine Gerade geht bei R_1 in einen Kreis durch O über, dieser bei R_1' in einen Kreis durch den Punkt U, der aus O vermöge R_1' hervorgeht, für den also

$$(O)R_1' = (U)$$

ist. Also geht eine Gerade bei $R_1 R_1'$ in einen Kreis durch U über. Andererseits geht eine Gerade bei $A_1^{-1} A_1'$ offenbar wieder in eine Gerade über. Also kann die obige symbolische Gleichung nur dann richtig sein, wenn die Kreise durch U Geraden sind, d. h. wenn U unendlich fern liegt, mit andern Worten, wenn R_1' den Punkt O ins Unendlichferne transformiert und daher O auch der Pol von R_1' ist. Dann aber sind R_1 und R_1' mit einander identisch, sodass (4) ergiebt:

$$1 = A_1^{-1} A_1'$$

oder

$$A_1 = A_1',$$

also auch $C = C'$. Also sehen wir: Zwei Transformationen $C = A_1 R_1$ und $C' = A_1' R_1'$ sind dann und nur dann mit einander identisch, wenn $A_1 = A_1'$ und $R_1 = R_1'$ ist.

Daraus folgt, dass die allgemeinste Transformation $C = A_1 R_1$ von gerade so vielen wesentlichen Parametern abhängt, als A_1 und R_1 zusammen. Nun ist jede gleichsinnige Ähnlichkeitstransformation A_1 bestimmt durch den Drehpunkt, der von zwei Coordinaten abhängt, durch die Amplitude der Drehung und durch das constante Vergrösserungsverhältnis der Radienvectoren, d. h. sie hängt von *vier* wesentlichen Parametern ab. Offenbar hängen die ungleichsinnigen Ähnlichkeitstransformationen von ebensovielen Parametern ab. Es giebt also ∞^4 Ähnlichkeitstransformationen A_1. Die Transformation durch reciproke Radien R_1 ist bestimmt, sobald ihr Pol gegeben ist, also durch *zwei* wesentliche Parameter. Mithin folgt:

Anzahl der Trfn.

Satz 3: *Es giebt in der Ebene gerade ∞^6 Punkttransformationen, die jeden Kreis in einen Kreis überführen und daher auch conform sind. Diese Transformationen sind ein-eindeutig.*

Das Letztere folgt unmittelbar daraus, dass die Ähnlichkeitstransformationen und die Transformationen durch reciproke Radien eineindeutig sind.

Anal. Darstellg.

Nebenbei sei hier angegeben, wie sich diese Transformationen analytisch darstellen: Wenn wir

$$x \pm iy \equiv w, \quad x_1 + iy_1 \equiv w_1$$

setzen, so giebt die Gleichung:

$$w_1 = Aw + B$$

alle Ähnlichkeitstransformationen an, während:

$$w_1 = \frac{1}{w + a}$$

unter anderen alle Transformationen durch reciproke Radien liefert. Führen wir zwei solche Transformationen nach einander aus, so ergiebt sich als die Transformation, die der Aufeinanderfolge äquivalent ist, eine Transformation von der allgemeinen Form:

$$w_1 = \frac{Aw + B}{Cw + D}$$

oder:

$$x_1 + iy_1 = \frac{A(x \pm iy) + B}{C(x \pm iy) + D}.$$

Hierin können A, B, C, D beliebige complexe Constanten sein.

Während wir uns in der Ebene auf die Betrachtung derjenigen conformen Punkttransformationen beschränkt haben, die jeden Kreis in einen Kreis überführen, wenden wir uns jetzt zur Betrachtung und Bestimmung *aller conformen Punkttransformationen des Raumes überhaupt.* Wir werden nämlich finden, dass sich die Sache im Raume insofern wesentlich anders stellt, als eine conforme Transformation des Raumes *stets* jede Kugel in eine Kugel überführt. Daraus werden wir dann schliessen, dass die Gesamtheit aller conformer Punkttransformationen im Raume von einer endlichen Anzahl von Parametern abhängt, während sie in der Ebene nach (2) von zwei willkürlichen Functionen abhängt. Conf. Trf. i. Raum.

Es mögen X, Y, Z gewöhnliche rechtwinklige Punktcoordinaten im Raume bedeuten. Eine Punkttransformation

(4) $\quad X_1 = \mathfrak{X}(X, Y, Z), \quad Y_1 = \mathfrak{Y}(X, Y, Z), \quad Z_1 = \mathfrak{Z}(X, Y, Z)$

im Raume heisst *conform*, wenn sie wiederum die oben für den Fall der Ebene (S. 413) angegebene Eigenschaft hat, analytisch ausgedrückt, wenn sie eine Gleichung von der Form

(5) $\quad dX_1^2 + dY_1^2 + dZ_1^2 = \varrho(X, Y, Z)\,(dX^2 + dY^2 + dZ^2)$

nach sich zieht, in der ϱ ein von X, Y, Z allein abhängiger Factor ist. Wie in der Ebene, so lässt sich auch im Raume analytisch zeigen, dass die conformen Transformationen *winkeltreu* sind, d. h. dass der Winkel zweier von einem Punkte ausgehender Bogenelemente bei ihnen nicht geändert wird. Mit dem sehr einfachen Nachweis halten wir uns hier nicht auf.

Die Bedingung (5) für die conformen Transformationen (4) können wir auch anders aussprechen: Die *Monge'sche Gleichung* Monge'sche Gl.

(6) $$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = 0$$

geht bei einer conformen Transformation wegen (5) über in:

(7) $$dX_1^2 + dY_1^2 + dZ_1^2 = 0,$$

sie bleibt demnach bei den conformen Transformationen *invariant.*

Umgekehrt, wenn eine Punkttransformation (4) die Monge'sche Gleichung (6) in (7) überführt, so ist sie conform. Denn da dX_1, dY_1, dZ_1

vermöge der Gleichungen (4) lineare homogene Functionen von dX, dY, dZ sind, so kann die Gleichung (7) nur in der Weise vermöge (4) aus (6) hervorgehen, dass die linke Seite von (7) die Form (5) hat.

Trfn. d. Minimalc. in ebensolche.

Die Integralcurven der Monge'schen Gleichung (6) sind die (imaginären) Curven von der Länge Null, die *Minimalcurven.* Wir können daher sagen:

Satz 4: *Eine Punkttransformation:*

$$X_1 = \mathfrak{X}(X, Y, Z), \quad Y_1 = \mathfrak{Y}(X, Y, Z), \quad Z_1 = \mathfrak{Z}(X, Y, Z)$$

ist dann und nur dann conform, wenn sie die Monge'sche Gleichung

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = 0$$

invariant lässt oder, was dasselbe sagt, wenn sie jede Minimalcurve in eine Minimalcurve überführt.

Die Monge'sche Gleichung (6) hat nach § 1 des 7. Kap. ∞^3 Elementarkegel und definiert ∞^4 Flächenelemente. Sind X, Y, Z die Coordinaten des Punktes eines Flächenelementes und sind die Richtungscosinus der Normalen der Elementebene proportional P, Q und -1, sodass X, Y, Z, P, Q die Coordinaten des Flächenelementes sind, so werden die ∞^4 durch die Monge'sche Gleichung (6) definierten Flächenelemente gegeben durch die Gleichung:

$$1 + P^2 + Q^2 = 0. \tag{8}$$

In der That haben wir ja schon an der angegebenen Stelle die vorliegende Monge'sche Gleichung als Beispiel (S. 255 u. 262) genauer besprochen und dort die Gleichung (8) aufgestellt.

Eine Punkttransformation, die conform ist, also die Monge'sche Gleichung (6) in sich überführt, verwandelt jeden Elementarkegel der Gleichung in einen ebensolchen. Die Flächen, die von den Elementarkegeln berührt werden, sind die Integralflächen der *partiellen Differentialgleichung erster Ordnung*

Zugeh. p. Diffgl. 1. O.

$$1 + \left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial Y}\right)^2 = 0, \tag{8'}$$

und es ist daher selbstverständlich, dass die conformen Punkttransformationen auch diese partielle Differentialgleichung (8′) invariant lassen.

Die Integralflächen der partiellen Differentialgleichung (8′) sind, wie wir wissen (vgl. S. 264), die Developpabeln, deren Erzeugende Minimalgeraden sind. Eine conforme Punkttransformation führt also jede Developpabele, deren Erzeugende Minimalgeraden sind, in eine ebensolche Fläche über.

Die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung (8′) sind die ∞^3 Minimal*geraden*. Aus den Betrachtungen auf S. 264 geht hervor, dass die Charakteristiken die einzigen Curven sind, durch die unendlich viele Integralflächen gehen; denn wählt man irgend eine Curve im Raume, so sind die hindurchgehenden Integralflächen die Developpabeln, die dem Kugelkreis umschrieben sind und die zugleich die Curve enthalten. Solcher Developpabeln giebt es aber nur dann unendlich viele, wenn die Curve selbst eine Minimalgerade ist. Da nun eine conforme Punkttransformation jede Integralfläche von (8′) wieder in eine Integralfläche überführt, so muss sie jede Curve, durch die unendlich viele Integralflächen gehen, wieder in eine solche Curve verwandeln. Also geht jede Minimal*gerade* in eine Minimal*gerade* über.

Wenn umgekehrt eine vorgelegte Punkttransformation des Raumes (X, Y, Z) jede Minimalgerade in eine Minimalgerade verwandelt, so führt sie jeden Kegel, der von Minimalgeraden gebildet wird, in einen ebensolchen über. Diese Kegel sind aber in ihren Spitzen identisch mit den Elementarkegeln der Monge'schen Gleichung (6). Also lässt die Transformation die Monge'sche Gleichung (6) invariant und ist daher conform. Hiermit hat sich ergeben:

Satz 5: *Eine Punkttransformation des Raumes ist dann und nur dann conform, wenn sie jede Minimalgerade in eine Minimalgerade überführt.* **Trf. d. Minimalgeraden in ebensolche.**

Die einzigen Flächen, die zwei Scharen von Minimalgeraden enthalten, von denen sie doppelt überdeckt werden, sind die *Kugeln*. **Trf. der Kugeln.** Mithin folgt, *dass eine conforme Punkttransformation jede Kugel in eine Kugel überführt**). Insbesondere wollen wir unter einer *Nullkugel* eine Kugel verstehen, auf der beide Scharen von Minimalgeraden zusammenfallen, d. h. einen Kegel, dessen Erzeugende Minimalgeraden sind, der also den Kugelkreis enthält. Diese Kegel sind in ihren Spitzen identisch mit den vorhin besprochenen Elementarkegeln der Monge'schen Gleichung (6), und wir wissen also, *dass eine conforme Transformation jede Nullkugel in eine Nullkugel überführt.* Analytisch **Trf. der Nullkugeln.** wird eine Nullkugel durch eine Gleichung von der Form

$$(X-a)^2 + (Y-b)^2 + (Z-c)^2 = 0$$

dargestellt.

Umgekehrt, wenn eine vorgelegte Punkttransformation des Raumes jede Nullkugel in eine Nullkugel verwandelt, so ist sie nach dem

*) Hierin unterscheiden sie sich wesentlich von den conformen Punkttransformationen der Ebene. Vgl. die entsprechende Bemerkung auf S. 419.

Vorhergehenden conform. Man kann dies auch so einsehen: Wenn zwei Nullkugeln einander längs einer Curve berühren, so ist die Curve eine Minimalgerade. Da nun die Punkttransformation einander berührende Nullkugeln in ebensolche überführt, so verwandelt sie jede Minimalgerade in eine Minimalgerade und ist deshalb nach Satz 5 conform. Wir haben also gefunden:

Satz 6: *Eine Punkttransformation des Raumes ist dann und nur dann conform, wenn sie jede Nullkugel in eine Nullkugel überführt. Alsdann führt sie auch jede Kugel in eine Kugel und jede Minimalgerade in eine Minimalgerade über.*

Liegen zwei conforme Punkttransformationen C_1 und C_2 im Raume vor, so ist ihre Aufeinanderfolge $C_1 C_2$ einer einzigen Punkttransformation äquivalent, die augenscheinlich ebenfalls conform ist. Die Gesamtheit aller conformen Punkttransformationen hat also die Eigenschaft, dass die Aufeinanderfolge zweier stets wieder einer dieser Transformationen äquivalent ist, d. h. die Gruppeneigenschaft. Daher:

Satz 7: *Alle conformen Punkttransformationen des Raumes bilden eine Gruppe*).*

Um nun alle conformen Punkttransformationen des Raumes zu bestimmen, können wir einen Weg einschlagen, der ganz analog dem ist, der uns in der Ebene zu allen den conformen Transformationen führte, die jeden Kreis in einen Kreis verwandeln. Es liegt dies einerseits darin, dass die conformen Transformationen im Raume an sich jede Kugel in eine Kugel überführen, und andererseits darin, dass uns auch im Raume von vornherein solche Transformationen bekannt sind. Es sei hierbei darauf hingewiesen, dass es unter diesen Transformationen solche giebt, bei denen jede unendlich kleine Figur in eine von entgegengesetztem Sinn ähnliche übergeht, bei denen also drei zu einander senkrechte Bogenelemente, die von einem Punkt ausgehen, in solche drei zu einander senkrechte Bogenelemente verwandelt werden, dass das von den ersteren bestimmte Axenkreuz mit dem von den letzteren bestimmten nicht consentiert. Dieser Fall ist aus dem anderen Fall, wo beide Axenkreuze consentieren, dadurch ableitbar, dass man nach

*) Dass ein analoger Satz in der Ebene gilt, ist klar. In der Ebene ist aber die Gruppe nach unserer Terminologie *unendlich*, während sie im Raume *endlich* ist, da die Gesamtheit aller conformen Transformationen des Raumes nur von einer endlichen Anzahl von Parametern abhängt, wie wir sehen werden. Wir fügen hinzu, dass die Gruppe sowohl in der Ebene als auch im Raume eine gemischte ist, indem sie in zwei getrennte continuierliche Scharen von Transformationen zerfällt.

der betreffenden Transformation noch eine Spiegelung des ganzen Raumes an einer Ebene vornimmt.

Bekannt sind unter den conformen Transformationen des Raumes zunächst die Translationen und Rotationen, also die Bewegungen des Raumes und — diese umfassend — allgemein die Ähnlichkeitstransformationen. Eine allgemeine *Ähnlichkeitstransformation* des Raumes besteht, wie wir als bekannt voraussetzen dürfen, aus einer Vergrösserung aller von einem Punkt ausgehenden Radienvectoren nach einem constanten Verhältnis und aus einer darauf auszuführenden Rotation um eine durch jenen Punkt gehende Axe. Hierzu kann noch eine Spiegelung an einer Ebene treten. Schliesslich gehören noch die *Transformationen durch reciproke Radien* hierher. Diese sind wie in der Ebene definiert: Es ist ein Punkt O, der Pol der Transformation, bestimmt zu wählen. Dann wird der beliebige Punkt p in den Punkt p_1 übergeführt, der auf dem Strahle Op liegt und zwar so, dass das Product $Op \cdot Op_1$ einen gegebenen constanten Wert hat. Es ist bekannt, dass diese Transformationen durch reciproke Radien jede Kugel in eine Kugel überführen und daher nach dem Früheren conform sind. Insbesondere führen sie jede Ebene in eine Kugel durch den Pol und auch jede Kugel durch den Pol in eine Ebene über*).

Bekannte conf. Trfn.

Trf. durch rec. Radien.

Es sei nun C eine conforme Punkttransformation des Raumes. Wir wählen einen beliebigen Punkt p aus. Er wird durch C in einen neuen Punkt p_1 übergeführt werden:

Bestimmg. aller conf. Trfn.

$$(p)\,C = (p_1).$$

Es giebt eine Translation T, die ebenfalls p nach p_1 führt, sodass die inverse Translation T^{-1} wieder p_1 nach p bringt:

$$(p_1)\,T^{-1} = (p).$$

Es ist daher — wie oben, S. 415, in der Ebene —:

$$(p)\,CT^{-1} = (p).$$

Der Punkt p bleibt also bei der Aufeinanderfolge CT^{-1} fest. Nun

*) Zur Ergänzung der Anmerkung zu S. 6 fügen wir, z. T. nach Chasles' *Rapport*, noch hinzu, dass Bellavitis (Annali delle scienze del regno Lombardo-Veneto, 6. Bd., 1836, S. 126) der erste zu sein scheint, der die Beziehung durch reciproke Radien wirklich als eine *Transformation der Ebene* aufgefasst hat. Er bemerkte auch, dass sie sich auf den *Raum* ausdehnen lasse. Stubbs zeigte 1843, dass die Transformation durch reciproke Radien im Raume die Krümmungslinien einer Fläche in ebensolche auf der neuen Fläche überführt (Philosophical Magazine, 23. Bd., 1843, S. 338). W. Thomson (Lord Kelvin) erkannte die grosse Bedeutung dieser Transformation für die Potentialtheorie (Journ. d. Mathém. pures et appl. 12. Bd., 1847, S. 256).

sei R eine Transformation durch reciproke Radien, die den Punkt p zum Pole hat. Betrachten wir dann die Transformation, die der Aufeinanderfolge

$$RCT^{-1}R$$

oder:

$$R(CT^{-1})R$$

äquivalent ist. Da R, C, T^{-1} sämtlich conform sind, so ist auch diese Transformation conform. Eine Ebene geht vermöge R in eine Kugel durch p über, diese Kugel vermöge CT^{-1} in eine neue Kugel durch p, da p bei CT^{-1} invariant ist, und endlich die letztere Kugel vermöge R in eine Ebene. Die betrachtete conforme Transformation verwandelt also jede Ebene schliesslich wieder in eine Ebene und ist daher eine Ähnlichkeitstransformation A:

$$RCT^{-1}R = A.$$

Hieraus folgt wie oben (S. 416):

$$C = RART$$

und somit analog dem Satz 1 der

Satz 8: *Jede conforme Punkttransformation des Raumes lässt sich als eine Aufeinanderfolge von Ähnlichkeitstransformationen und Transformationen durch reciproke Radien darstellen.*

Auch diesem Satz können wir eine speciellere Form gehen: Es gehe nämlich p bei A in p', ferner p' bei R in p'', endlich p'' bei T in O über:

$$(p)A = (p'), \quad (p')R = (p''), \quad (p'')T = (O).$$

Jede Ebene geht bei R in eine Kugel durch p über, diese Kugel hiernach bei A in eine Kugel durch p', letztere bei R in eine Kugel durch p'' und endlich diese Kugel bei T in eine Kugel durch O über. Also führt $RART$ oder C alle Ebenen in Kugeln durch einen gemeinsamen Punkt O über. Ist nun wieder — wie oben, S. 417, in der Ebene — R_1 die Transformation durch reciproke Radien, deren Pol O ist und bei der das constante Product der Radienvectoren von O nach den ursprünglichen und den transformierten Punkten etwa den Wert Eins hat, sodass also R_1, wie wir uns wieder kürzer ausdrücken, die Grundkugel vom Radius Eins hat, so wird CR_1 alle Ebenen in Ebenen verwandeln, d. h. eine Ähnlichkeitstransformation A_1 sein, sodass wir auch hier erhalten:

$$CR_1 = A_1,$$

woraus sofort folgt:

$$C = A_1 R_1.$$

Es gilt daher analog dem Satze 2 der

Satz 9: *Jede conforme Punkttransformation des Raumes ist der Aufeinanderfolge einer Ähnlichkeitstransformation und einer Transformation durch reciproke Radien, deren Grundkreis den Radius Eins hat, äquivalent.* Besondere Darst. d. conf. Trfn.

Wie oben im Falle der Ebene, S. 417, lässt sich auch hier beweisen, dass zwei conforme Transformationen $C = A_1 R_1$ und $C' = A_1' R_1'$ nur dann zusammenfallen, wenn einzeln A_1 mit A_1' und R_1 mit R_1' identisch ist. Der Unterschied im Beweis besteht nur darin, dass jetzt Ebene und Kugel anstelle von Gerade und Kreis zu sagen ist. Hiernach können wir auch sofort die Zahl der wesentlichen Parameter bestimmen, von denen eine allgemeine conforme Transformation im Raume abhängt. Eine gleichsinnige Ähnlichkeitstransformation A_1 ist bekannt, sobald man kennt: erstens die Coordinaten des Punktes, von dem aus alle Radienvectoren vergrössert werden, zweitens das constante Vergrösserungsverhältnis, drittens die beiden Bestimmungsstücke der durch jenen Punkt gehenden Drehaxe und viertens die Amplitude der Rotation. Sie hängt also von gerade *sieben* wesentlichen Parametern ab. Offenbar auch jede ungleichsinnige. Ferner ist die Transformation R_1 bekannt, sobald ihr Pol O gegeben ist, d. h. sie hängt von *drei* wesentlichen Parametern ab. Analog dem Satz 3 kommt also hier der

Satz 10: *Es giebt im Raume gerade ∞^{10} conforme Punkttransformationen. Sie sind sämtlich ein-eindeutig.* Anzahl d. conf. Trfn.

Die conformen Punkttransformationen des Raumes wurden zuerst (1847) von Liouville*) vollständig bestimmt, und zwar auf analytischem Wege. Von ihm rührt daher auch das folgende Theorem her, in dem wir einige der vorhergehenden Sätze zusammenfassen wollen:

Theorem 16: *Jede conforme Punkttransformation des Raumes lässt sich darstellen als eine Aufeinanderfolge von Ähnlichkeitstransformationen und Transformationen durch reciproke Radien und ist ein-eindeutig. Insgesamt giebt es gerade ∞^{10} derartige Transformationen.* Theorem.

Dieser Satz war seinerzeit aus dem schon oben (S. 419) angeführten Grunde überraschend, nämlich deshalb, weil bei einer con-

---

*) Liouville, *Note au sujet de l'article précédent.* Journal de Math. pures et appl. 12. Bd., 1847, S. 265. Diese Note bezieht sich auf die vorhergehende Arbeit von W. Thomson, die in der Fussnote auf S. 423 genannt wurde.

formen Transformation des Raumes *stets* jede Kugel in eine Kugel übergeht, eine Thatsache, die in der Ebene kein Analogon hat*).

Anscheinend sind unter den conformen Transformationen C, die wir auf S. 424 in der Form $A_1 R_1$ bestimmten, die Bewegungen und überhaupt die ∞^7 Ähnlichkeitstransformationen nicht enthalten. Dies ist natürlich absurd und klärt sich dadurch auf, dass der Punkt O, der in der damaligen Betrachtung auftrat, unendlich fern liegen kann, sodass R_1 in eine Spiegelung an einer Ebene ausartet.

Wir wollen hier einschalten, wie man die soeben gelöste Aufgabe, alle conformen Punkttransformationen des Raumes zu finden, auf die Aufgabe zurückführen kann, alle diejenigen Transformationen in der Ebene zu finden, bei denen jeder Kreis in einen Kreis übergeht: Ist C eine conforme Punkttransformation im Raume und ist E eine beliebig gewählte Ebene, so wird sie durch C in eine Kugel K übergeführt werden:

$$(E)\,C = (K),$$

nach Satz 6. Nun giebt es eine Transformation durch reciproke Radien R, die K gerade wieder in E überführt, sodass

$$(E)\,CR = (K)\,R = (E)$$

ist und also die Ebene E bei der Aufeinanderfolge CR, die wieder einer conformen Transformation C' äquivalent ist, invariant bleibt. Ist C' bekannt, so ist auch C bekannt, da $CR = C'$ und daher $C = C'R$ ist.

Es handelt sich also nur noch um die Bestimmung aller der conformen Punktransformationen C' im Raume, bei denen die Ebene E fest bleibt. Da C' jede Kugel in eine Kugel überführt, so wird sie jeden Kreis in der festen Ebene E in einen Kreis verwandeln. Die Punkte der invarianten Ebene E werden also durch C' so transformiert werden', dass jeder Kreis in einen Kreis übergeht. Alle derartigen Punkttransformationen der Ebene haben wir aber oben bestimmt. Wir behaupten: Wählen wir in der Ebene E eine beliebige Punkttransformation C_0 aus, die jeden Kreis in einen Kreis überführt, so giebt es im Raume stets eine conforme Transformation C', die E fest lässt und die Punkte der Ebene E genau so transformiert, wie es C_0 thut. In der That, jeder Punkt p des Raumes ist die Spitze eines Kegels von Minimalgeraden. Dieser Kegel schneidet als Nullkugel die Ebene E in einem Kreis k. (Siehe Fig. 75**), Seite 427.) Geht k bei C_0 in einen Kreis k_1 der Ebene E über und construieren wir rückwärts die Spitze p_1 des Kegels von Minimalgeraden, der k_1 enthält, so haben wir jedem Punkt p des Raumes vermöge C_0 einen Punkt p_1 zugeordnet, also eine Transformation im Raume hergestellt. Dies ist die fragliche conforme Transformation C'. Dass sie conform ist, sieht man so ein: Sind auf einer Minimalgeraden zwei Punkte

*) Durch Betrachtungen, die zu den hier angestellten ganz analog sind, kann man das analoge Theorem für einen Raum von beliebig vielen Dimensionen aufstellen. So bestimmte Lie (Götting. Nachr., Mai 1871, Math. Ann. 5. Bd.) alle conformen Transformationen des Raumes von n Dimensionen.

**) In bezug auf diese und die übrigen Figuren dieses Kapitels ist zu bemerken, dass die zugehörigen begrifflichen Überlegungen eigentlich deshalb keine Illustration gestatten, weil mit imaginären Gebilden operiert wird. Um aber doch die Verständlichkeit durch die Anschauung zu heben, haben wir uns nicht gescheut, in den Figuren die imaginären Gebilde reell darzustellen. Die Figuren haben also nur eine schematische Bedeutung.

gegeben (wie in Fig. 76) und construiert man nach obigem ihre Nullkugeln sowie deren Schnittkreise mit der Ebene E, so findet man, dass die Nullkugeln einander längs der Minimalgeraden berühren (vgl. S. 422), also die Schnittkreise auch einander berühren. Da aber in der Ebene E einander berührende Kreise vermöge C_0 wieder in einander berührende Kreise übergehen, so folgt also, dass bei der erhaltenen Transformation im Raume zwei Punkte einer Minimalgeraden stets wieder in zwei Punkte einer Minimalgeraden verwandelt werden, also jede

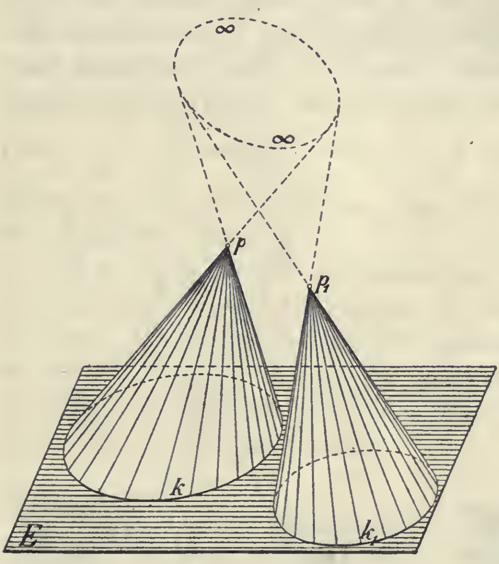

Fig. 75.

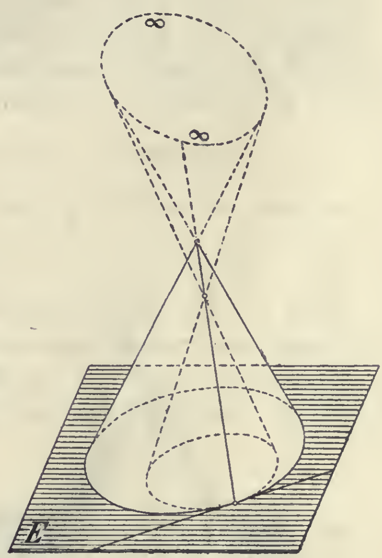

Fig. 76.

Minimalgerade in eine Minimalgerade übergeht und die Transformation also wirklich conform ist, nach Satz 5.

Diese Betrachtung ist noch nicht völlig erschöpfend, weil factisch jeder Kreis k der Ebene E *zwei* Nullkugeln angehört. Allerdings lässt sich diese Zweideutigkeit durch weitere Überlegungen beseitigen. Wir gehen hierauf aber nicht weiter ein und bemerken nur noch, dass die vorhergehenden Überlegungen vermöge des folgenden Textes in diesem Paragraphen in einem neuen Lichte erscheinen.

Wie wir sahen, sind die conformen Transformationen des Raumes die allgemeinsten Punkttransformationen, die jede Minimalcurve in eine Minimalcurve überführen (vgl. Satz 4). Wir werden im nächsten Paragraphen erkennen, dass sich die Theorie der Minimalcurven im Raume sowie die Theorie der conformen Punkttransformationen im Raume in eigentümlicher Weise auf die *Ebene* übertragen lässt und als Ausgangspunkt einer beachtenswerten Theorie in der ebenen Geometrie dienen kann. Zur Vorbereitung dieser Entwickelungen geben wir hier einige Betrachtungen, die, soweit uns bekannt, von Chasles, Möbius und insbesondere von Cayley, Darboux und Laguerre herrühren:

Abb. d. Pkte. d. Raumes als Kreise d. Ebene.

Zwischen den Punkten des Raumes mit den rechtwinkligen Punktcoordinaten X, Y, Z und den Kreisen in einer Ebene mit den rechtwinkligen Punktcoordinaten x, y stellen wir eine Beziehung dadurch fest, dass wir setzen:

$$x = X, \quad y = Y, \quad r = iZ. \tag{9}$$

Hierdurch wird jedem Punkt p oder (X, Y, Z) des Raumes in der Ebene derjenige Kreis zugeordnet, dessen Mittelpunkt die Coordinaten $x = X$, $y = Y$ hat, während sein Radius $r = iZ$ ist. Diese Beziehung lässt sich geometrisch so zustande bringen (siehe Fig. 77): Der Punkt

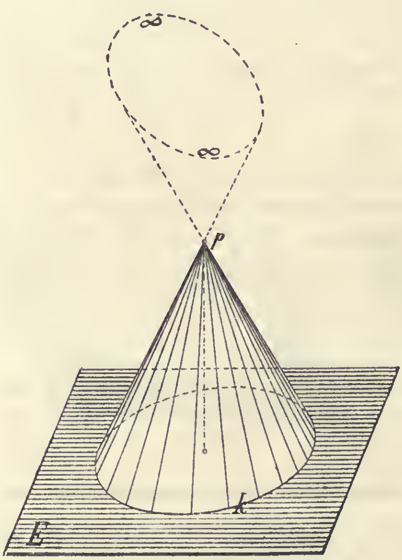

Fig. 77.

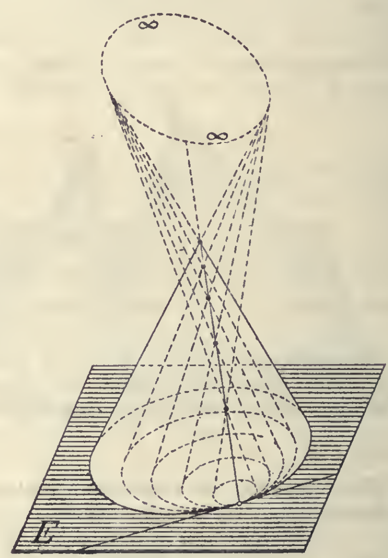

Fig. 78.

(X, Y, Z) ist die Spitze eines Kegels von Minimalgeraden, d. h. einer Nullkugel, die in den laufenden Coordinaten x, y, z die Gleichung hat:

$$(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2 = 0.$$

Schneiden wir diese Nullkugel mit der Ebene $z = 0$, so ergiebt sich der Kreis

$$(x - X)^2 + (y - Y)^2 + Z^2 = 0$$

in den laufenden Coordinaten x, y. Der Mittelpunkt dieses Kreises hat die Coordinaten $x = X$, $y = Y$, während sein Radius $r = iZ$ ist. Hiermit kommen wir zu den Gleichungen (9) zurück. Wir drücken uns so aus, dass wir sagen: *Jeder Punkt des Raumes wird als ein Kreis in der Ebene $Z = 0$ abgebildet.* Es werde beachtet, dass der Mittelpunkt des Bildkreises die Orthogonalprojection des Raumpunktes auf die Bildebene $Z = 0$ ist.

Jedem Punkte (X, Y, Z) des Raumes ist hiermit ein Kreis in der Ebene zugeordnet. Umgekehrt entspricht jedem Kreis in der Ebene, dessen Mittelpunkt die Coordinaten x, y hat, während r sein Radius ist, zunächst einer der beiden Punkte $X = x$, $Y = y$, $Z = \pm ir$ im Raume. Liegen zwei Punkte (X_1, Y_1, Z_1) und (X_2, Y_2, Z_2) des Raumes auf einer Minimalgeraden m, so berühren sich ihre Nullkugeln längs m. Ihnen entsprechen also zwei Kreise in der Ebene, die einander in dem Schnittpunkte von m mit der Ebene *berühren* (siehe Fig. 76 auf S. 427). Analytisch drückt sich der Umstand, dass die beiden Punkte auf einer Minimalgeraden liegen, in der Formel aus:

$$(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2 = 0. \tag{10}$$

Wenn also die beiden Punkte diese Bedingung erfüllen, so berühren ihre Bildkreise einander.

Allen Punkten einer Minimalgeraden entsprechen alle ∞^1 *Kreise*, die einander in dem Schnittpunkte der Minimalgeraden mit der Ebene berühren, d. h. *die* daselbst *ein Linienelement gemein haben* (siehe Fig. 78, Seite 428). Insbesondere hat der Schnittpunkt der Minimalgeraden mit der Ebene als Bildkreis einen zum Punkt degenerierten Kreis, nämlich den Punkt des Linienelementes.

Um die Abbildung weiterhin zu untersuchen, erinnern wir an die Definition der Orthogonalität mit Hülfe des Kugelkreises: Liegt eine Ebene E vor, so schneidet sie die unendlich ferne Ebene in einer Geraden. Der Pol dieser Geraden hinsichtlich des Kugelkreises ist alsdann der unendlich ferne Punkt aller ∞^2 Normalen zur Ebene E. Ist die Ebene E von allgemeiner Lage, so liegt keine dieser Normalen in der Ebene selbst. Sobald aber die Ebene E den Kugelkreis berührt, in welchem Falle wir sie eine *Minimalebene* nennen, rückt der erwähnte Pol in die Ebene hinein und die ∞^2 Normalen werden zu Minimalgeraden, von denen ∞^1 in der Ebene selbst gelegen sind.

Diese Betrachtung werden wir sogleich verwerten. Wir wollen eine beliebige Minimalcurve M im Raume ins Auge fassen (siehe Fig. 79, Seite 430). Ihre Tangenten T sind Minimalgeraden und bilden, wie wir sagen wollen, eine *Minimaldeveloppabele*. Es sei c die Schnittcurve dieser Minimaldeveloppabeln mit der Bildebene $Z = 0$. Wir projicieren nun den ganzen Raum orthogonal auf die Bildebene $Z = 0$. **Projection einer Minimalcurve.**

Es sei P ein Punkt der Minimalcurve M, ferner T seine Tangente, p der Schnittpunkt von T mit der Bildebene und t die Tangente von c in p. Alsdann ist die Ebene (Tt) eine Minimalebene, da sie zwei unendlich benachbarte Minimalgeraden enthält, die sich in P schneiden, da sie also den Kugelkreis berührt, etwa in N. Jede Gerade durch N ist, wie wir sahen, eine Normale zur Ebene (Tt), insbesondere auch die Gerade T durch N. Die Gerade T steht daher senkrecht auf jeder Geraden in der Ebene (Tt), also auch auf der Geraden t. Bei der Orthogonalprojection wird aber jede Gerade, die t senkrecht schneidet, in eine Gerade projiciert, die t ebenfalls senkrecht schneidet. Mithin ist die Projection der Geraden T die Normale n der Curve c im Punkte p.

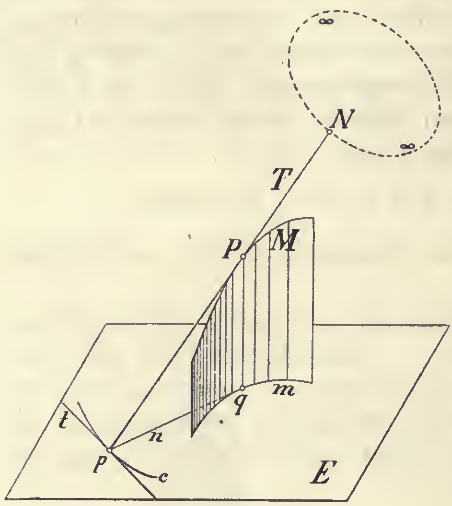

Fig. 79.

Die Tangenten T der Minimalcurve C projicieren sich also als die Normalen n der Schnittcurve c der Minimaldeveloppabeln mit der Bildebene $Z = 0$.

Bei der Orthogonalprojection wird aber jeder Punkt des Raumes in den Mittelpunkt seines Bildkreises übergeführt. Die Bildkreise der Punkte unserer Geraden T haben mithin die Punkte der Normalen n von c zu Mittelpunkten. Andererseits gehen sie durch den Punkt p.

Suchen wir nun die *Bildkreise aller ∞^2 Punkte der Minimaldeveloppabeln*, so finden wir also, dass es *die ∞^2 Kreise* sind, *welche die Schnittcurve c der Minimaldeveloppabeln mit der Bildebene berühren.*

Es sei ferner die Curve m die orthogonale Projection der Minimalcurve M. Da T Tangente von M ist, so ist die Projection n von T Tangente von m. Da n andererseits Normale von c ist, so gilt der

Satz 11: *Die orthogonale Projection einer Minimalcurve M auf eine Ebene ist die Evolute der Schnittcurve der Developpabeln von M mit der Ebene.*

Umgekehrt: Wenn eine beliebige Curve c in der Bildebene vorliegt, so können wir immer eine Developpabele construieren, die diese Curve c und den Kugelkreis enthält, deren Geraden also Minimalgeraden sind. Die Rückkehrcurve der Developpabeln ist somit eine Minimalcurve M, und nach dem Vorhergehenden ist die Evolute von c die orthogonale Projection von M auf die Ebene.

Die Punkte P der Minimalcurve M haben als Bildkreise die Kreise der Ebene, deren Mittelpunkte q auf der Projection m von M liegen, während sie die Curve c berühren. *Die Bildkreise der Punkte* *der Minimalcurve M sind daher die Krümmungskreise der Curve c, in der die Minimaldeveloppabele die Bildebene schneidet.*

Schneiden wir die Minimaldeveloppabele durch alle Ebenen parallel der Bildebene, so erhalten wir ∞^1 Schnittcurven $c', c'' \ldots$. Ferner sind die orthogonalen Projectionen der Minimalcurve M auf die ∞^1 Ebenen lauter Curven $m', m'', \ldots$, die mit m congruent sind und senkrecht über m liegen. m' ist Evolute von c', m'' Evolute von c'' u. s. w. Projicieren wir alles senkrecht auf die Bildebene, so werden $m', m'' \ldots$ sämtlich nach m projiciert, während $c', c'' \ldots$ Curven $\gamma', \gamma'' \ldots$ liefern, die den entsprechenden Curven $c', c'' \ldots$ congruent sind. Es wird also m gemeinsame Evolute von $c, \gamma', \gamma'' \ldots$ sein. Die Curven $c, \gamma', \gamma'' \ldots$ sind somit *Parallelcurven.* Parallelcurven.

Satz 12: *Die Schnittcurven einer Minimaldeveloppabeln mit einer Schar paralleler Ebenen projicieren sich senkrecht auf eine dieser Ebenen als Parallelcurven, deren gemeinsame Evolute die Projection der Rückkehrcurve ist.*

Ist die Curve c eine gegebene *algebraische* Curve, so ist die Minimaldeveloppabele, welche sie enthält, ebenfalls algebraisch. Sobald diese Fläche eine irreducibele Fläche ist, sind ihre Schnittcurven mit jenen Parallelebenen irreducibele Curven, während sie sonst zerfallen. Es ergiebt sich also, dass eine Parallelcurve zu einer algebraischen Curve c dann und nur dann zerfällt, wenn die durch die Curve c gelegte Minimaldeveloppabele zerfällt. (Vgl. die Fussnote zu S. 14.)

Schliesslich noch einige Worte über die *analytische Darstellung der Minimalcurven.* Anal. Darstellg.

Die Ebene

$$UX + VY + WZ + T = 0 \tag{11}$$

ist eine Minimalebene, wenn sie in jedem ihrer Punkte (X, Y, Z) den zugehörigen Elementarkegel

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = 0$$

berührt, d. h. wenn die letztere Gleichung mit der Gleichung

$$UdX + VdY + WdZ = 0$$

zwei zusammenfallende Lösungensysteme $dX : dY : dZ$ hat. Dies tritt aber dann und nur dann ein, wenn

$$U^2 + V^2 + W^2 = 0 \tag{12}$$

ist. Insgesamt giebt es ∞^2 Minimalebenen. Wir können sie durch die Gleichung (11) darstellen, wenn wir darin U, V, W, T so als Functionen zweier Parameter wählen, dass sie die Bedingung (12) für alle Werte der Parameter erfüllen. Da nicht alle Minimalebenen einander parallel sind, so können wir direct T als den einen Parameter benutzen, und brauchen dann nur noch für U, V, W solche Functionen eines zweiten Parameters s zu wählen, welche die Bedingung (12) identisch erfüllen. Solche sind die drei folgenden:

$$U = 1 - s^2, \quad V = i(1 + s^2), \quad W = 2s.$$

Also stellt

$$(1 - s^2) X + i(1 + s^2) Y + 2s Z + T = 0 \tag{13}$$

bei beliebiger Wahl der Parameter s, T eine beliebige Minimalebene dar. Die Grössen s, T können wir daher als die Bestimmungsstücke oder *Coordinaten einer Minimalebene* auffassen.

Coord. einer Minimalebene.

Wollen wir eine Minimaldeveloppabele betrachten, so haben wir ∞^1 Minimalebenen auszuwählen. Dies geschieht dadurch, dass wir T als eine Function von s wählen. Wir setzen:

$$T = F(s)$$

und erhalten die ∞^1 Ebenen:

$$(1 - s^2) X + i(1 + s^2) Y + 2s Z + F(s) = 0. \tag{14}$$

Um die von ihnen eingehüllte Fläche zu bestimmen, haben wir nach dem Parameter s zu differenzieren. Die beiden Gleichungen

$$\tag{15} \begin{cases} (1 - s^2) X + i(1 + s^2) Y + 2s Z + F(s) = 0, \\ 2sX - 2isY - 2Z - F'(s) = 0 \end{cases}$$

stellen also nach Elimination von s die Minimaldeveloppabele in Form einer Gleichung zwischen den Punktcoordinaten X, Y, Z dar. Wenn wir dagegen s bestimmt wählen, so sind sie der analytische Ausdruck für eine Erzeugende der Minimaldeveloppabeln, d. h. für eine Minimalgerade. Die Gleichungen (15) stellen also eine *beliebige* Minimalgerade dar, wenn wir in ihnen für s, F und F' beliebige Constanten setzen, d. h. wenn s, F, F' als von einander unabhängige Parameter gedeutet werden. Wir können dann die drei Parameter s, F, F' als *Coordinaten einer Minimalgeraden* bezeichnen.

Coord. einer Minimalgeraden.

Wünschen wir die Rückkehrcurve der Minimaldeveloppabeln zu bestimmen, so müssen wir die zweite Gleichung (15) noch einmal nach dem Parameter s differenzieren. Die drei Gleichungen

$$\tag{16} \begin{cases} (1 - s^2) X + i(1 + s^2) Y + 2s Z + F(s) = 0, \\ 2sX - 2isY - 2Z - F'(s) = 0, \\ 2X - 2iY - F''(s) = 0 \end{cases}$$

geben also, wenn in ihnen für $F(s)$ eine bestimmte Function von s gesetzt und dann s aus ihnen eliminiert wird, eine beliebige *Minimal-*

curve als Rückkehrcurve einer Minimaldeveloppabeln. Da aber eine Minimal*gerade* niemals die Rückkehrcurve einer Minimaldeveloppabeln sein kann, so sind dabei die Minimalgeraden ausgeschlossen. Wenn wir aus (16) die Coordinaten X, Y, Z berechnen, so erhalten wir *als allgemeine Darstellung einer krummen Minimalcurve* vermittelst einer Hülfsveränderlichen s die folgende*): Anal. Darstellg. e. Minimalcurve.

$$(17)\qquad \begin{cases} X = \frac{1}{4}(1-s^2)F''(s) + \frac{1}{2}sF'(s) - \frac{1}{2}F(s), \\ Y = \frac{i}{4}(1+s^2)F''(s) - \frac{i}{2}sF'(s) + \frac{i}{2}F(s), \\ Z = \qquad\qquad \frac{s}{2}F''(s) - \frac{1}{2}F'(s). \end{cases}$$

Diese Gleichungen geben also die allgemeinste krumme Integralcurve**) der Monge'schen Gleichung:

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = 0.$$

Insbesondere kann sich die Rückkehrcurve der Minimaldeveloppabeln auf einen *Punkt* reducieren. Dies tritt ein, wenn die Developpabele eine Nullkugel ist. In der That ergeben sich aus (17) für X, Y, Z *constante* Werte, wenn für $F(s)$ eine ganze Function zweiten Grades gesetzt wird:

$$F(s) = a + bs + cs^2.$$

Jede andere Function F von s dagegen liefert, in (17) eingesetzt, eine wirkliche krumme Minimalcurve.

§ 2. Zusammenhang zwischen den conformen Punkttransformationen des Raumes und den Berührungstransformationen der Kreise in der Ebene.

Im vorigen Paragraphen bildeten wir jeden Punkt (X, Y, Z) des Raumes als einen Kreis in der Ebene $Z = 0$ ab, nämlich als den Kreis, dessen Mittelpunktscoordinaten x, y und Radius r durch die Formeln

---

*) Da die oben für U, V, W und für T eingeführten Grössen noch in gewissem Masse willkürlich sind, so ist es klar, dass man die Gleichungen einer Minimalcurve noch in mancher anderen Weise schreiben kann. Wir haben hier eine solche Art gewählt, die für die folgenden Rechnungen möglichst bequem ist.

**) *Implicite* und in *analytischer* Einkleidung tritt der Begriff: Minimalcurve sehr früh, schon bei Monge und Legendre, bei Lagrange und Gauss auf. Nach Poncelet's Einführung des Kugelkreises haben französische Geometer (vgl. S. 427 unten) den Begriff: Minimalcurve verwertet. Die von Monge factisch aufgestellten Gleichungen der Minimalcurven wurden von Legendre von Integralzeichen befreit. Die einfachen Gleichungen (17) wurden, nachdem sie von Enneper angedeutet waren, von Weierstrass aufgestellt. Ausser in seinen Untersuchungen über Berührungstransformationen gab Lie wichtige Anwendungen des Begriffes: Minimalcurve noch für die Theorie der Minimalflächen.

(18) $$x = X,\quad y = Y,\quad r = iZ$$

gegeben sind. Dabei sahen wir, dass die Bildkreise zweier Punkte einander dann und nur dann berühren, wenn die beiden Punkte selbst auf einer Minimalgeraden liegen (vgl. Fig. 76, S. 427). Alle Punkte einer Minimalcurve M bilden sich, wie wir ferner sahen, als die ∞^1 Krümmungskreise derjenigen Curve c ab, in der die Developpabele von M die Bildebene schneidet (vgl. Fig. 79, S. 430). Wir werden daher diese *Curve* c als das *Bild der Minimalcurve* M bezeichnen. Ist c bekannt, so sind auch die Krümmungskreise von c bekannt, sodass also auch M bekannt ist. Nur wenn ein Punkt im Raume eine Minimal*gerade* beschreibt, umhüllt sein Bildkreis keine Curve, sondern dann ergeben sich in der Ebene ∞^1 Kreise, die ein Linienelement gemein haben (vgl. Fig. 78, S. 428). Der Punkt dieses Linienelementes ist der Punkt, in dem die Minimalgerade die Bildebene schneidet. Die Gerade des Linienelementes ist die Gerade, die mit der Minimalgeraden eine den Kugelkreis berührende Ebene bestimmt. Wir werden daher dies *Linienelement als das Bild der Minimalgeraden bezeichnen.* Ist das Linienelement gegeben, so kennen wir einen Punkt der Minimalgeraden sowie die Berührungsebene des Kugelkreises, in der sie liegt, d. h. dann ist auch die Minimalgerade (wenn auch zweideutig) bestimmt.

Bild einer Minimalcurve.

Bild einer Minimalgeraden.

Da wir im vorigen Paragraphen die Grössen s, F als Coordinaten einer Berührungsebene des Kugelkreises haben auffassen können, und da diese Ebene die Bildebene in einer Geraden schneidet, so erhellt, dass wir jetzt die Grössen s, F *als Liniencoordinaten in der Ebene* bezeichnen dürfen. Da ferner durch die drei Grössen s, F, F' eine Minimalgerade bestimmt ist, so sind s, F, F' die Coordinaten des *zugehörigen* Linienelementes in der Ebene.

s, F als Liniencoord. i. d. Ebene.

s, F, F' als Coord. d. Linienelem.

Es wird nützlich sein, sich zu fragen, wie sich die Punkte einer *beliebigen* Curve L des Raumes abbilden. Ihre Bilder sind ∞^1 Kreise, und diese Kreise werden eine Curve l umhüllen. Aber sie werden die Curve l im allgemeinen nicht osculieren. Dies tritt vielmehr nur dann ein, wenn je zwei unendlich benachbarte unter den ∞^1 Kreisen einander berühren, d. h. wenn die beiden zugehörigen Punkte des Raumes auf einer Minimalgeraden liegen, oder also, wenn die Tangenten der Curve L Minimalgeraden sind und die Curve L selbst somit eine Minimalcurve ist.

Bild einer bel. Curve.

Betrachten wir ferner eine *Regelfläche, deren Erzeugende Minimalgeraden sind.* Die Bilder der Minimalgeraden sind Linienelemente, sodass also in der Ebene ∞^1 Linienelemente vorliegen. Fragen wir uns, wann sie einen Verein von Linienelementen vorstellen. Dies ist nur dann der Fall, wenn auf der Geraden eines Linienelementes der

Bild von ∞^1 Minimalgeraden.

Punkt des unendlich benachbarten Elementes liegt. Es seien G, G' zwei unendlich benachbarte Erzeugende der Regelfläche. Das Linienelement, welches das Bild von G ist, hat zum Punkte den Schnittpunkt der Geraden G mit der Bildebene, während seine Gerade in der Ebene liegt, die G enthält und den Kugelkreis berührt. Diese Ebene enthält den unendlich fernen Punkt der unendlich benachbarten Minimalgeraden G'. Das zu G' gehörige Linienelement liegt nun mit dem zu G gehörigen vereint, wenn sein Punkt, also der Schnittpunkt von G' mit der Bildebene, in der soeben besprochenen Minimalebene liegt. Dann aber liegen G und G' in *einer* gemeinsamen Ebene. Also folgt, dass die Linienelemente, als die sich die ∞^1 Minimalgeraden abbilden, dann und nur dann einen Elementverein darstellen, wenn die ∞^1 Minimalgeraden eine *abwickelbare Fläche*, also eine Minimaldeveloppabele erzeugen. In diesem Falle ist der Elementverein die oben besprochene Curve c.

Bild einer abwickelb. Fl. v. Minimalgeraden.

Aus diesen Überlegungen folgt auch: *Zwei unendlich benachbarte Minimalgeraden schneiden einander dann und nur dann, wenn die Linienelemente, die ihre Bilder sind, vereinigte Lage haben.*

Um dies auch analytisch zu beweisen, betrachten wir im Raume zwei unendlich benachbarte Minimalgeraden, deren Coordinaten s, F, F' bez. $s + ds$, $F + dF$, $F' + dF'$ seien. Die erstere Gerade hat in den Punktcoordinaten X, Y, Z nach S. 432 die Gleichungen:

$$(19)\qquad \begin{cases} (1-s^2)X + i(1+s^2)Y + 2sZ + F = 0, \\ 2sX - 2isY - 2Z - F' = 0. \end{cases}$$

Die Gleichungen der zweiten Minimalgeraden gehen hieraus hervor, wenn wir s, F, F' durch $s + ds$, $F + dF$, $F' + dF'$ ersetzen. Damit also die beiden Geraden einen Punkt (X, Y, Z) gemein haben, ist notwendig und hinreichend, dass es ein Wertsystem X, Y, Z gebe, das sowohl die beiden Gleichungen (19) als auch die durch Differentiation aus ihnen hervorgehenden Gleichungen:

$$2(-sX + isY + Z)\,ds + dF = 0,$$
$$2(X - iY)\,ds - dF' = 0$$

erfüllt. Alle vier Gleichungen sind linear und homogen in $X, Y, Z, 1$. Die Bedingung des Schneidens ist demnach die, dass die Determinante der vier Gleichungen hinsichtlich $X, Y, Z, 1$ verschwindet. Dies liefert:

$$\begin{vmatrix} 1-s^2 & i(1+s^2) & 2s & F \\ 2s & -2is & -2 & -F' \\ -2sds & 2isds & 2ds & dF \\ 2ds & -2ids & 0 & -dF' \end{vmatrix} = 0.$$

Multiplicieren wir die zweite Horizontalreihe mit ds und addieren zu ihr die dritte, multiplicieren wir ferner die vierte mit s und addieren sie zur dritten, so vereinfacht sich die Gleichung bedeutend und ergiebt die Bedingung:

$$(dF - F'ds)\, ds = 0.$$

Da nun für die unendlich benachbarte Minimalgerade $(s + ds,\ F + dF,\ F' + dF')$ im Allgemeinen ds nicht Null ist, weil sie sonst die erste Minimalgerade $(s,\ F,\ F')$ auf dem Kugelkreis schnitte, so bleibt als allgemeine *Bedingung des Schneidens* diese:

Schneiden unendl. benachb. Minimalg.

$$(20) \qquad dF - F'ds = 0.$$

Andererseits sahen wir oben, dass zwei unendlich benachbarte Minimalgerade, die einander schneiden, zu Bildern zwei solche Linienelemente $(s,\ F,\ F')$ und $(s + ds,\ F + dF,\ F' + dF')$ in der Ebene haben, die vereinigt liegen. Offenbar ist auch die Gleichung (20) die *Bedingung der vereinigten Lage der beiden Linienelemente* in der Ebene. Sie entspricht vollkommen der Bedingung $dy - y'dx = 0$ für den Fall, dass $x,\ y$ *Punkt*coordinaten sind (vgl. S. 39, § 1 des 2. Kap.).

Stellen wir die bei der Abbildung einander entsprechenden Gebilde in einer Tabelle zusammen, so finden wir:

Zusammenstellg.

Ebene (x, y) oder $Z = 0$.	Raum (X, Y, Z).
1) Kreis.	1) Punkt.
2) Linienelement.	2) Minimalgerade.
3) Curve als Umhüllende ihrer Krümmungskreise.	3) Minimalcurve als Ort ihrer Punkte.
4) Curve als Umhüllende von beliebigen ∞^1 Kreisen.	4) Curve.
5) Vereinigte Linienelemente.	5) Einander schneidende, unendlich benachbarte Minimalgeraden.
6) Kreis und seine ∞^1 Linienelemente.	6) Punkt und die ∞^1 Minimalgeraden durch ihn.

Conf. Trf. im Raume.

Unterwerfen wir nun den Raum (X, Y, Z) einer *conformen Punkttransformation.* Wie wir in § 1 sahen, geht bei ihr jede Minimalgerade in eine Minimalgerade über. Alle Minimalgeraden durch einen Punkt werden in alle Minimalgeraden durch einen neuen Punkt verwandelt.

In der Abbildung auf die Ebene entspricht also der conformen Punkttransformation eine Operation, die folgende Eigenschaften hat: *Jeder Kreis wird in einen Kreis verwandelt,* jedes Linienelement geht in ein neues Linienelement über, und alle Linienelemente eines Kreises gehen in die Linienelemente des neuen Kreises über. Fassen wir einen Elementverein c in der Ebene ins Auge. Er ist, wie wir wissen, das Bild einer Minimalcurve M, indem die ∞^1 Krümmungskreise von c die Bilder der Punkte von M und die ∞^1 Linienelemente des Vereins die Bilder der Tangenten von M sind. Da bei der conformen Transformation im Raume jede Minimalcurve in eine Minimalcurve übergeht, so wird also bei der entsprechenden Operation in der Bildebene *jeder Elementverein in einen Elementverein übergeführt.* Die Operation ist also eine *Berührungstransformation in der Ebene, und zwar geht bei ihr jeder Kreis in einen Kreis über.* Berührtrf. i. d. Ebene.

Betrachten wir umgekehrt in der Bildebene irgend eine solche Berührungstransformation, die jeden Kreis in einen Kreis verwandelt. Da jedes Linienelement bei ihr in ein neues Linienelement übergeht, so entspricht ihr im Raume (X, Y, Z) eine solche Operation, bei der jede Minimalgerade in eine Minimalgerade transformiert wird. Da ferner jeder Kreis in der Ebene das Bild eines Punktes im Raume ist, so wird jeder Punkt im Raume durch die Operation in einen neuen Punkt übergeführt. Da endlich ein Kreis der Ebene und seine Linienelemente die Bilder eines Punktes des Raumes und der Minimalgeraden durch ihn sind, so sehen wir schliesslich: Die Operation im Raume hat die Eigenschaft, die Punkte in neue Punkte und die Minimalgeraden in neue Minimalgeraden zu verwandeln derart, dass ein Punkt und eine Minimalgerade durch den Punkt stets wieder in einen Punkt und eine Minimalgerade durch den Punkt übergeht. Die räumliche Operation ist also mit anderen Worten eine Punkttransformation, die jede Minimalgerade in eine Minimalgerade überführt, mithin nach Satz 5 des § 1, S. 421, eine *conforme* Punkttransformation.

Hiermit hat sich ergeben*):

Theorem 17: *Bildet man die Punkte des Raumes* (X, Y, Z) *als die Kreise in der* (xy)*-Ebene ab, deren Mittelpunktscoordinaten* x, y *und Radien* r *durch die Formeln* Zusammenhg. zwischen beiden Trfn.

$$x = X, \quad y = Y, \quad r = iZ$$

gegeben sind, so entspricht jeder conformen Punkttransformation des Raumes eine solche Berührungstransformation in der Ebene, bei der jeder Kreis in einen Kreis übergeht; und umgekehrt entspricht jeder Berührungstransformation der letzteren Art eine conforme Transformation im Raume.

---

*) Lie, Götting. Nachr., Mai 1871, S. 201, Math. Ann. 5. Bd. (1872), S. 186.

Alle conformen Punkttransformationen des Raumes haben wir im vorigen Paragraphen bestimmt (vgl. Theorem 16, S. 425). Andererseits haben wir alle *infinitesimalen* Berührungstransformationen der Ebene, die jeden Kreis in einen Kreis verwandeln, in § 3 des 5. Kap., S. 150, und dann *alle* Berührungstransformationen der Ebene, die jeden Kreis in einen Kreis verwandeln, in § 5 des 6. Kap., S. 245, bestimmt, indem wir diese Transformationen an letzterer Stelle auf diejenigen projectiven Transformationen zurückführten, die einen linearen Complex invariant lassen. Man sieht also, dass wir ein und dasselbe Problem schon von mehreren Seiten in Angriff genommen und erledigt haben.

Den im Theorem 17 ausgesprochenen Zusammenhang können wir nun auch *analytisch* ableiten:

Anal. Darst. des Zusammenhangs.

Eine conforme Punkttransformation im Raume führt jede Minimalgerade in eine Minimalgerade über. Es sind s, F, F' die Bestimmungsstücke der ∞^3 Minimalgeraden. Eine beliebige Transformation in s, F, F' stellt daher eine Transformation der Minimalgeraden dar. Aber eine Transformation der Minimalgeraden ist dann und nur dann eine conforme Transformation, wenn sie jeden Punkt in einen Punkt überführt, d. h. wenn sie alle durch einen Punkt gehende Minimalgeraden in alle durch einen anderen Punkt gehende Minimalgeraden verwandelt.

Drücken wir dies analytisch aus: Zunächst muss die Transformation in s, F, F' so beschaffen sein, dass sie zwei unendlich benachbarte und einander schneidende Minimalgeraden in ebensolche überführt. Wir fanden aber oben als Bedingung des Schneidens die Gleichung

$$dF - F'ds = 0. \tag{20}$$

Die gesuchte Transformation in s, F, F' muss also so beschaffen sein, dass sie diese Gleichung invariant lässt. Wenn sie also das Wertsystem s, F, F' in das Wertsystem s_1, F_1, F_1' überführt, so muss sie eine Bedingung von der Form

$$dF_1 - F_1'ds_1 = \varrho(dF - F'ds)$$

erfüllen, in der ϱ eine Function von s, F, F' bedeutet. Diese Bedingung ist aber ganz analog der bekannten Bedingung

$$dy_1 - y_1'dx_1 = \varrho(dy - y'dx)$$

für eine Berührungstransformation in der Ebene mit den Punktcoordinaten x, y. Die gesuchte Transformation muss also, können wir sagen, eine Berührungstransformation in den Veränderlichen s, F, F' sein.

Aber dies genügt noch nicht. Es sollen ja *alle* Minimalgeraden durch einen Punkt in alle Minimalgeraden durch einen neuen Punkt übergehen. Zum Schluss des § 1 (S. 433) haben wir aber erkannt, dass diejenigen Wertsysteme (s, F, F') alle Minimalgeraden durch einen Punkt darstellen, die an die Relationen gebunden werden:

$$\begin{cases} F = a + bs + cs^2, \\ F' = b + 2cs, \end{cases} \tag{21}$$

in denen a, b, c irgend welche von den Coordinaten des Punktes abhängige Constanten bedeuten. Wir müssen also verlangen, dass jedes solche Gleichungensystem (21) in ein ebensolches:

$$\begin{cases} F_1 = a_1 + b_1 s_1 + c_1 s_1^2, \\ F_1' = b_1 + 2c_1 s_1 \end{cases} \tag{22}$$

übergehe. Es genügt nun, zu verlangen, dass die erste Gleichung (21) in eine Gleichung von derselben Form, also in die erste Gleichung (22) übergehe, denn wenn dies der Fall ist und F' den in (21) angegebenen Wert $\frac{dF(s)}{ds}$ hat, so lehrt die Invarianz der Gleichung (20), dass mit

$$F' = \frac{dF}{ds}$$

auch

$$F_1' = \frac{dF_1}{ds_1} = b_1 + 2c_1 s_1$$

ist.

Nun aber ist die Gleichung

$$F = a + bs + cs^2$$

die allgemeine Integralgleichung der gewöhnlichen Differentialgleichung dritter Ordnung in F und s:

$$\frac{d^3F}{ds^3} = 0. \tag{23}$$

Wir verlangen daher, dass diese Differentialgleichung invariant bleibe.

Also hat sich ergeben:

Satz 13: *Versteht man unter s, F, F' die Coordinaten einer Minimalgeraden*

$$(1 - s^2)X + i(1 + s^2)Y + 2sZ + F = 0,$$
$$2sX - 2isY - 2Z - F' = 0$$

im Raume (X, Y, Z), und führt man im Raume irgend eine conforme Punkttransformation aus, so werden alle Minimalgeraden (s, F, F') unter einander vertauscht vermöge einer solchen Berührungstransformation der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit (s, F), bei der die gewöhnliche Differentialgleichung dritter Ordnung:

$$\frac{d^3F}{ds^3} = 0$$

invariant bleibt, und in dieser Weise erhält man alle Berührungstransformationen, die diese Differentialgleichung invariant lassen.

Nun entspricht jeder Minimalgeraden (s, F, F') des Raumes ein Linienelement (s, F, F') in der Bildebene. Setzt man

$$F = a + bs + cs^2,$$

so erhält man im Raume die Minimalgeraden durch einen festen Punkt, also in der Bildebene die Linienelemente eines Kreises (vgl. die Tabelle, S. 436). Die Differentialgleichung

$$\frac{d^3 F}{d s^3} = 0 \tag{23}$$

definiert also die Linienelemente aller ∞^3 Kreise in der Bildebene. Mithin sind die im letzten Satze erwähnten Berührungstransformationen gerade diejenigen Berührungstransformationen in der Ebene, die jeden Kreis in einen Kreis überführen. Somit kommen wir zu unserem Theorem 17 zurück.

Vergl. mit früherer Betrachtg. Schon in § 5 des 6. Kap. haben wir die ∞^3 Kreise in der Ebene durch eine Differentialgleichung dritter Ordnung

$$\frac{d^3 \mathfrak{y}}{d \mathfrak{x}^3} = 0$$

definiert. Damals waren $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ solche *Punkt*coordinaten, die mit den rechtwinkligen Punktcoordinaten, die wir damals mit x_1, y_1 bezeichneten, in dem auf S. 245 unter (78) gegebenen Zusammenhang stehen. Bei unserer gegenwärtigen Betrachtung dagegen sind s, F *Linien*coordinaten in der Ebene (vgl. S. 434), und in diesen Liniencoordinaten ist wiederum

$$\frac{d^3 F}{d s^3} = 0 \tag{23}$$

die Differentialgleichung aller Kreise in der Ebene. Der Zusammenhang dieser Liniencoordinaten s, F mit den rechtwinkligen Punktcoordinaten x, y ist leicht anzugeben: Jedes Linienelement der Ebene lässt sich einerseits durch die Coordinaten s, F, F' (vgl. S. 434), andererseits durch die Coordinaten x, y, y' bestimmen. Da der Punkt (x, y) des Elementes der Schnittpunkt der Ebene $Z = 0$ mit der zugehörigen Minimalgeraden ist, so ist nach den die Minimalgerade darstellenden Formeln (19) auf S. 435:

$$\begin{aligned}(1 - s^2)x + i(1 + s^2)y + F &= 0,\\ 2sx - \qquad 2isy - F' &= 0.\end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$x = -\frac{1}{2} F + \frac{1 + s^2}{4s} F', \quad y = \frac{i}{2} F + i \frac{1 - s^2}{4s} F'. \tag{24}$$

Ferner giebt y' die Richtung an, in der die durch die Gleichung

$$(1 - s^2) X + i(1 + s^2) Y + 2sZ + F = 0$$

dargestellte Berührebene des Kugelkreises die Bildebene $Z = 0$ schneidet. Also ist

$$y' = i \frac{1 - s^2}{1 + s^2}. \tag{25}$$

Die Gleichungen (24) und (25) stellen den gesuchten Zusammenhang dar. Sie bestimmen eine Berührungstransformation der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit (s, F) in die zweidimensionale Mannigfaltigkeit (x, y). Dies erhellt von vornherein daraus, dass der Übergang von Liniencoordinaten zu Punktcoordinaten stets durch eine Berührungstransformation vermittelt wird (vgl. § 4 des 1. Kap.).

Schliesslich wollen wir alle infinitesimalen conformen Punkttransformationen des Raumes (X, Y, Z) wirklich aufstellen. Wir können dazu zwei verschiedene Wege einschlagen: Einmal liefert uns das Theorem 16 des vorigen Paragraphen alle conformen Transformationen des Raumes überhaupt, also auch alle infinitesimalen. Aber wir können zur Aufstellung der letzteren auch die im gegenwärtigen Paragraphen eingehend besprochene Abbildung benutzen und das Problem hierdurch auf das andere zurückführen, alle die infinitesimalen Berührungstransformationen der (xy)-Ebene zu bestimmen, die jeden Kreis in einen Kreis verwandeln. Dies letztere Problem haben wir früher (S. 150 u. S. 246) auf verschiedenen Wegen erledigt. Wir wollen nun das zweite Verfahren anwenden: Bestimmg. d. inf. conf. Trfn. d. Raumes.

Der Punkt (X, Y, Z) des Raumes bildet sich nach den Formeln (18), S. 434, in der (xy)-Ebene als der Kreis

$$(x - X)^2 + (y - Y)^2 + Z^2 = 0 \tag{26}$$

ab, dessen Linienelemente (x, y, y') ausser dieser Gleichung noch die Gleichung

$$(x - X) + (y - Y)\,y' = 0 \tag{27}$$

erfüllen. Wenn wir nun eine der in Satz 6, § 3 des 5. Kap., S. 150, aufgestellten infinitesimalen Berührungstransformationen auf die Linienelemente (x, y, y') anwenden, wobei x, y, y' gewisse Incremente δx, δy, $\delta y'$ erfahren, so geht aus jedem Kreise (26) ein neuer, unendlich benachbarter Kreis hervor. Letzterer Kreis ist das Bild eines Punktes $(X + \delta X,\ Y + \delta Y,\ Z + \delta Z)$ im Raume. Mit (26) und (27) bestehen also noch die beiden durch Variation von x, y, y'; X, Y, Z hervorgehenden Gleichungen:

$$(28)\quad \begin{cases} (x - X)(\delta x - \delta X) + (y - Y)(\delta y - \delta Y) + Z\delta Z = 0, \\ \qquad (\delta x - \delta X) + (\delta y - \delta Y)\,y' + (y - Y)\,\delta y' = 0. \end{cases}$$

Setzen wir hierin die wirklichen Werte von δx, δy, $\delta y'$ in Gemässheit des citierten Satzes und des Theorems 3, S. 95, ein, so erhalten wir aus (28) zwei Gleichungen, die als Folge von (26) und (27) bestehen müssen, während δX, δY, δZ Functionen von X, Y, Z allein sind. Dies liefert uns alsdann eine Möglichkeit, die Werte von $\delta X, \delta Y, \delta Z$, ausgedrückt in X, Y, Z, zu bestimmen.

Die Ausrechnung wird etwas umständlich. Es ist daher vorzuziehen, die Gleichungen (26), (27) vermöge der Einführung einer Hülfsveränderlichen φ durch die folgende zu ersetzen:

$$x = X + iZ\cos\varphi, \quad y = Y + iZ\sin\varphi, \quad y' = -\operatorname{ctg}\varphi, \tag{27'}$$

sodass

$$\begin{aligned} \delta x &= \delta X + i\delta Z\cos\varphi - iZ\sin\varphi\,\delta\varphi, \\ \delta y &= \delta Y + i\delta Z\sin\varphi + iZ\cos\varphi\,\delta\varphi, \end{aligned} \qquad \delta y' = \frac{\delta\varphi}{\sin^2\varphi}$$

oder nach Elimination von $\delta\varphi$:

$$\left\{\begin{aligned} \delta x &= \delta X + i\delta Z\cos\varphi - iZ\sin^3\varphi\,\delta y', \\ \delta y &= \delta Y + i\delta Z\sin\varphi + iZ\sin^2\varphi\cos\varphi\,\delta y' \end{aligned}\right. \tag{28'}$$

wird. Wenn wir in (28′) die Werte von δx, δy, $\delta y'$ einsetzen und darauf die Werte (27′) substituieren, so ergeben sich zwei Gleichungen in X, Y, Z, δX, δY, δZ, φ. Wir verlangen, dass sie für alle Werte von φ identisch bestehen, und gelangen dadurch in jedem Falle zu drei Gleichungen, die δX, δY, δZ als Functionen von X, Y, Z allein bestimmen.

Wir verzichten auf eine ausführliche Darstellung der Rechnungen und stellen hier nur die Ergebnisse zusammen. Dabei bemerken wir: Wenn im Raume (X, Y, Z) eine infinitesimale Transformation vorliegt, bei der X, Y, Z die Incremente

$$\delta X = \xi(X, Y, Z)\,\delta t, \quad \delta Y = \eta(X, Y, Z)\,\delta t, \quad \delta Z = \zeta(X, Y, Z)\,\delta t$$

erfahren (vgl. § 1 des 4. Kap.), so erfährt eine beliebige Function $f(X, Y, Z)$ das Increment:

$$\left(\xi\frac{\partial f}{\partial X} + \eta\frac{\partial f}{\partial Y} + \zeta\frac{\partial f}{\partial Z}\right)\delta t.$$

Wir bezeichnen daher — ganz analog der Bezeichnung im Fall einer infinitesimalen Berührungstransformation in der Ebene, S. 94, — den Ausdruck

$$\xi\frac{\partial f}{\partial X} + \eta\frac{\partial f}{\partial Y} + \zeta\frac{\partial f}{\partial Z}$$

Symbol e. inf. Trf. d. Raumes. als das *Symbol der infinitesimalen Transformation.* Benutzen wir diese Ausdrucksweise, so können wir die Ergebnisse so darstellen: Den zehn in Satz 6, S. 150, genannten infinitesimalen Berührungstransformationen in der (xy)-Ebene entsprechen im Raume (X, Y, Z) diejenigen zehn infinitesimalen conformen Punkttransformationen, deren Symbole folgende sind:

Ergebnis.

$$-\frac{\partial f}{\partial Y}, \quad \frac{\partial f}{\partial X}, \quad -X\frac{\partial f}{\partial X} - Y\frac{\partial f}{\partial Y} - Z\frac{\partial f}{\partial Z}, \quad Y\frac{\partial f}{\partial X} - X\frac{\partial f}{\partial Y},$$

$$(Y^2 - X^2 + Z^2)\frac{\partial f}{\partial X} - 2XY\frac{\partial f}{\partial Y} - 2XZ\frac{\partial f}{\partial Z},$$

$$-2XY\frac{\partial f}{\partial X} + (X^2 - Y^2 + Z^2)\frac{\partial f}{\partial Y} - 2YZ\frac{\partial f}{\partial Z},$$

$$i\frac{\partial f}{\partial Z}, \quad -iZ\frac{\partial f}{\partial X} + iX\frac{\partial f}{\partial Z}, \quad -iZ\frac{\partial f}{\partial Y} + iY\frac{\partial f}{\partial Z},$$

$$2iXZ\frac{\partial f}{\partial X} - 2iYZ\frac{\partial f}{\partial Y} + i(X^2 + Y^2 - Z^2)\frac{\partial f}{\partial Z}$$

Die allgemeinste infinitesimale conforme Punkttransformation des Raumes (X, Y, Z) hat ein Symbol, das sich linear mit beliebigen arbitrary constanten Coefficienten aus diesen zehn ableiten lässt oder, wie wir sagen (vgl. S. 123, § 5 des 4. Kap.), aus diesen zehn *linear ableitbar* ist. Daraus erhellt, dass wir an Stelle der erhaltenen einzelnen Symbole zehn andere aus ihnen linear ableitbare setzen dürfen, vorausgesetzt nur, dass diese neuen zehn ebenfalls von einander *unabhängig* (S. 122) sind. Daher können wir den Satz aussprechen:

Satz 14: *Die allgemeinste infinitesimale conforme Punkttransformation des Raumes mit den rechtwinkligen Punktcoordinaten X, Y, Z hat ein Symbol, das sich linear mit beliebigen constanten Coefficienten aus den folgenden zehn von einander unabhängigen ableiten lässt:*

$$\boxed{\begin{gathered}
\frac{\partial f}{\partial X}, \quad \frac{\partial f}{\partial Y}, \quad \frac{\partial f}{\partial Z}; \quad \text{translations} \\
Y\frac{\partial f}{\partial Z} - Z\frac{\partial f}{\partial Y}, \quad Z\frac{\partial f}{\partial X} - X\frac{\partial f}{\partial Z}, \quad X\frac{\partial f}{\partial Y} - Y\frac{\partial f}{\partial X}; \quad \text{rotation} \\
X\frac{\partial f}{\partial X} + Y\frac{\partial f}{\partial Y} + Z\frac{\partial f}{\partial Z}; \quad \text{magnification} \\
(-X^2 + Y^2 + Z^2)\frac{\partial f}{\partial X} - 2XY\frac{\partial f}{\partial Y} - 2XZ\frac{\partial f}{\partial Z}, \\
-2YX\frac{\partial f}{\partial X} + (X^2 - Y^2 + Z^2)\frac{\partial f}{\partial Y} - 2YZ\frac{\partial f}{\partial Z}, \\
-2ZX\frac{\partial f}{\partial X} - 2ZY\frac{\partial f}{\partial Y} + (X^2 + Y^2 - Z^2)\frac{\partial f}{\partial Z}.
\end{gathered}}$$

Die drei ersten infinitesimalen Transformationen sind Translationen längs der Coordinatenaxen, die nächsten drei Rotationen um die Axen und die siebente ist eine Streckung vom Anfangspunkt aus. Die sieben ersten repräsentieren also alle *infinitesimalen Ähnlichkeitstransformationen des Raumes.* Dass diese auftreten müssen, ist von vornherein klar, weil die Ähnlichkeitstransformationen offenbar conform sind (vgl. S. 426).

Suchen wir rückwärts die diesen sieben infinitesimalen Ähnlichkeitstransformationen des Raumes entsprechenden infinitesimalen Berührungstransformationen in der (xy)-Ebene, so finden wir unter den in Satz 6, S. 150, genannten diejenigen, deren charakteristische Functionen sind:

$$\begin{gathered}
1, \quad y', \quad y - xy', \quad x + yy', \\
\sqrt{1 + y'^2}, \quad x\sqrt{1 + y'^2}, \quad y\sqrt{1 + y'^2}.
\end{gathered}$$

Da alle ∞^7 Ähnlichkeitstransformationen des Raumes offenbar eine Gruppe bilden, so bilden auch die ihnen entsprechenden ∞^7 Berührungstransformationen der Ebene, die Kreise in Kreise überführen, für sich eine Gruppe. Sie wird von den soeben angegebenen infinitesimalen Transformationen und den aus ihnen linear ableitbaren erzeugt. Auf diese Gruppe, sogar in n Dimensionen, hat Lie 1871 und 72 an den auf S. 437 genannten Stellen die Aufmerksamkeit gelenkt.

§ 3. Beziehungen zwischen dem linearen Complex und dem Complex aller Minimalgeraden.

Abbild. d. Pkte. d. Raumes als Linienel. d. Ebene.

In § 5 des 6. Kap. haben wir eine Abbildung der ∞^3 Punkte des Raumes (x, y, z) in die ∞^3 Linienelemente $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p})$ einer $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$-Ebene betrachtet. Sie war definiert durch die Gleichungen (vgl. S. 238):

$$\mathfrak{x} = x, \quad \mathfrak{y} = z + xy, \quad \mathfrak{p} = 2y. \tag{29}$$

Wir erkannten damals, dass sich jede Curve des durch die Pfaff'sche Gleichung

$$x\,dy - y\,dx + dz = 0 \tag{30}$$

definierten linearen Complexes als ein Elementverein in der $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$-Ebene abbildet und dass umgekehrt jeder Elementverein in der $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$-Ebene das Bild einer Curve des linearen Complexes ist. Insbesondere ergab sich, dass sich die ∞^3 Geraden des linearen Complexes als die ∞^3 Parabeln

$$\mathfrak{y} = a + 2b\mathfrak{x} + c\mathfrak{x}^2$$

abbilden, d. h. als die Elementvereine, welche die Integralgebilde der Differentialgleichung dritter Ordnung

$$\frac{d^3\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}^3} = 0 \tag{31}$$

sind.

Abb. d. Minimalgeraden als Linienel. d Ebene.

Auf der anderen Seite haben wir im vorigen Paragraphen eine Beziehung zwischen dem Raume (X, Y, Z) und der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit (s, F) untersucht, die wir in folgender Weise charakterisieren können, *wenn wir von jetzt an unter s, F Cartesische Coordinaten in einer (sF)-Ebene verstehen:* Jeder Minimalgeraden des Raumes (X, Y, Z), die bei gegebenen s, F, F' durch zwei Gleichungen von der Form (vgl. S. 435):

$$\begin{cases} (1-s^2)X + i(1+s^2)Y + 2sZ + F = 0, \\ 2sX - \qquad 2isY - \; 2Z - F' = 0 \end{cases} \tag{32}$$

dargestellt wird, ist ein Linienelement (s, F, F') der (sF)-Ebene zugeordnet. Dabei sind, wie wir aus den Ergebnissen des vorigen Paragraphen entnehmen können, allen ∞^1 Minimalgeraden durch einen Punkt alle ∞^1 Linienelemente einer der Curven zugeordnet, die der Differentialgleichung

$$\frac{d^3F}{ds^3} = 0 \tag{33}$$

genüge leisten. Ferner erkannten wir, dass hierbei jeder Minimalcurve des Raumes (X, Y, Z) ein Elementverein der (sF)-Ebene zugeordnet wird, und umgekehrt. (Nach Formel (20), S. 436.)

Wir wollen nun diese beiden Beziehungsarten mit einander verknüpfen, indem wir die vorhin erwähnte $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$-Ebene mit der soeben genannten (sF)-Ebene dadurch identificieren, dass wir

$$\mathfrak{x} = s, \quad \mathfrak{y} = F, \quad \mathfrak{p} = F' \tag{34}$$

setzen. Dadurch wird dann eine Verknüpfung der folgenden Art hergestellt: Jeder Punkt des Raumes (x, y, z) wird als Linienelement $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p})$ oder (s, F, F') der $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$-Ebene abgebildet, und dieses Linienelement ist wieder das Bild einer Minimalgeraden des Raumes (X, Y, Z). *Es wird also jedem Punkt des Raumes (x, y, z) schliesslich eine Minimalgerade des Raumes (X, Y, Z) zugeordnet.* Beziehg. zwischen zwei Räumen.

Um diese Zuordnung analytisch herzustellen, haben wir nur aus den *acht* Gleichungen (29), (32), (34) die *sechs* Grössen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{p}$, s, F, F' zu eliminieren, wodurch sich die *beiden* Gleichungen ergeben:

$$\begin{aligned} (1 - x^2)X + i(1 + x^2)Y + 2xZ + z + xy &= 0, \\ xX - \quad ixY - \quad Z - y \quad &= 0, \end{aligned}$$

die sich auch so schreiben lassen:

$$\left\{\begin{aligned} X + iY + xZ + z &= 0, \\ x(X - iY) - \; Z - y &= 0. \end{aligned}\right. \tag{35}$$

Betrachten wir eine *Gerade* des linearen Complexes (30) im Raume (x, y, z). Ihre Punkte bilden sich in der $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$-Ebene als die Linienelemente einer der Parabeln ab, die der Gleichung (31) oder (33) genügen. Die Linienelemente einer solchen Parabel sind andererseits die Bilder aller ∞^1 Minimalgeraden durch einen Punkt des Raumes (X, Y, Z). Wir sehen also, *dass jeder Geraden des linearen Complexes* (30) *im Raume (x, y, z) ein Punkt im Raume (X, Y, Z) zugeordnet wird.*

Fassen wir nun eine beliebige *Curve* des linearen Complexes (30) im Raume (x, y, z) ins Auge. Diese Curve bildet sich in der $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$-Ebene als ein Elementverein ab, der wiederum das Bild einer Minimalcurve des Raumes (X, Y, Z) ist. *Jeder Curve des linearen Complexes* (30) *im Raume (x, y, z) ist demnach eine Minimalcurve im Raume (X, Y, Z) zugeordnet.*

Die begrifflichen Überlegungen, die von den Punkten bez. Complexgeraden bez. Complexcurven des Raumes (x, y, z) zu den Minimalgeraden bez. Punkten bez. Minimalcurven des Raumes (X, Y, Z) führten, können offenbar auch *umgekehrt* ausgeführt werden.

Wir stellen die Ergebnisse tabellarisch zusammen:

Entsprechende Gebilde in beiden Räumen.

Raum (x, y, z).	Ebene $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ oder (s, F).	Raum (X, Y, Z).
1) Punkt (x, y, z).	1) Linienelement $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p})$ oder (s, F, F').	1) Minimalgerade.
2) Gerade des linearen Complexes: $x\,dy - y\,dx + dz = 0$.	2) Integralcurve der Differentialgleichung: $\mathfrak{y}''' = 0$.	2) Punkt (X, Y, Z).
3) Krumme Curve des linearen Complexes.	3) Curve.	3) Krumme Minimalcurve.

Analyt. Ableitg.

Diese durch begriffliche Überlegungen gewonnenen Ergebnisse können wir nun auch durch *directes* Studium der Gleichungen (35), die ja die Beziehung zwischen den Räumen (x, y, z) und (X, Y, Z) analytisch darstellen, ohne Mühe ableiten. Wir wenden uns jetzt hierzu, *indem wir dabei von dem schon Gefundenen völlig absehen* und also nur das Eine voraussetzen, dass die beiden Räume (x, y, z) und (X, Y, Z) durch das Gleichungensystem:

$$\left\{\begin{aligned} &X + iY + xZ + z = 0, \\ &x(X - iY) - Z - y = 0 \end{aligned}\right. \tag{35}$$

mit einander verknüpft seien.

Diese beiden Gleichungen stellen Beziehungen zwischen den Punkten (x, y, z) und (X, Y, Z) der beiden Räume fest. Wir wollen zwei Punkte (x, y, z) und (X, Y, Z), deren Coordinaten den Gleichungen (35) genügen, zu einander *conjugiert* nennen.

Conjug. Pkte.

Jeder Punkt (x, y, z) hat ∞^1 conjugierte Punkte (X, Y, Z), da die drei Coordinaten X, Y, Z der conjugierten Punkte nur an die zwei Gleichungen (35) gebunden sind. Diese Gleichungen sind *linear in* X, Y, Z. Mithin erfüllen die zu einem Punkte (x, y, z) conjugierten Punkte (X, Y, Z) eine *Gerade*. Somit wird jedem der ∞^3 Punkte des Raumes (x, y, z) eine Gerade als Ort der conjugierten Punkte im Raume (X, Y, Z) zugeordnet. Insgesamt erhalten wir so ∞^3 Geraden im Raume (X, Y, Z). Sie bilden somit einen Liniencomplex. Die Monge'sche Gleichung dieses Liniencomplexes ergiebt sich, wenn wir die Gleichungen (35) bei festen x, y, z differenzieren:

$$\begin{aligned} dX + i\,dY + x\,dZ &= 0, \\ x(dX - i\,dY) - dZ &= 0 \end{aligned}$$

und darauf den noch vorkommenden Parameter x eliminieren, in der folgenden Form:

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = 0. \tag{36}$$

Dies ist aber die Monge'sche Gleichung des Complexes aller Minimalgeraden im Raume (X, Y, Z). *Die zu einem Punkte* (x, y, z) *conjugierten Punkte* (X, Y, Z) *erfüllen also eine Minimalgerade.*

Umgekehrt wollen wir jetzt alle zu einem Punkte (X, Y, Z) conjugierten Punkte (x, y, z) betrachten. Sie ergeben sich aus den beiden auch *in* x, y, z *linearen* Gleichungen (35), d. h. die zu einem Punkte (X, Y, Z) conjugierten Punkte (x, y, z) erfüllen eine *Gerade* im Raume (x, y, z). Jedem der ∞^3 Punkte (X, Y, Z) wird somit eine Gerade im Raume (x, y, z) zugeordnet, sodass diese Geraden im letzteren Raume einen Liniencomplex bilden. Die Monge'sche Gleichung dieses Complexes geht hervor, wenn die Gleichungen (35) bei festen X, Y, Z differenziert werden:

$$(37) \qquad \begin{cases} Z dx + dz = 0, \\ (X - iY) dx - dy = 0 \end{cases}$$

und dann aus diesen Gleichungen und aus (35) die drei Parameter X, Y, Z eliminiert werden. Es ergiebt sich:

$$dx(x dy - y dx + dz) = 0.$$

Der Factor dx ergäbe gleich Null gesetzt, dass die zum Punkt (X, Y, Z) conjugierten Punkte (x, y, z) sämtlich dieselbe Coordinate x haben würden. Das ist aber, wie das Gleichungensystem (35) lehrt, offenbar nicht der Fall. Also haben wir:

$$x dy - y dx + dz = 0,$$

und dies ist die Gleichung des oben betrachteten linearen Complexes. Wir erkennen daher, *dass die zu einem Punkte* (X, Y, Z) *conjugierten Punkte* (x, y, z) *eine Gerade dieses linearen Complexes erfüllen.*

Wir fassen das Ergebnis so zusammen:

Satz 15: *Liegt das bilineare Gleichungensystem* Ergebnis.

$$X + iY + xZ + z = 0,$$
$$x(X - iY) - Z - y = 0$$

vor und bezeichnet man zwei Punkte (x, y, z) *und* (X, Y, Z) *zweier auf rechtwinklige Coordinatensysteme bezogener Räume als conjugiert, sobald ihre Coordinaten das Gleichungensystem erfüllen, so wird jedem Punkt* (x, y, z) *des ersten Raumes als Ort der conjugierten Punkte* (X, Y, Z) *eine Minimalgerade im zweiten Raume und umgekehrt jedem Punkt* (X, Y, Z) *des zweiten Raumes eine Gerade des durch die Pfaff'sche Gleichung*

$$x dy - y dx + dz = 0$$

definierten linearen Complexes im ersten Raume zugeordnet.

Um diese Beziehung zwischen den beiden Räumen (x, y, z) und (X, Y, Z) dem Verständnis näher zu bringen, erinnern wir an eine ähnliche und wohlbekannte Beziehung in der Ebene, nämlich an die allgemeine Dualität in der Ebene, von der die Transformation durch reciproke Polaren ein specieller Fall ist. (Vgl. § 3 des 1. Kap. sowie das 1. Beisp. in § 5 des 2. Kap., S. 56.) Bei der Dualität hat bekanntlich jeder Punkt ∞^1 conjugierte Punkte, die eine Gerade erfüllen, während zu allen Punkten einer Geraden stets ein conjugierter Punkt vorhanden ist. Bei der Dualität geht der Inbegriff eines Punktes und einer Geraden durch ihn in den Inbegriff einer Geraden und eines Punktes auf ihr über. Dasselbe ist hier der Fall: Betrachten wir einen Punkt (x, y, z) und eine Complexgerade g durch ihn. Zu dem Punkte (x, y, z) sind alle Punkte einer Minimalgeraden des Raumes (X, Y, Z) conjugiert, während die Punkte der gegebenen Geraden g sämtlich zu einem gewissen Punkte (X, Y, Z) conjugiert sind. Da auch der gegebene Punkt (x, y, z) zu den Punkten der Geraden g gehört, so geht die ihm zugehörige Minimalgerade notwendig durch den Punkt (X, Y, Z). Wir können daher den Satz aussprechen*):

Inbegriff v. Pkt. u. Complexgerade durch ihn.

Satz 16: *Das bilineare Gleichungensystem*

$$X + iY + xZ + z = 0,$$
$$x(X - iY) - Z - y = 0$$

bildet die Punkte des Raumes (x, y, z) *auf die Minimalgeraden im Raume* (X, Y, Z), *also auf die Geraden des durch die Gleichung*

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = 0$$

definierten Complexes zweiten Grades, und andererseits die Punkte des Raumes (X, Y, Z) *auf die Geraden des durch die Gleichung*

$$x\,dy - y\,dx + dz = 0$$

definierten linearen Complexes im Raume (x, y, z) *ab. Diese beiden Abbildungen haben dabei die Eigenschaft, dass sich alle* ∞^1 *Punkte einer beliebig ausgewählten Complexgeraden im einen Raume als die* ∞^1 *Complexgeraden im anderen Raume abbilden, die durch denjenigen Punkt gehen, dessen Bild die ausgewählte Complexgerade ist. Mit anderen Worten: Der Inbegriff eines Punktes und einer durch ihn gehenden Complexgeraden im einen Raume bildet sich als der Inbegriff einer Complexgeraden und eines Punktes auf ihr im anderen Raume ab.*

---

*) Im zweiten Bande werden wir zeigen, wie Lie im Februar 1869 durch eine neue Deutung des Imaginären der ebenen Geometrie aus der Poncelet-Gergonne'schen Theorie der Dualität zu einer Beziehung zwischen zwei dreidimensionalen Räumen geführt wurde, die als besonderen Fall die im Texte entwickelte Beziehung umfasst. Vgl. Ges. d. Wiss. zu Christiania, Febr. 1869, S. 35.

Diese Abbildung hat hochwichtige Eigenschaften, und wir werden uns später, im zweiten Bande, eingehend mit ihr beschäftigen. Im Folgenden entwickeln wir ihre grundlegenden Eigenschaften auf möglichst elementarem Wege.

Es möge im Raume (x, y, z) eine Reihe von Punkten $a_1, a_2, a_3 \ldots$ so gegeben sein, dass die aufeinanderfolgenden Geraden $(a_1 a_2), (a_2 a_3) \ldots$ sämtlich Geraden des linearen Complexes sind. (Siehe Fig. 80.) Wir betrachten also ein *Polygon, dessen Seiten dem linearen Complex angehören.* Die Ecken $a_1, a_2, a_3 \ldots$ bilden sich im Raume (X, Y, Z) als eine Reihe von Minimalgeraden $A_1, A_2, A_3 \ldots$ ab, und nach dem letzten Satze haben die Geraden $(a_1 a_2), (a_2 a_3) \ldots$ die Punkte zu Bildern, in denen sich je zwei aufeinanderfolgende Minimalgeraden $A_1, A_2, A_3 \ldots$ schneiden. Wir können also sagen, dass sich das Polygon $a_1 a_2 a_3 \ldots$ im Raume (x, y, z) als das Polygon $A_1 A_2 A_3 \ldots$ im Raume (X, Y, Z) in der Weise abbildet, dass die Ecken des einen Polygons den Seiten des anderen und die Seiten des einen den Ecken des anderen entsprechen. (Man vergleiche die analoge Betrachtung bei der Transformation durch reciproke Polaren in der Ebene, § 3 des 1. Kap., S. 22.)

Entsprechen von Polygonen

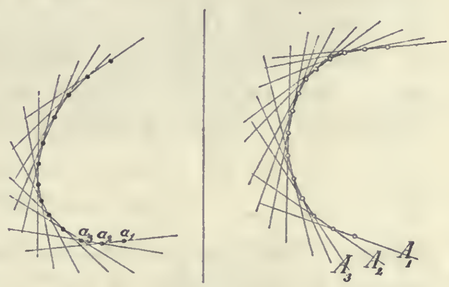

Fig. 80.

Die Beziehung zwischen beiden Polygonen ist völlig umkehrbar: Wären wir von dem Polygon $A_1 A_2 A_3 \ldots$ im Raume (X, Y, Z) ausgegangen, so hätten wir als sein Bild im Raume (x, y, z) gerade das Polygon $a_1 a_2 a_3 \ldots$ erhalten.

Diese Beziehung bleibt nun bestehen, wie gross auch die Zahl der Ecken und Seiten der Polygone sein mag, vorausgesetzt nur, dass man als Seiten stets Geraden des betreffenden Complexes wählt. Es ist daher möglich, durch einen Grenzübergang zu schliessen, dass die *Complexcurven* in beiden Räumen ebenfalls wechselseitig auf einander bezogen sind. Beim Grenzübergang nämlich gehen die Polygone in Curven über und die Polygonseiten in die Tangenten der Curven über.

Entsprechen von Complexcurven

Um die Berechtigung dieses Grenzüberganges — vielleicht zum Überfluss — noch von anderer Seite her zu zeigen, machen wir die folgenden analytischen Überlegungen:

Die Bedingung dafür, dass zwei unendlich benachbarte Punkte

(x, y, z) und $(x + dx,\ y + dy,\ z + dz)$ im Raume (x, y, z) auf einer Geraden des linearen Complexes liegen, ist, wie wir wissen

$$x\,dy - y\,dx + dz = 0.$$

Dem ersten Punkt (x, y, z) entspricht im Raume (X, Y, Z) die durch die beiden Gleichungen

$$(35)\qquad \begin{cases} X + iY + xZ + z = 0, \\ x(X - iY) - Z - y = 0 \end{cases}$$

in den laufenden Coordinaten X, Y, Z bestimmte Minimalgerade. Dem Punkte $(x + dx,\ y + dy,\ z + dz)$ entspricht die unendlich benachbarte Minimalgerade, deren Gleichungen aus (35) hervorgehen, wenn darin für x, y, z die Werte $x + dx,\ y + dy,\ z + dz$ gesetzt werden. Die beiden Minimalgeraden schneiden einander daher dann und nur dann, wenn es solche Werte von X, Y, Z giebt, die den beiden Gleichungen (35) und überdies den beiden Gleichungen

$$(37)\qquad \begin{cases} Z\,dx + dz = 0, \\ (X - iY)\,dx - dy = 0 \end{cases}$$

genügen. (Vgl. die analoge Betrachtung in § 2, S. 435.) Die Bedingung des Schneidens ist das Verschwinden der Determinante dieser vier in X, Y, Z linearen Gleichungen, und dies giebt, wie wir schon früher (S. 447) erkannten:

$$x\,dy - y\,dx + dz = 0.$$

Wenn wir andererseits zwei unendlich benachbarte Punkte (X, Y, Z) und $(X + dX,\ Y + dY,\ Z + dZ)$ im Raume (X, Y, Z) ins Auge fassen, so wissen wir, dass beide auf einer Minimalgeraden liegen, wenn

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = 0$$

ist. Ihnen entsprechen im Raume (x, y, z) zwei unendlich benachbarte Geraden des linearen Complexes, und die erste Gerade wird durch die Gleichungen (35) in den laufenden Coordinaten x, y, z dargestellt. Die ganz analoge Überlegung wie vorhin liefert hier als Bedingung ihres Schneidens (vgl. auch S. 446):

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = 0.$$

Aus diesen Überlegungen folgt: Die Punkte einer Curve c des einen Complexes bilden sich als solche ∞^1 Geraden des anderen Complexes ab, von denen je zwei unendlich benachbarte einander schneiden, sodass diese ∞^1 Geraden eine Curve C des anderen Complexes umhüllen. Ferner: Die Tangenten der gewählten Curve c bilden sich, da sie eine Developpabele des ersten Complexes ausmachen, als ∞^1 Punkte ab, die eine Curve C' des zweiten Complexes bilden werden. Da sich nun stets ein Punkt mit hindurchgehender Complexgeraden als Complexgerade mit einem Punkte auf ihr abbildet, so folgt, dass die Curve C' auf der Developpabeln von C liegen muss. Die Developpabele von C enthält ausser C und ihren Geraden keine Complexcurve (nach S. 235, § 4 des 6. Kap., für den Fall des linearen Complexes und nach S. 264, § 1 des 7. Kap., für den Fall des Complexes der Minimalgeraden), d. h. C' fällt mit C zusammen.

Jede Curve des einen Complexes bildet sich also, ob man sie nun als Punktort oder als Geradenort auffasst, wieder als nur eine Curve des zweiten Complexes ab.

Diese Beziehung ist ganz analog der Beziehung zwischen ebenen Curven, die einander durch die Transformation durch reciproke Polaren oder noch allgemeiner durch die Dualität zugeordnet sind.

Wie wir schon in Satz 16 sagten, wird ein Punkt mit hindurchgehender Complexgeraden immer als eine Complexgerade mit einem Punkte auf ihr abgebildet, d. h. jedes *Linienelement*, das die Differentialgleichung des einen Complexes erfüllt, wird als ein Linienelement abgebildet, das die Differentialgleichung des anderen Complexes erfüllt. Die vorhergehenden Entwickelungen zeigen nun, dass insbesondere die ∞^1 Linienelemente einer Complexcurve stets wieder als die einer Complexcurve abgebildet werden. Eine Ausnahme spielen dabei nur die Linienelemente einer Complexgeraden. Sie werden als die Linienelemente eines Elementarkegels abgebildet, der übrigens beim linearen Complex in ein Büschel degeneriert ist.

Um das Entsprechen zwischen den Linienelementen — Anal. Darst. entsprechender Linienelem.

$$(x,\ y,\ z,\ dx:dy:dz) \quad \text{und} \quad (Y,\ Y,\ Z,\ dX:dY:dZ)$$

der beiden Monge'schen Gleichungen

$$x\,dy - y\,dx + dz = 0, \qquad dX^2 + dY^2 + dZ^2 = 0$$

auch analytisch darzustellen, beachten wir, dass zunächst die beiden Gleichungen

$$(35) \qquad \begin{cases} X + iY + xZ + z = 0, \\ x(X - iY) - Z - y = 0 \end{cases}$$

bestehen. Der Geraden des Elementes $(x, y, z, dx:dy:dz)$ entspricht der Punkt (X, Y, Z). Mithin stellen die beiden Gleichungen (35) diese Gerade dar, sobald man in ihnen x, y, z als laufende Coordinaten betrachtet, sodass also, da der Punkt $(x + dx,\ y + dy,\ z + dz)$ auf der Geraden liegt, die Gleichungen bestehen:

$$Z\,dx + dz = 0,$$
$$(X - iY)\,dx - dy = 0.$$

Analog ist:

$$dX + idY + xdZ = 0,$$
$$x(dX - idY) - dZ = 0.$$

Aus diesen sechs Gleichungen, die wiederholt aufgetreten sind, folgt nun durch Auflösung nach $X, Y, Z, dX : dY : dZ$

$$(38)\quad \begin{cases} X = \dfrac{dy + x\,dz - z\,dx}{2\,dx}, \quad Y = i\,\dfrac{dy - x\,dz + z\,dx}{2\,dx}, \\ Z = -\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{dx}, \\ dX : dY : dZ = (1 - x^2) : i(1 + x^2) : 2x \end{cases}$$

und andererseits durch Auflösung nach $x, y, z, dx : dy : dz$

$$(39)\quad \begin{cases} x = \dfrac{dZ}{dX - idY} = -\dfrac{dX + idY}{dZ}, \\ y = -\dfrac{(X - iY)(dX + idY) + ZdZ}{dZ}, \\ z = \dfrac{Z(dX + idY) - (X + iY)\,dZ}{dZ}, \\ dx : dy : dz = 1 : (X - iY) : -Z. \end{cases}$$

Dass wir mehrere Auflösungen z. B. für Z und für x erhalten, ist nicht überraschend: Wir fassen ja nur solche Linienelemente ins Auge, deren Geraden den Complexen angehören, und für solche sind die verschiedenen erhaltenen Werte einander gleich. Natürlich lassen sich die gewonnenen Formeln deshalb noch in mehreren anderen Weisen schreiben.

Die Gleichungen (38) liefern das Linienelement im Raume (X, Y, Z), das einem gegebenen Linienelement im Raume (x, y, z) entspricht, indessen die Gleichungen (39) das Umgekehrte leisten. Wie diese Gleichungen zeigen, ist diese Zuordnung zwischen den ∞^4 Linienelementen der beiden Monge'schen Gleichungen in beiden Räumen eine *ein-eindeutige Zuordnung.*

Wir können nun das folgende Theorem aufstellen*):

Gesamtergebnis.

Theorem 18: *Die Gleichungen*

$$X + iY + xZ + z = 0,$$
$$x(X - iY) - Z - y = 0$$

bestimmen eine ein-eindeutige Zuordnung zwischen den Linienelementen der Pfaff'schen Gleichung

*) Ges. d. Wiss. zu Christiania, Febr. 1869, Oct. 1870 und 71, Comptes Rendus Oct. 1870, 71. Bd., S. 579, Math. Annalen 5. Bd. (1872), S. 168.

$$xdy - ydx + dz = 0$$

eines linearen Complexes im Raume (x, y, z) *und den Linienelementen der Monge'schen Gleichung*

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = 0$$

des Complexes aller Minimalgeraden im Raume (X, Y, Z). *Bei dieser Zuordnung entspricht jeder krummen Complexcurve des einen Complexes eine krumme Complexcurve des anderen. Den* ∞^1 *Linienelementen einer Complexgeraden dagegen entsprechen im anderen Raume die* ∞^1 *Linienelemente durch einen Punkt.*

Wir stellen schliesslich einander entsprechende Gebilde in einer Tabelle zusammen.

Raum (x, y, z).	Raum (X, Y, Z).
1) Linienelement der Pfaff'schen Gleichung $xdy - ydx + dz = 0$ eines linearen Complexes.	1) Linienelement der Monge'schen Gleichung $dX^2 + dY^2 + dZ^2 = 0$ des Complexes aller Minimalgeraden.
2) Punkt als Scheitel eines Büschels solcher Linienelemente.	2) Minimalgerade.
3) Gerade des linearen Complexes.	3) Punkt als Spitze eines Elementarkegels (einer Nullkugel).
4) Krumme Curve des linearen Complexes.	4) Krumme Minimalcurve.
5) Zwei einander schneidende krumme Complexcurven.	5) Zwei krumme Minimalcurven, die beide eine Minimalgerade berühren.
6) Zwei krumme Complexcurven, die beide eine Complexgerade berühren.	6) Zwei einander schneidende krumme Minimalcurven.
7) Einander berührende krumme Complexcurven.	7) Einander berührende krumme Minimalcurven.

Da die Beziehung zwischen den Complexcurven in beiden Räumen durch birationale Gleichungen vermittelt wird, so entspricht jeder *algebraischen* Complexcurve wieder eine algebraische Complexcurve. Hiernach ist z. B. das Problem, *alle algebraischen Minimalcurven zu finden,* identisch mit dem Problem, alle algebraischen Curven des linearen Complexes zu finden. Analoges gilt betreffs der Bestimmung der algebraischen Complexcurven von gegebenem Geschlecht.

§ 4. Eine Zuordnung zwischen den Geraden eines Raumes und den Kugeln eines anderen Raumes.

Es ist von grösster Wichtigkeit, dass die im vorigen Paragraphen festgestellte Beziehung zwischen den Linienelementen einer Pfaff'schen Gleichung im Raume (x, y, z) und den Linienelementen einer

Monge'schen Gleichung im Raume (X, Y, Z) naturgemäss zu einer Beziehung zwischen den *Flächen* in beiden Räumen führt, und dass bei dieser Zuordnung solchen Flächen, die einander berühren, wiederum Flächen entsprechen, die einander berühren. Es wird unsere Aufgabe sein, dies im gegenwärtigen Paragraphen nachzuweisen.

Dabei müssen wir einige längst bekannte Sätze aus der Theorie der linearen Complexe anwenden, und es erscheint uns angebracht, diese Sätze, um späterhin Störungen zu vermeiden, hier vorauszuschicken.

Recipr. Polaren beim lin. Compl.

Wir erinnern zu diesem Zwecke an den in § 3 des 6. Kap., S. 214, eingeführten Begriff: *reciproke Polaren bei einem vorgelegten linearen Complex.* Der Satz 7 jenes Paragraphen (S. 213) lehrt unmittelbar, wenn wir noch an die Begriffe: Nullebene (S. 212) und Nullpunkt (S. 219) erinnern, die Richtigkeit des Satzes:

Satz 17: *Liegt ein linearer Liniencomplex oder ein Nullsystem vor und sind zwei hinsichtlich desselben reciproke Polaren gegeben, so liegt der Nullpunkt jeder Ebene durch die eine der beiden Polaren auf der anderen Polaren.*

Es sei ferner e_1 eine gegebene Ebene und p_1 ein Punkt in ihr. Der Nullpunkt der Ebene e_1 ist ein Punkt p_2 in e_1, und die Nullebene des Punktes p_1 ist eine Ebene e_2 durch p_1. Die Gerade $(p_1 p_2)$ ist eine Complexgerade, da sie in der Ebene e_1 durch den Nullpunkt p_2 der Ebene geht. Sie geht auch durch p_1. Nun aber liegen alle durch p_1 gehenden Complexgeraden in der Nullebene e_2 von p_1. Also folgt, dass $(p_1 p_2)$ die Schnittlinie der beiden Ebenen e_1 und e_2 ist.

Die Ebene e_1 und der Punkt p_1 in ihr stellen ein *Flächenelement* dar. Ihm wird also durch den linearen Complex ein zweites Flächenelement zugeordnet, nämlich das, dessen Punkt p_2 und dessen Ebene e_2 ist, und wir sehen:

Satz 18: *Liegt ein linearer Complex vor und construiert man zu dem Punkte und zu der Ebene eines Flächenelementes die Nullebene und den Nullpunkt, so bestimmen die letzteren beiden ein zweites Flächenelement, und die Schnittlinie der Ebenen der Elemente ist identisch mit der Verbindenden der Punkte beider Elemente, die überdies eine Complexgerade ist.*

Reciproke Flächenel. b. lin. Compl.

Zwei solche Flächenelemente nennen wir *zu einander reciprok hinsichtlich des linearen Complexes.*

Es sei nun eine nicht-abwickelbare Fläche ω_1 gegeben. Wir construieren in ihren ∞^2 Punkten p_1 die ∞^2 Tangentenebenen e_1. Es sei e_2 die Nullebene von p_1 und p_2 der Nullpunkt von e_1. Nach unserem letzten Satze ist dann jedesmal $(p_1 p_2)$ die Schnittlinie der betreffenden Ebenen e_1, e_2. (Siehe Fig. 81.) Der Ort der ∞^2 Punkte p_2 wird eine neue Fläche ω_2 sein. Jede Tangente t_1 der Fläche ω_1 in p_1 kann als der Schnitt der Ebene e_1 mit einer unendlich benachbarten Tangentenebene aufgefasst werden. Ihre reciproke Polare ist daher die Verbindende des Punktes p_2 mit einem unendlich benachbarten Punkt der Fläche ω_2, also eine Tangente t_2 von ω_2 in p_2. Ferner liegt t_1 in e_1 und geht durch p_1, sodass t_2 durch p_2 geht und in e_2 liegt. Also ist e_2 die Tangentenebene von ω_2 in p_2. Insbesondere ist $(p_1 p_2)$ eine gemeinsame Tangente beider Flächen. Ausserdem ist $(p_1 p_2)$ eine Gerade des Complexes, nach Satz 18. Solcher Geraden giebt es hier ∞^2, entsprechend den ∞^2 Punkten von ω_1. Es hat sich also ergeben:

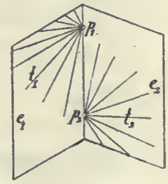

Fig. 81.

Satz 19: *Liegt ausser einem linearen Complex eine nicht-abwickelbare Fläche ω_1 vor, so ist der Ort der Nullpunkte ihrer Tangentenebenen eine zweite Fläche ω_2, deren Tangentenebenen die Nullebenen der Punkte der Fläche ω_1 sind. Die reciproken Polaren der Tangenten der Fläche ω_1 sind die Tangenten der Fläche ω_2. Es giebt ∞^2 Geraden des linearen Complexes, die gemeinsame Tangenten der beiden Flächen sind. Die Beziehung zwischen beiden Flächen ist vollständig umkehrbar.*

Zwei derartige Flächen nennen wir *zu einander reciprok hinsichtlich des linearen Complexes.* Recipr. Fln. b. lin. Compl.

Wir können noch auf einem anderen Wege zu ihnen kommen. Wählen wir nämlich ∞^2 Geraden des linearen Complexes aus, so liegt ein *Strahlensystem* vor, das dem linearen Complex angehört. Strahlen-syst. im lin. Compl.

Früher, in § 4 des 7. Kap., Satz 11, S. 294, haben wir bewiesen, dass auf jedem Strahl eines Strahlensystems mindestens ein Punkt von der Beschaffenheit liegt, dass durch ihn noch ein unendlich benachbarter Strahl des Systems geht. Dieser unendlich benachbarte Strahl wird wieder von einem ihm unendlich benachbarten Strahl geschnitten u. s. w. Man sieht hieraus, dass sich in jedem Strahlensysteme die ∞^2 Strahlen zu ∞^1 abwickelbaren Flächen von je ∞^1 Strahlen zusammenfassen lassen. Die Rückkehrcurven der abwickelbaren Flächen werden im allgemeinen eine Fläche ω_1 erfüllen, die also von allen Strahlen des Systems berührt wird. An der angeführten Stelle sahen wir aber, dass sich zur Bestimmung des Punktes eines Strahles, durch den unendlich benachbarte Strahlen gehen, eine *quadratische* Gleichung ergiebt. Es sind daher im Allgemeinen auf jedem Strahl *zwei* solche Punkte vorhanden. Daher werden sich die ∞^2 Strahlen noch auf eine zweite Weise zu ∞^1 abwickelbaren Flächen zusammenfassen lassen, und die Rückkehrcurven dieser abwickelbaren Flächen werden noch eine Fläche ω_2 bestimmen. (Man vergl. hierzu die Ausführungen auf S. 270, 271 des geschichtlichen Überblicks in § 2 des 7. Kap. sowie Fig. 59 daselbst.) Es gilt daher der

Satz 20: *In einem Strahlensystem lassen sich die Strahlen in zwei Weisen zu je ∞^1 abwickelbaren Flächen zusammenfassen, sodass die Rückkehrcurven der abwickelbaren Flächen zwei Flächen erzeugen und das Strahlensystem aus Geraden besteht, die gemeinsame Tangenten dieser beiden Flächen sind.*

Brennflächen.

Die beiden Flächen ω_1 und ω_2 heissen die *Brennflächen* des Strahlensystems.

Wenn nun das Strahlensystem in unserem linearen Complex enthalten ist, so gehen durch jeden Punkt p_1 von ω_1 zwei unendlich benachbarte Complexgeraden, deren Ebene also die Nullebene e_2 von p_1 ist. Diese Ebene berührt die Fläche ω_2, da die beiden Geraden die Fläche ω_2 berühren. Die Nullebenen der Punkte von ω_1 sind also die Tangentenebenen von ω_2. Ebenso sind die Nullebenen der Punkte von ω_2 die Tangentenebenen von ω_1. Wir finden daher:

Satz 21: *Die beiden Brennflächen eines Strahlensystems, dessen Strahlen einem linearen Complex angehören, sind zu einander reciprok hinsichtlich des linearen Complexes.*

Brenncurven.

Es kann vorkommen, dass sich die Rückkehrcurven der einen Schar (oder beider Scharen) auf Punkte reducieren, sodass die zugehörige Brennfläche eine Curve, eine *Brenncurve*, wird. Wenn sich aber ω_1 auf eine Curve reduciert, so hat ω_1 nur noch ∞^1 Punkte. Also besitzt dann ω_2 nur ∞^1 Tangentenebenen und ist daher eine abwickelbare Fläche. So ergiebt sich, wie wir nicht weiter auszuführen brauchen:

Satz 22: *Liegt ein linearer Complex vor, so ist hinsichtlich des Complexes zu jeder Curve, die keine Complexcurve ist, eine abwickelbare Fläche reciprok, deren Erzeugende dem Complex nicht angehören. Umgekehrt ist zu jeder abwickelbaren Fläche, deren Erzeugende keine Complexgeraden sind, eine Curve reciprok, die keine Complexcurve ist. Zu einer Complexcurve dagegen ist die abwickelbare Fläche ihrer Tangenten reciprok, und umgekehrt.*

Liegen zwei Flächen vor, die einander berühren, so haben sie einen Punkt und in diesem Punkte die Tangentenebene gemein. Die zu ihnen reciproken Flächen haben daher die Nullebene jenes Punktes zur gemeinsamen Tangentenebene und zwar berühren sie diese Ebene in dem Punkte, dessen Nullebene die gemeinsame Tangentenebene der gegebenen Fläche ist. Also:

Satz 23: *Liegt ein linearer Complex vor, so sind zu zwei Flächen, die einander berühren, hinsichtlich des Complexes zwei solche Flächen reciprok, die einander ebenfalls berühren.*

Dies sind die Sätze aus der Theorie der linearen Complexe, die wir in den folgenden Entwickelungen anwenden werden und daher vorausgeschickt haben.

Wegen einer späteren Anwendung wollen wir hier nur noch angeben, wie sich analytisch die Polare zu einer Geraden ergiebt. Die Gerade

$$x = rz + \varrho, \quad y = sz + \sigma \tag{40}$$

hat hinsichtlich des durch die Pfaff'sche Gleichung

$$x\,dy - y\,dx + dz = 0$$

definierten linearen Complexes zur Polaren eine gewisse Gerade:

$$x = r'z + \varrho', \quad y = s'z + \sigma'. \tag{41}$$

Jede Gerade, die einen Punkt der Geraden (40) mit einem Punkt der Geraden (41) verbindet, muss eine Gerade des Complexes sein. Drückt man dies analytisch aus, so findet man, dass zwischen r, s, ϱ, σ und $r', s', \varrho', \sigma'$ einfache Beziehungen bestehen. Benutzt man noch die fünfte Liniencoordinate, setzt man also:

$$\eta \equiv s\varrho - r\sigma, \quad \eta' \equiv s'\varrho' - r'\sigma',$$

so lauten diese Beziehungen zwischen den Liniencoordinaten $r, s, \varrho, \sigma, \eta$ und $r', s', \varrho', \sigma', \eta'$ zweier reciproker Polaren, wie folgt: Anal. Darst. reciproker Polaren.

$$r' = -\frac{r}{\eta}, \quad s' = -\frac{s}{\eta}, \quad \varrho' = -\frac{\varrho}{\eta}, \quad \sigma' = -\frac{\sigma}{\eta}, \quad \eta' = \frac{1}{\eta}. \tag{42}$$

Nunmehr nehmen wir die Betrachtungen des vorigen Paragraphen, die sich auf die Abbildung der beiden Räume (x, y, z) und (X, Y, Z) beziehen, wieder auf, um sie weiter zu führen.

In dem Raume (x, y, z) des linearen Complexes sei eine Fläche ω vorgelegt. Nach § 2 des 6. Kap., S. 193, wird sie von ∞^1 Curven k des linearen Complexes einfach überdeckt. (Siehe Fig. 82.)

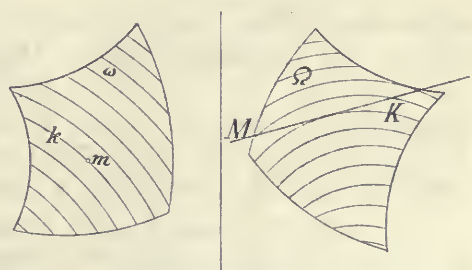

Fig. 82.

Nach Theorem 18 (S. 452) hat jede dieser Curven k als Bildcurve eine Minimalcurve K im Raume (X, Y, Z). Diese ∞^1 Minimalcurven K werden eine Fläche Ω bestimmen. Durchläuft ein Punkt m eine der Curven k auf ω, so umhüllt seine Bildgerade, die eine Minimalgerade M ist, die entsprechende Minimalcurve K auf Ω. Dies gilt auch umgekehrt: Durchläuft ein Punkt eine Curve K auf Ω, so umhüllt seine Bildgerade im Raume (x, y, z) die entsprechende Curve k auf ω.

Zuordng. v. Flächen.

Die ∞^2 Minimalgeraden M, welche die Bilder der Punkte m der Fläche ω sind, stellen ein *Strahlensystem* dar. Die Strahlen berühren die Fläche Ω, die daher eine *Brennfläche* des Strahlensystems ist. Andererseits gehen sie — als Minimalgeraden — sämtlich durch den unendlich fernen Poncelet'schen Kugelkreis im Raume (X, Y, Z). Der Kugelkreis ist daher eine *Brenncurve* des Strahlensystems.

Gehen wir nunmehr von einer beliebigen Fläche Ω im Raume (X, Y, Z) aus (siehe Fig. 83). Sie wird von zwei Scharen von Minimalcurven K_1 und K_2 überdeckt, sodass durch jeden Punkt der Fläche Ω deren zwei gehen. Jede Curve K_1 der einen Schar bildet sich im Raume (x, y, z) als eine Curve k_1 des linearen Complexes ab. Alle diese ∞^1 Curven k_1 erzeugen eine Fläche ω_1 im Raume (x, y, z). Ebenso bilden sich die Minimalcurven K_2 der zweiten Schar als ∞^1 Curven k_2 des linearen Complexes im Raume (x, y, z) ab. Diese ∞^1 Curven k_2 erzeugen ebenfalls eine Fläche ω_2 im Raume (x, y, z). Die beiden Flächen ω_1 und ω_2 sind von einander verschieden, bilden aber, nebenbei bemerkt, im Allgemeinen zusammen eine irreducibele Fläche. Durch jeden Punkt A von Ω geht eine Curve K_1 und eine Curve K_2. Der Punkt A bildet sich im Raume (x, y, z) als eine Gerade a des linearen Complexes ab, und diese Gerade muss die beiden Flächen ω_1 und ω_2 berühren. Da die Fläche Ω insgesamt ∞^2 Punkte A enthält, so ergeben sich im Raume (x, y, z) auch ∞^2 Geraden a des linearen Complexes. Sie bilden ein im linearen Complex enthaltenes *Strahlensystem*, das die Flächen ω_1 und ω_2 zu *Brennflächen* hat. Nach Satz 21 sind also *die Flächen* ω_1 *und* ω_2 *zu einander reciprok hinsichtlich des linearen Complexes.* In A wird Ω von zwei Minimalgeraden M_1 und M_2 berührt. Diese Geraden

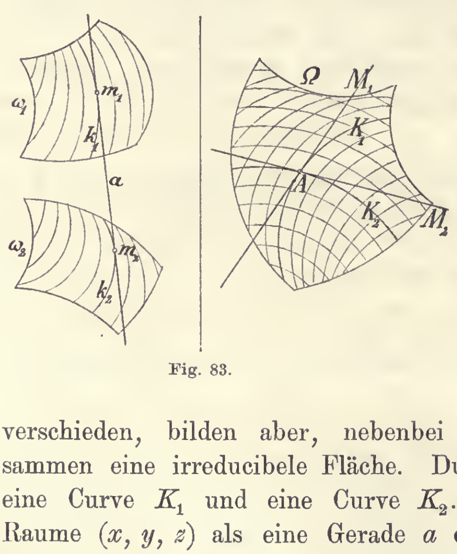

Fig. 83.

bilden sich als die beiden Punkte m_1 und m_2 im Raume (x, y, z) ab, in denen die Gerade a die beiden Flächen ω_1 und ω_2 berührt.

Nun kehren wir noch einmal zu der vorhergehenden Betrachtung zurück, bei der wir eine Fläche im Raume (x, y, z) als gegeben annahmen, die wir jetzt mit ω_1 bezeichnen wollen. Ihr entspricht, wie wir sahen, im Raume (X, Y, Z) eine Fläche Ω derart, dass sich die Curven k_1 des linearen Complexes, die auf ω_1 liegen, als Minimalcurven K_1 auf Ω abbilden. Aber Ω enthält noch eine zweite Schar von Minimalcurven K_2, und ihre Bilder im Raume (x, y, z) sind Curven k_2 des linearen Complexes, die nach dem Vorhergehenden die zur Fläche ω_1 hinsichtlich des linearen Complexes reciproke Fläche ω_2 erzeugen.

Es hat sich also ergeben:

Satz 24: *Durch die im Theorem* 18 *erwähnte Zuordnung wird auch eine Zuordnung von Flächen in den Räumen (x, y, z) und (X, Y, Z) hergestellt, und zwar ist diese Zuordnung ein-zweideutig. Dabei entspricht nämlich je zwei Flächen ω_1 und ω_2, die zu einander hinsichtlich des linearen Complexes im Raume (x, y, z) reciprok sind, eine Fläche Ω im Raume (X, Y, Z) in der Weise, dass sich die beiden Scharen von Curven des linearen Complexes, die auf ω_1 und ω_2 liegen, als die beiden auf Ω gelegenen Scharen von Minimalcurven abbilden. Den Punkten von ω_1 und ω_2 entsprechen die Tangenten dieser beiden Scharen von Minimalcurven, während den Punkten von Ω das Strahlensystem im Raume (x, y, z) entspricht, dessen Brennflächen ω_1 und ω_2 sind und dessen Strahlen dem linearen Complex angehören.*

Wir stellen die einander entsprechenden Gebilde wieder tabellarisch zusammen:

Zusammenstellung.

Raum (x, y, z).	Raum (X, Y, Z).
1) Eine Fläche ω_1 und die hinsichtlich des linearen Complexes reciproke Fläche ω_2.	1) *Eine* Fläche Ω.
2) Complexcurven k_1 auf ω_1.	2) Die eine Schar von Minimalcurven K_1 auf Ω.
3) Complexcurven k_2 auf ω_2.	3) Die andere Schar von Minimalcurven K_2 auf Ω.
4) Punkte von ω_1.	4) Tangenten der Curven K_1.
5) Punkte von ω_2.	5) Tangenten der Curven K_2.
6) Die Complexgeraden, die ω_1 und ω_2 berühren, d. h. die Strahlen des Strahlensystems, dessen Brennflächen ω_1 und ω_2 sind.	6) Die Punkte von Ω.

Wohlbemerkt gestatten diese Ergebnisse in gewissem Sinne noch Ausnahmen. *Ausnahmen.* Es liegt uns hier fern, diese Ausnahmen auf systematischem Wege sämtlich festzustellen, da wir doch im zweiten Bande wieder hierauf zurückkommen. Wir wollen hier aber mehrere sich sofort darbietende Ausnahmefälle besprechen, die ein besonderes Interesse haben.

Regelfl. im lin. Compl.

Nehmen wir einmal an, im Raume (x, y, z) sei eine nicht-abwickelbare Regelfläche vorgelegt, deren Erzeugende a dem linearen Complex angehören (siehe Fig. 84). Die ∞^1 Geraden bilden sich im Raume (X, Y, Z) als ∞^1 Punkte A ab, die eine *Curve* bilden, und diese Curve ist keine Minimalcurve. Andererseits bilden sich die ∞^1 Punkte m einer Geraden a als die ∞^1 Minimalgeraden M ab, die durch den entsprechenden Punkt A gehen. So ergeben sich also im Raume (X, Y, Z) im ganzen ∞^2 Minimalgeraden M, die eine Curve und ausserdem — als Minimalgeraden — den Kugelkreis schneiden. Diese ∞^2 Minimalgeraden bilden also ein *Strahlensystem, das zwei Brenncurven hat.* Die gewählte Regelfläche ist zu sich selbst reciprok hinsichtlich des linearen Complexes. Sucht man umgekehrt zu einem solchen im Raume (X, Y, Z) gegebenen Strahlensystem, dessen eine Brenncurve der Kugelkreis und dessen andere Brenncurve eine beliebig gegebene Curve ist, das entsprechende Gebilde im Raume (x, y, z), so kommt man augenscheinlich zu einer (und nur einer) Regelfläche, deren Erzeugende dem linearen Complex angehören.

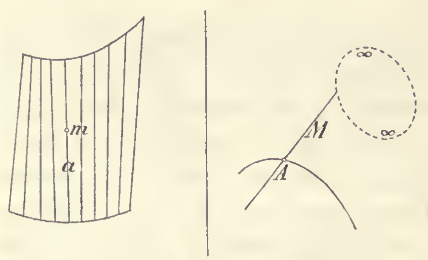

Fig. 84.

Regelfl. v. Minimalgeraden.

Sei ferner im Raume (X, Y, Z) eine *nicht-abwickelbare Regelfläche* Ω *von Minimalgeraden* gegeben. (Siehe Fig. 85.) Sie enthält ausser ∞^1 Minimalgeraden M_1 noch eine Schar von ∞^1 Minimalcurven K. Die ∞^1 Minimal*geraden* M_1 bilden sich im Raume (x, y, z) als Punkte m_1 einer *Curve* ω_1 ab, die keine Curve des linearen Complexes ist, während sich die ∞^1 Minimal*curven* K als ∞^1 Curven k

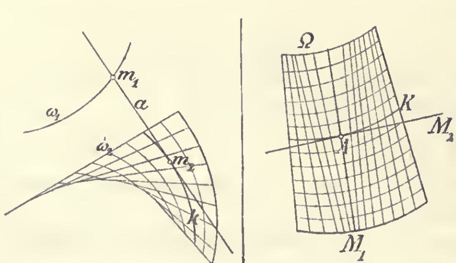

Fig. 85.

des linearen Complexes abbilden, die eine Fläche ω_2 bestimmen. Den Punkten A der Regelfläche entsprechen daher im Raume (x, y, z) solche ∞^2 Complexgeraden a, die eine Curve ω_1 treffen und eine Fläche ω_2 berühren, also die Strahlen eines im linearen Complex enthaltenen *Strahlensystems, dessen eine Brennfläche in eine Brenncurve ausgeartet ist.* Es ist dies ein Specialfall des oben besprochenen allgemeinen Falles, nämlich der, in dem die Fläche ω_1 zu einer Curve degeneriert ist, während die zweite Brennfläche ω_2 eine Fläche geblieben ist. Nach den vorausgeschickten Bemerkungen (Satz 22) ist die Fläche ω_2 zur Curve ω_1 hinsichtlich des linearen Complexes reciprok, also eine abwickelbare Fläche.

Wir haben also folgende besondere Fälle erhalten:

Raum (x, y, z).	Raum (X, Y, Z).
7) Nicht-abwickelbare Regelfläche, deren Erzeugende dem linearen Complex angehören.	7) Curve, die keine Minimalcurve ist.
8) Curve, die keine Complexcurve ist, und die dazu reciproke abwickelbare Fläche.	8) Nicht-abwickelbare Regelfläche, die den Kugelkreis enthält.

Von grösstem Interesse ist nun aber der folgende besondere Fall: Im Raume (X, Y, Z) liege eine *Kugel* vor, die keine Nullkugel sei, also eine Fläche zweiten Grades mit zwei *getrennten* Scharen von Minimalgeraden M_1, M_2. (Siehe Fig. 86 *).) Den Minimalgeraden jeder einzelnen Schar M_1 bez. M_2 entsprechen im Raume (x, y, z) die Punkte zweier Curven g_1, g_2 und den Punkten der Kugel entsprechen die Geraden des linearen Complexes, die g_1 und g_2 treffen. Hier liegt also der besondere Fall vor, dass sich die Flächen ω_1 und ω_2 alle beide auf Curven g_1 und g_2 reducieren. Wiederum sind die Curven g_1 und g_2 zu einander reciprok hinsichtlich des linearen Complexes. Man kann dies direct einsehen und noch mehr erschliessen: Alle von einem Punkte von g_1 ausgehenden Geraden des Complexes liegen in einer Ebene. Da sie alle g_2 treffen müssen, so muss daher g_2 Kugel im Raum (X, Y, Z).

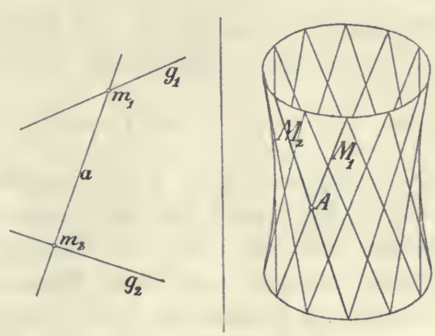

Fig. 86.

*) Wir erinnern hierbei an die zweite Fussnote zu S. 426.

in allen ∞^1 Nullebenen der Punkte von g_1 liegen, d. h. eine *Gerade* sein. Dasselbe gilt von g_1, und die beiden Geraden sind reciproke Polaren. *Also haben wir erkannt, dass sich das Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe, das aus allen Schnittgeraden zweier reciproker Polaren im Raume* (x, y, z) *besteht, im Raume* (X, Y, Z) *als die Gesamtheit der Punkte einer Kugel abbildet.*

Strahlensyst. 1. O. u. 1. Cl. i. lin. Compl.

Anal. Darstellg.

Wir wollen dies wichtige Ergebnis auch analytisch nachweisen und vervollständigen.. Wie wir wissen, stellen die Gleichungen

$$(35)\qquad \begin{cases} X + iY + xZ + z = 0, \\ x(X - iY) - Z - y = 0 \end{cases}$$

in den laufenden Coordinaten x, y, z die Geraden des linearen Complexes dar, wenn X, Y, Z die Rolle von Parametern spielen. Durch die im Raume (x, y, z) beliebig gewählte Gerade g_1 oder

$$(43)\qquad x = rz + \varrho, \quad y = sz + \sigma$$

gehen ∞^2 Geraden des linearen Complexes, und sie bilden ein Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe. Zu diesen ∞^2 Geraden gehören ∞^2 Wertsysteme der Parameter X, Y, Z. Diese ∞^2 Wertsysteme sind also durch *eine* Bedingungsgleichung verknüpft und zwar durch die, die sich durch Elimination von x, y, z aus den vier Gleichungen (35) und (43) ergiebt, also, wie man durch Determinantenbildung erkennt, durch die Gleichung

$$(44)\quad r(X^2 + Y^2 + Z^2) - (s + \varrho)X - i(s - \varrho)Y + (1 + r\sigma - s\varrho)Z + \sigma = 0.$$

Benutzen wir ausser den vier Plücker'schen Liniencoordinaten r, s, ϱ, σ noch die überzählige fünfte $\eta \equiv s\varrho - r\sigma$, so können wir schreiben:

$$(45)\quad \left(X - \frac{\varrho + s}{2r}\right)^2 + \left(Y + i\,\frac{\varrho - s}{2r}\right)^2 + \left(Z - \frac{\eta - 1}{2r}\right)^2 = \left(\frac{\eta + 1}{2r}\right)^2.$$

Nun aber sind X, Y, Z die Coordinaten desjenigen Punktes im Raume (X, Y, Z), dessen Bild die Gerade (35) im Raume (x, y, z) ist. Wir sehen also, dass den ∞^2 Geraden des betrachteten Strahlensystems erster Ordnung und erster Classe im Raume (x, y, z) diejenigen ∞^2 Punkte im Raume (X, Y, Z) entsprechen, die der Gleichung (45) genügen. Diese Gleichung aber ist die einer *Kugel*. Der Mittelpunkt der Kugel hat die Coordinaten:

$$\frac{\varrho + s}{2r}, \quad -i\,\frac{\varrho - s}{2r}, \quad \frac{\eta - 1}{2r},$$

während das Quadrat des Kugelradius gleich

$$\left(\frac{\eta + 1}{2r}\right)^2$$

ist. Man sieht, dass sich die Kugel nicht ändert, wenn man anstelle von $r, s, \varrho, \sigma, \eta$ die Liniencoordinaten der Polaren von (43) setzt, d. h. nach (42), S. 457, die Werte:

$$r' = -\frac{r}{\eta}, \quad s' = -\frac{s}{\eta}, \quad \varrho' = -\frac{\varrho}{\eta}, \quad \sigma' = -\frac{\sigma}{\eta}, \quad \eta' = \frac{1}{\eta}.$$

Daraus können wir schliessen, dass sich dieselbe Kugel ergeben hätte, wenn wir statt von der Geraden g_1 oder (43) von ihrer Polaren g_2 hinsichtlich des linearen Complexes ausgegangen wären. Dies deckt sich mit den vorhergehenden begrifflichen Überlegungen.

Wir sind somit zu dem Ergebnis gelangt:

Theorem 19: *Durch die beiden Gleichungen* Beziehg. zwischen Geraden u. Kugeln.

$$X + iY + xZ + z = 0,$$
$$x(X - iY) - Z - y = 0$$

wird zwischen den Linienelementen, die der Pfaff'schen Gleichung

$$x\,dy - y\,dx + dz = 0$$

im Raume (x, y, z) genügen, und den Linienelementen, die der Monge'schen Gleichung

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = 0$$

im Raume (X, Y, Z) genügen, eine ein-eindeutige Zuordnung hergestellt. Bei ihr wird jedem Punkt (x, y, z) des ersteren Raumes im anderen Raume eine Minimalgerade zugeordnet; andererseits wird jedem Punkte (X, Y, Z) des zweiten Raumes im ersten Raume eine Gerade des durch die Pfaff'sche Gleichung

$$x\,dy - y\,dx + dz = 0$$

definierten linearen Complexes zugeordnet. Den Geraden eines Strahlensystems erster Ordnung und erster Classe, das dem linearen Complex angehört, also allen Geraden des Raumes (x, y, z), die zwei reciproke Polaren:

$$x = rz + \varrho, \quad y = sz + \sigma; \quad x = -\frac{r}{\eta}z - \frac{\varrho}{\eta}, \quad y = -\frac{s}{\eta}z - \frac{\sigma}{\eta}$$
$$(\eta \equiv s\varrho - r\sigma)$$

schneiden, entsprechen dabei die Punkte (X, Y, Z) einer Kugel:

$$\left(X - \frac{\varrho + s}{2r}\right)^2 + \left(Y + i\,\frac{\varrho - s}{2r}\right)^2 + \left(Z - \frac{\eta - 1}{2r}\right)^2 = \left(\frac{\eta + 1}{2r}\right)^2.$$

Den Punkten der beiden reciproken Polaren sind die beiden Scharen von Minimalgeraden auf der Kugel zugeordnet.

Insbesondere können die beiden reciproken Polaren zusammenfallen, was nur dann eintritt, wenn

$$s\varrho - r\sigma + 1 = 0 \quad \text{oder} \quad \eta + 1 = 0$$

ist, d. h. wenn die Geraden in eine Complexgerade hineinrücken. In diesem Falle ist das Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe ein *specielles* (vgl. § 1 des 6. Kap., S. 187). Man kann hier sofort schliessen, dass in diesem Falle die zugeordnete Kugel in eine solche mit nur einer irreducibelen Schar von Minimalgeraden ausartet, d. h. in eine *Nullkugel*. In der That ist die Kugel (45) eine Nullkugel, wenn $\eta + 1 = 0$ ist.

Nullkugel.

Wir stellen wieder die Ergebnisse tabellarisch zusammen:

Zusammenstellung.

Raum (x, y, z).	Raum (X, Y, Z).
9) Die Punkte zweier reciproker Polaren.	9) Die Minimalgeraden einer Kugel.
10) Die Geraden eines dem linearen Complex angehörenden Strahlensystems erster Ordnung und erster Classe.	10) Die Punkte einer Kugel.
Also kurz gesagt:	
11) *Paar von reciproken Polaren.*	11) *Kugel.*
Insbesondere:	
12) Paar von zusammenfallenden reciproken Polaren, d. h. zwei unendlich benachbarte Complexgeraden.	12) Punkt, als Nullkugel aufgefasst.

Bild berühr. Kugeln.

Betrachten wir im Raume (X, Y, Z) *zwei Kugeln, die einander berühren.* Sie haben einen Punkt A und die Tangentenebene in diesem Punkte gemein, also auch eine Minimalgerade M_1, M_2 aus jeder Schar. Da den Minimalgeraden die Punkte der zugeordneten reciproken Polaren im Raume (x, y, z) entsprechen, so folgt, dass die beiden Paare von reciproken Polaren g_1, g_2 und g_1', g_2', deren Bild die beiden Kugeln sind, so liegen, dass die beiden Geraden g_1 und g_1' einander schneiden und ebenso g_2 und g_2'.

Schar v. Kugeln.

Betrachten wir überhaupt *alle* ∞^1 *Kugeln im Raume* (X, Y, Z), *die im Punkte A eine gemeinsame Tangentenebene haben*, also auch zwei gemeinsame Minimalgeraden M_1 und M_2, und zwar eine aus jeder Schar, haben.

Dem Punkt A entspricht im Raume (x, y, z) eine Gerade a des linearen Complexes, während M_1 und M_2 die Bilder zweier Punkte m_1 und m_2 auf a sind. (Siehe Fig. 87, S. 465.) Jeder einzelnen Kugel entspricht ein Paar reciproker Polaren g_1, g_2, sodass den Minimalgeraden der Kugel die Punkte von g_1 und g_2 entsprechen. Da m_1 und m_2

die Bilder zweier Minimalgeraden sind, so folgt, dass g_1 etwa den Punkt m_1 und folglich g_2 den Punkt m_2 enthält. Wenn umgekehrt g_1 und g_2 zwei reciproke Polaren sind, deren eine m_1, deren andere m_2 enthält, so entspricht ihnen im Raume (X, Y, Z) eine Kugel, welche die beiden Minimalgeraden M_1 und M_2 enthält, also eine jener ∞^1 Kugeln.

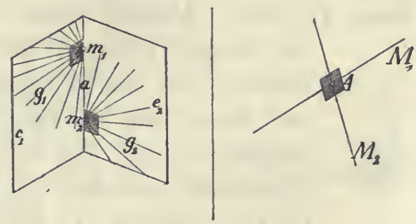

Fig. 87.

Um also die Bilder aller ∞^1 Kugeln zu erhalten, haben wir alle die Geraden g_1 durch m_1 zu ziehen, deren reciproke Polaren g_2 durch m_2 gehen. Um dies zu thun, construieren wir zunächst die Nullebenen e_2 und e_1 *) der Punkte m_1 und m_2. Sie enthalten die Complexgerade a. Ferner muss g_1 in e_1 liegen, da alle von m_2 ausgehenden Complexgeraden einerseits in e_1 liegen und andererseits g_1 schneiden sollen. Ebenso muss g_2 in e_2 liegen. Umgekehrt ist klar, dass eine Gerade g_1, die durch m_1 geht und in der Nullebene e_1 von m_2 liegt, zur reciproken Polaren eine Gerade g_2 hat, die durch m_2 geht und in der Nullebene e_2 von m_1 liegt.

Man sieht also, dass sich die ∞^1 Kugeln als die ∞^1 Paare von reciproken Polaren g_1, g_2 abbilden, von denen die ∞^1 Geraden g_1 das Büschel in e_1 mit dem Scheitel m_1 bilden, während die ∞^1 Geraden g_2 das Büschel in e_2 mit dem Scheitel m_2 bilden. Also:

Satz 25: *Bei der im Theorem 19 besprochenen Zuordnung entsprechen den ∞^1 Kugeln, die im Raume (X, Y, Z) einen Punkt und seine Tangentenebene, also zwei Minimalgeraden M_1 und M_2 gemein haben, ∞^1 Paare von reciproken Polaren g_1, g_2 im Raume (x, y, z), von denen die Geraden g_1 sowie die Geraden g_2 je ein Büschel bilden. Sind die Punkte m_1 und m_2 die Bilder der Minimalgeraden M_1 und M_2, so liegt das Büschel (g_1) in der Nullebene von m_2 und hat den Scheitel m_1, während das Büschel (g_2) in der Nullebene von m_1 liegt und m_2 zum Scheitel hat.*

Alle ∞^1 Kugeln im Raume (X, Y, Z), die einen Punkt A und in diesem Punkte eine Tangentenebene (M_1, M_2) gemein haben, haben ein *Flächenelement* gemein, nämlich das durch den Punkt A und die Tangentenebene definierte Element. Überdies gehört jede Kugel, die dieses Flächenelement enthält, zu den betrachteten ∞^1 Kugeln. Kugeln m. gemeins. Flächenelem.

*) Wir wählen die Bezeichnungen absichtlich so wie auf S. 454.

Wir führen nun die Redeweise ein: *Eine Gerade g gehört einem Flächenelement an*, oder auch umgekehrt: *ein Flächenelement gehört einer Geraden g an*, wenn die Gerade g durch den Punkt m des Flächenelementes geht und in der Ebene e des Flächenelementes liegt. (Siehe Fig. 88.) Alsdann sehen wir: Jene ∞^1 Kugeln bilden sich im Raume (x, y, z) als ∞^1 Geradenpaare g_1, g_2 ab und zwar so, dass die ∞^1 Geraden g_1 einem Flächenelement (m_1, e_1) und die anderen ∞^1 Geraden g_2 einem Flächenelement (m_2, e_2) angehören (vgl. Fig. 87). Hiermit ist ein *ein-zweideutiges Entsprechen zwischen den Flächenelementen der beiden Räume* (x, y, z) und (X, Y, Z) hergestellt.

Zuordng. zwischen Flächen-elementen.

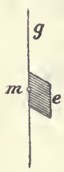

Fig. 88.

Denn einesteils haben wir soeben zu einem Flächenelement im Raume (X, Y, Z) *zwei* Flächenelemente im Raume (x, y, z) construiert und zwar zwei Flächenelemente, die hinsichtlich des linearen Complexes zu einander reciprok sind. Andernteils können wir auch von einem beliebigen Flächenelement im Raume (x, y, z) ausgehen, dessen Punkt m_1 und dessen Ebene e_1 sei. Wir betrachten nämlich die ∞^1 Geraden g_1, die diesem Flächenelement angehören, und construieren ihre ∞^1 reciproken Polaren g_2 hinsichtlich des linearen Complexes. Wir wissen, dass sie dem Flächenelement angehören, das zu dem gegebenen Element hinsichtlich des linearen Complexes reciprok ist. Sein Punkt sei m_2 und seine Ebene e_2. Jedem Paar g_1, g_2 von reciproken Polaren entspricht nun im Raume (X, Y, Z) eine Kugel. Der Geraden $(m_1 m_2)$ oder a, die dem linearen Complex angehört, entspricht ein Punkt A der Kugel, und den Punkten m_1, m_2 entsprechen die durch diesen Kugelpunkt A gehenden Minimalgeraden M_1, M_2 auf der Kugel. Die ∞^2 Kugeln, die den ∞^1 Geradenpaaren g_1, g_2 entsprechen, haben daher im Punkte A ein Flächenelement gemein. Den beiden zu einander reciproken Flächenelementen (m_1, e_1), (m_2, e_2) des Raumes (x, y, z) ist hiermit *ein* Flächenelement des Raumes (X, Y, Z) in ganz bestimmter Weise zugeordnet.

Die hiermit hergestellte ein-zweideutige Zuordnung zwischen den Flächenelementen der beiden Räume (x, y, z) und (X, Y, Z) ist also so beschaffen, *dass allen ∞^2 Flächenelementen einer Kugel diejenigen ∞^2 Paare von reciproken Flächenelementen im Raume (x, y, z) entsprechen, die aus den ∞^2 Flächenelementen, die einer Geraden g_1 angehören, und aus den ∞^2 Flächenelementen, die der Polaren g_2 von g_1 angehören, gebildet werden können.*

Anal. Darst. d. Zuordng. v. Flächen-elem.

Wir wollen nun diese Zuordnung zwischen den Flächenelementen auch analytisch herstellen. Dazu bedarf es einiger Vorbemerkungen: Im Raume (x, y, z) verstehen wir unter (x, y, z, p, q) dasjenige Flächenelement, dessen Punkt der

Punkt (x, y, z) ist und dessen Ebene Richtungscosinus proportional $p, q, -1$ hat. (Vgl. § 1 des 7. Kap., S. 258.) Entsprechend verstehen wir unter X, Y, Z, P, Q die Coordinaten eines Flächenelementes im Raume (X, Y, Z).

Zunächst wollen wir feststellen, welches Flächenelement (x', y', z', p', q') zu einem Flächenelement (x, y, z, p, q) hinsichtlich des linearen Complexes reciprok ist. Da die Gleichung

$$x\,dy - y\,dx + dz = 0$$

den linearen Complex definiert, so hat die Nullebene des Punktes (x, y, z) in den laufenden Coordinaten x', y', z' die Gleichung:

$$xy' - yx' - z + z' = 0. \tag{46}$$

(Vgl. S. 229, 230, § 3 des 6. Kap.) Diese Ebene ist nun die des reciproken Flächenelementes (x', y', z', p', q'), sodass

$$p' = y, \quad q' = -x$$

ist. Ebenso ist

$$p = y', \quad q = -x'.$$

Setzen wir diese Werte in (46) ein, so ergiebt sich

$$z' = z - xp - yq.$$

Also wird *das zum Flächenelement* (x, y, z, p, q) *hinsichtlich des linearen Complexes reciproke Element* (x', y', z', p', q') *gegeben durch die Gleichungen:* Reciproke Flächenelem.

$$x' = -q, \quad y' = p, \quad z' = z - xp - yq, \quad p' = y, \quad q' = -x. \tag{47}$$

Nach dieser Vorbemerkung betrachten wir eine Gerade g_1 des Raumes (x, y, z). Es seien in den laufenden Coordinaten x_1, y_1, z_1:

$$x_1 = rz_1 + \varrho, \quad y_1 = sz_1 + \sigma \tag{48}$$

ihre Gleichungen. Diese Gerade gehört dem Flächenelement (x, y, z, p, q) an, wenn die Gerade den Punkt (x, y, z) enthält und in der Ebene

$$z_1 - z - p(x_1 - x) - q(y_1 - y) = 0$$

des Elementes liegt, d. h. wenn:

$$x = rz + \varrho, \quad y = sz + \sigma, \quad 1 - pr - qs = 0 \tag{49}$$

ist. Die Gerade (48) oder (r, s, ϱ, σ) gehört also dem Flächenelement (x, y, z, p, q) dann und nur dann an, wenn die Gleichungen (49) oder

$$pr + qs = 1, \quad \varrho = x - rz, \quad \sigma = y - sz \tag{49'}$$

bestehen. Zu dieser Geraden und ihrer reciproken Polaren gehört nun im Raume (X, Y, Z) eine Kugel, deren Gleichung wir auf S. 462 unter (44) aufstellten. Setzen wir in dieser Gleichung für ϱ, σ ihre Werte aus (49′) ein, so kommt:

$$\begin{gathered} r(X^2 + Y^2 + Z^2) - (s + x - rz)X - i(s - x + rz)Y + \\ + (1 - sx + ry)Z + y - sz = 0. \end{gathered} \tag{50}$$

Wenn wir hierin r, s irgendwie so wählen, dass sie der noch zu erfüllenden ersten Gleichung (49′), d. h. der Gleichung

$$pr + qs = 1 \tag{51}$$

genügen, so stellt die Gleichung (50) eine der ∞^1 Kugeln dar, die den ∞^1 Geraden g_1 des Flächenelementes (x, y, z, p, q) im Raume (X, Y, Z) entsprechen. Da die Parameter r, s an die *lineare* Gleichung (51) gebunden sind, so folgt, dass die Gleichung (50) eine *lineare Kugelschar*, ein *Kugelbüschel* darstellt. Die Bedingung (51) wird insbesondere durch die Annahme

$$r = 0, \quad s = \frac{1}{q}$$

erfüllt. Setzen wir diese Werte in (50) ein, so geht die *Ebene* hervor:

$$(xq+1)X - i(xq-1)Y + (x-q)Z + z - yq = 0. \tag{52}$$

Diese Ebene berührt nun alle ∞^1 Kugeln (50) in einem Punkte. Es genügt, dies für nur eine der Kugeln zu beweisen, etwa für die Kugel, die bei der (51) erfüllenden Annahme

$$r = \frac{1}{p}, \quad s = 0$$

hervorgeht:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + (z - xp)X - i(z - xp)Y + (y+p)Z + yp = 0.$$

Der Berührpunkt ist, wie man leicht ausrechnen kann, der Punkt:

$$\left\{\begin{aligned} X &= -\frac{z}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{x(xp+yq)+y-p}{q+x}, \\ Y &= \frac{iz}{2} - \frac{i}{2}\,\frac{x(xp+yq)-y+p}{q+x}, \\ Z &= -\frac{xp+yq}{q+x}. \end{aligned}\right. \tag{53}$$

Die ∞^1 Kugeln haben folglich das Flächenelement (X, Y, Z, P, Q) gemein, dessen Punkt der durch (53) gegebene Punkt ist, während die Gleichung (52) seine Ebene darstellt. P, Q und -1 sind also den Richtungscosinus dieser Ebene proportional, sodass kommt:

$$P = \frac{xq+1}{q-x}, \quad Q = -i\,\frac{xq-1}{q-x}. \tag{54}$$

Die fünf Gleichungen (53) *und* (54) *bestimmen das Flächenelement* (X, Y, Z, P, Q), *das dem Flächenelement* (x, y, z, p, q) *entspricht.*

Zu dem Flächenelement (x, y, z, p, q) ist nun dasjenige Element (x', y', z', p', q') reciprok, dessen Coordinaten durch die Gleichungen (47) gegeben werden. Setzt man diese Werte x', y', z', p', q' anstelle von x, y, z, p, q in (53) und (54) ein, so findet man, dass sich X, Y, Z, P, Q genau so darstellen wie vorher. Das Flächenelement (X, Y, Z, P, Q), das durch (53) und (54) gegeben ist, ist also nicht nur dem Flächenelement (x, y, z, p, q), sondern auch demjenigen Flächenelement (x', y', z', p', q') zugeordnet, das zu dem Element (x, y, z, p, q) hinsichtlich des linearen Complexes reciprok ist. Die Gleichungen (53) und (54) lassen sich auch nach x, y, z, p, q auflösen. Diese Auflösung ist zweideutig. Sie giebt eben zwei zu einander hinsichtlich des linearen Complexes reciproke Flächenelemente.

Hiermit ist die ein-zweideutige Beziehung zwischen den Flächenelementen der beiden Räume (x, y, z) und (X, Y, Z) vollkommen auch analytisch abgeleitet.

Die ein-zweideutige Zuordnung von Flächenelementen, die wir im Vorhergehenden kennen gelernt haben, ordnet, wie wir schon hervorgehoben, allen Flächenelementen, die zwei reciproken Polaren des Raumes (x, y, z) angehören, alle Flächenelemente einer Kugel des Raumes (X, Y, Z) zu.

Flächenelem. einer belieb. Fläche.

Wir wollen nun die *Flächenelemente einer beliebigen Fläche* Ω *im Raume* (X, Y, Z) betrachten. Die Fläche hat ∞^2 Flächenelemente. Nun haben wir schon früher gesehen, dass wir der Fläche Ω im Raume (x, y, z) zwei zu einander reciproke Flächen ω_1 und ω_2 zuordnen können. Andererseits haben wir den ∞^2 Flächenelementen von Ω zwei Scharen von ∞^2 paarweis reciproken Flächenelementen im Raume (x, y, z) zugeordnet. Wir werden jetzt zeigen, dass sich diese beiden Scharen von je ∞^2 Flächenelementen im Raume (x, y, z) in zwei Flächen anordnen und zwar gerade in jene beiden Flächen ω_1 und ω_2, die uns die früher untersuchte Zuordnung lieferte, sodass die frühere Zuordnung mit der jetzigen übereinstimmt.

Zu diesem Zweck seien wieder auf der Fläche Ω ihre beiden Scharen von je ∞^1 Minimalcurven K_1 und K_2 construiert. (Siehe Fig. 89.) Ihnen entsprechen, wie wir früher sahen, auf den Flächen ω_1 und ω_2 die Curven k_1 und k_2 des linearen Complexes. Im Punkte A von Ω legen wir die Tangenten M_1 und M_2 an die hindurchgehenden Minimalcurven K_1 und K_2. M_1 und M_2 sind Minimalgeraden. Die Linienelemente von K_1 und K_2 in A bilden sich im Raume (x, y, z), wie wir wissen (vgl. S. 451), als Linienelemente zweier Curven k_1 und k_2 ab, nämlich als die Linienelemente, die eine gemeinsame Tangente a von k_1 und k_2 auf diesen Curven bestimmt. Die Gerade a des linearen Complexes ist das Bild des Punktes A. Es seien m_1 und m_2 die Berührpunkte von a mit k_1 und k_2; dann sind m_1 und m_2 die Bilder der Minimalgeraden M_1 und M_2. Wir wissen von früher her, dass die Flächen ω_1 und ω_2 zu einander reciprok sind und dass insbesondere ihre Flächenelemente an den Stellen m_1 und m_2 zu einander reciprok sind. Die Nullebene e_2 von m_1 ist also die Tangentenebene in m_2 und die Nullebene e_1 von m_2 die Tangentenebene in m_1. In der Tangentenebene e_1 des Punktes m_1 liegen ∞^1 Tangenten g_1 von ω_1 und in der Tangentenebene e_2 des Punktes m_2 die ∞^1 Polaren g_2 der g_1 als Tangenten von ω_2. Nun aber besteht das Bild des Flächenelementes, das Ω in A hat, nach dem Früheren gerade aus den beiden Flächenelementen, die durch die beiden Büschel g_1 und g_2 bestimmt werden, also aus den beiden Flächenelementen von ω_1 und ω_2 in m_1 bez. m_2.

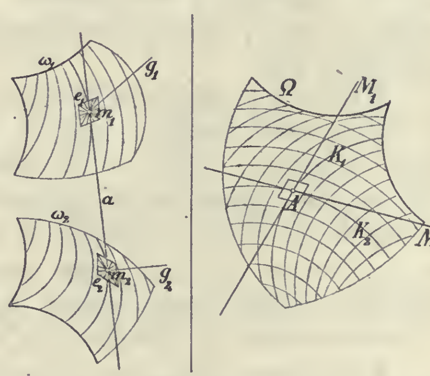

Fig. 89.

Die Flächenelemente von Ω bilden sich also im Raume (x, y, z) in der That als die zu einander reciproken Flächenelemente zweier Flächen, nämlich der beiden Flächen ω_1 und ω_2, ab.

Hieraus folgt, dass umgekehrt die ∞^2 Paare von reciproken Flächenelementen, die in zwei zu einander reciproken Flächen ω_1 und ω_2 im Raume (x, y, z) enthalten sind, im anderen Raume (X, Y, Z) als die ∞^2 Flächenelemente derjenigen Fläche Ω abgebildet werden, die dem Flächenpaar ω_1, ω_2 nach dem Früheren entspricht. Denn wir brauchen ja nur die soeben angestellte Betrachtung auf diese Fläche Ω anzuwenden, wodurch wir eben von den Flächenelementen von Ω wieder zu denen von ω_1 und ω_2 gelangen.

Hieraus können wir noch mehr schliessen:

Liegen im Raume (X, Y, Z) *zwei* Flächen Ω und Ω' vor, die einander berühren, also in einem Punkte A ein Flächenelement gemein haben, und construieren wir im Raume (x, y, z) die Paare zu einander reciproker Flächen ω_1, ω_2 und ω_1', ω_2', die den Flächen Ω und Ω' zugeordnet sind, so berühren ω_1 und ω_1' einander in dem einen und ω_2 und ω_2' einander in dem anderen der beiden Flächenelemente des Raumes (x, y, z), die dem gemeinsamen Flächenelemente von Ω und Ω' zugeordnet sind.

Wählen wir umgekehrt im Raume (x, y, z) zwei Flächen ω_1 und ω_1', die einander berühren, also ein Flächenelement gemein haben, so folgt unmittelbar, dass die zu ihnen reciproken Flächen ω_2 und ω_2' das reciproke Flächenelement gemein haben (vgl. Satz 23). Nun sind ω_1 und ω_2 das Bild einer Fläche Ω sowie ω_1' und ω_2' das einer Fläche Ω' des Raumes (X, Y, Z), und man schliesst sofort, dass Ω und Ω' dasjenige Flächenelement gemein haben, das den beiden erwähnten Flächenelementen des Raumes (x, y, z) im Raume (X, Y, Z) entspricht.

Berührd. Flächen.

Kurz gesagt: *Bei unserer Zuordnung zwischen den beiden Räumen bilden sich einander berührende Flächen als ebensolche ab.*

Der Fall der Berührung zwischen einer Fläche Ω und einer Kugel im Raume (X, Y, Z) ist hierbei besonders zu erwähnen. Einer Kugel, welche die Fläche Ω in A berührt, entspricht im Raume (x, y, z) ein Paar reciproker Polaren g_1 und g_2, von denen die eine die Fläche ω_1 in m_1, die andere die Fläche ω_2 in m_2 berührt (siehe Fig. 89, S. 469).

Betrachten wir andererseits eine Fläche ω_1 im Raume (x, y, z) und eine Tangente g_1 der Fläche, so erhalten wir als Bild im Raume (X, Y, Z) eine Fläche Ω und eine sie berührende Kugel.

Fassen wir das Gefundene nun in einem Satze zusammen:

Satz 26: *Bei der in Theorem* 19 *ausgesprochenen Zuordnung zwischen den beiden Räumen* (x, y, z) *und* (X, Y, Z) *entspricht jedem Paar von Flächenelementen, die im Raume* (x, y, z) *zu einander hinsichtlich des linearen Complexes reciprok sind, ein Flächenelement im Raume* (X, Y, Z)*. Allen Flächenelementen einer Fläche* ω_1 *des Raumes* (x, y, z) *und der* *reciproken Fläche ω_2 sind dabei die Flächenelemente derjenigen Fläche Ω des Raumes (X, Y, Z) zugeordnet, die dem Flächenpaar ω_1, ω_2 nach Satz 24 entspricht. Wenn im Raume (x, y, z) zwei Flächen ω_1, ω_1' und also auch die zu ihnen reciproken Flächen ω_2, ω_2' einander berühren, so gilt dasselbe von den zugeordneten Flächen Ω und Ω' im Raume (X, Y, Z). Wenn im Raume (X, Y, Z) zwei Flächen Ω und Ω' einander berühren, und wenn der Fläche Ω im Raume (x, y, z) das Flächenpaar ω_1, ω_2 und der Fläche Ω' das Flächenpaar ω_1', ω_2' entspricht, so berühren auch ω_1 und ω_1' einander sowie ω_2 und ω_2'. Den paarweis zu einander hinsichtlich des linearen Complexes reciproken Tangenten zweier reciproker Flächen ω_1 und ω_2 im Raume (x, y, z) entsprechen im Raume (X, Y, Z) die Kugeln, welche die zu ω_1 und ω_2 zugeordnete Fläche Ω berühren.*

Ist im Raume (x, y, z) eine Regelfläche beliebiger Art gegeben, so enthalten ihre Tangentenebenen längs einer Erzeugenden jedesmal die Erzeugende selbst. Die Regelfläche hat daher ∞^1 Flächenelemente, die zugleich einer Erzeugenden angehören. Jeder Erzeugenden entspricht im Raume (X, Y, Z) eine Kugel. Der Regelfläche entspricht demnach im Raume (X, Y, Z) eine Fläche, die zu einer Schar von ∞^1 Kugeln in der Beziehung steht, dass sie mit jeder dieser Kugeln ∞^1 Flächenelemente gemein hat. Sie ist daher die Umhüllende dieser ∞^1 Kugeln. **Besondere Fälle.**

Eine Regelfläche des Raumes (x, y, z) bildet sich also im Raume (X, Y, Z) im allgemeinen als die Umhüllende einer Schar von ∞^1 Kugeln ab.

Insbesondere sind die *Flächen zweiten Grades* diejenigen, die in zwei Weisen als Regelflächen aufgefasst werden können. *Einer Fläche zweiten Grades im Raume (x, y, z) ist mithin im Raume (X, Y, Z) eine Fläche zugeordnet, die in zwei Weisen als Umhüllende von je ∞^1 Kugeln erzeugt werden kann.* Eine derartige Fläche heisst bekanntlich eine *Cyklide* oder auch genauer eine *Dupin'sche Cyklide.* **Fläche zweiten Grades.** **Dupin'sche Cyklide.**

Wiederum wollen wir die bis jetzt besprochenen, einander zugeordneten Gebilde in einer Tabelle zusammenstellen. **Zusammenstellg. entspr. Gebilde.**

Raum (x, y, z).	Raum (X, Y, Z).
13) Zwei zu einander reciproke Flächenelemente.	13) Ein Flächenelement.
14) Die Flächenelemente zweier reciproker Flächen.	14) Die Flächenelemente einer Fläche.
15) Zwei einander berührende Flächen sowie die reciproken ebenfalls einander berührenden Flächen.	15) Zwei einander berührende Flächen.

Raum (x, y, z).	Raum (X, Y, Z).
16) Die Flächenelemente einer Geraden und ihrer reciproken Polaren.	16) Die Flächenelemente einer Kugel.
17) Eine Fläche mit ihren Tangenten sowie die reciproke Fläche mit ihren Tangenten.	17) Eine Fläche mit allen Kugeln, die sie berühren.
18) Regelfläche und die zu ihr reciproke Regelfläche.	18) Umhüllende von ∞^1 Kugeln.
19) Fläche zweiten Grades und die zu ihr reciproke Fläche zweiten Grades.	19) Dupin'sche Cyklide.

In der Geometrie der Flächenelemente kann man die Begriffe: *Haupttangentencurven* und *Krümmungslinien* von Flächen in folgender Weise einführen:

Haupttg.-curve. Längs einer *Haupttangentencurve* schneiden die Tangentenebenen in unmittelbar benachbarten Punkten einander in der Tangente der Curve, d. h. zwei unmittelbar benachbarte Flächenelemente der Fläche, deren Punkte auf einer Haupttangentencurve liegen, haben die Eigenschaft, dass ihre Ebenen die Gerade gemein haben, die ihre Punkte verbindet. Diese beiden Flächenelemente gehören also beide einer gemeinsamen Geraden an. *Die ∞^1 längs einer Haupttangentencurve gelegenen Flächenelemente der Fläche bilden somit einen Streifen, in dem je zwei consecutive Elemente einer Geraden angehören.*

Wir wollen zeigen, dass sich diese begriffliche Definition vollkommen mit der analytischen deckt:

Sind x, y, z, p, q die Coordinaten der Flächenelemente längs einer Haupttangentencurve, so werden sie Functionen eines Parameters sein. Nun giebt

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0 \tag{55}$$

alle Fortschreitungsrichtungen $(dx : dy : dz)$ in der Ebene des Elementes (x, y, z, p, q). Zu ihnen muss die vom Punkte (x, y, z) zum Punkte $(x + dx, y + dy, z + dz)$ des benachbarten Elementes gehören. Ferner soll diese Richtung auch in der Ebene des benachbarten Elementes liegen, d. h. die vorhergehende Gleichung soll auch dann bestehen, wenn in ihr für p und q die Werte $p + dp$, $q + dq$ gesetzt werden. Dies liefert die durch Differentiation hervorgehende Bedingung:

$$dp\,dx + dq\,dy = 0. \tag{56}$$

Die Gleichung (56) *ist also charakteristisch für die Flächenelemente einer Haupttangentencurve.* In der That folgt aus dieser Gleichung die gewöhnliche Form der Differentialgleichung der Haupttangentencurven, wenn man

$$dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy$$

setzt.

Die ∞^1 Flächenelemente längs einer *Krümmungslinie* einer Fläche können wir charakterisieren als *solche Elemente der Fläche, von denen je zwei benachbarte einer Kugel angehören.* Dass sich diese begriffliche Definition in der That mit der analytischen deckt, erkennen wir so: Ist die Fläche im Raume (X, Y, Z) vorgelegt, so werden die Coordinaten X, Y, Z, P, Q ihrer Flächenelemente längs einer Krümmungslinie Functionen eines Parameters sein. Sollen zwei consecutive Elemente (X, Y, Z, P, Q) und $(X + dX,\ Y + dY,\ Z + dZ,\ P + dP,\ Q + dQ)$ einer Kugel angehören, so ist dazu notwendig und hinreichend, dass die in den Punkten der Flächenelemente auf ihre Ebenen errichteten Lote einander schneiden. Nun sind Krümmungslinie.

$$\mathfrak{x} = X + tP, \quad \mathfrak{y} = Y + tQ, \quad \mathfrak{z} = Z - t$$

die laufenden Coordinaten auf der ersten Normalen, ausgedrückt durch einen Parameter t. Diese Normale wird die unmittelbar benachbarte schneiden, wenn es Werte von t und dt giebt, für die die Differentiale der vorstehenden Ausdrücke Null sind, d. h. für die

$$\begin{aligned} dX + P\,dt + t\,dP &= 0, \\ dY + Q\,dt + t\,dQ &= 0, \\ dZ - \quad dt \qquad &= 0 \end{aligned}$$

ist. Elimination von t und dt giebt also die Bedingung:

$$(dX + P\,dZ)\,dQ - (dY + Q\,dZ)\,dP = 0$$

als charakteristisch für die Schar der Flächenelemente längs einer Krümmungslinie. Dies giebt in der That, wenn man

$$dP = R\,dX + S\,dY, \quad dQ = S\,dX + T\,dY$$

und

$$dZ = P\,dX + Q\,dY$$

einsetzt, die Differentialgleichung der Krümmungslinien in der gewöhnlich angewandten Form.

Es können also die Haupttangentencurven und Krümmungslinien in der hier angegebenen begrifflichen Weise mit Hülfe der Flächenelemente längs dieser Curven charakterisiert werden.

Nun sei eine Fläche ω_1 im Raume (x, y, z) und auf ihr eine *Haupttangentencurve* c_1 vorgelegt. Längs der Haupttangentencurve gehören zwei consecutive Flächenelemente derselben Geraden g_1 an. Die Fläche ω_1 bildet sich im Raume (X, Y, Z) als eine Fläche Ω ab, die Flächenelemente längs c_1 bilden sich als Flächenelemente längs einer Curve C auf Ω ab. Jede Gerade g_1 endlich bildet sich als eine Kugel ab. Somit folgt, dass zwei consecutive Flächenelemente längs C stets auf einer Kugel liegen, d. h. die Curve C ist eine *Krümmungslinie* der Fläche Ω.

Beziehg. zw. Haupttgc. u. Krümmgsl.

Liegt umgekehrt eine Fläche Ω im Raume (X, Y, Z) und auf ihr eine Krümmungslinie C vor, so wird sich Ω im Raume (x, y, z) als ein Paar reciproker Flächen ω_1, ω_2 abbilden. Die ∞^1 Flächenelemente längs C bilden sich dabei als je ∞^1 Flächelemente auf ω_1 bez. ω_2 ab, und diese bestimmen also zwei Curven c_1 und c_2 auf ω_1 bez. ω_2. Da C Krümmungslinie auf Ω ist, so liegen consecutive Flächenelemente längs C jedesmal auf einer Ω berührenden Kugel. Diese Kugel bildet sich als ein Paar reciproker Polaren g_1, g_2 im Raume (x, y, z) ab, von denen g_1 die Fläche ω_1 in einem Punkte von c_1 und g_2 die Fläche ω_2 in einem Punkte von c_2 berührt. Die betrachteten beiden consecutiven Flächenelemente bilden sich daher als zwei consecutive Paare von reciproken Flächenelementen von ω_1 und ω_2 ab, sodass die beiden consecutiven Elemente von ω_1 längs c_1 liegen und der Geraden g_1 angehören, ebenso wie die zu ihnen reciproken längs c_2 liegen und der Geraden g_2 angehören. Hieraus folgt, dass c_1 und c_2 Haupttangentencurven auf ω_1 bez. ω_2 sind. Diese beiden Haupttangentencurven sind zu einander hinsichtlich des linearen Complexes reciprok, in dem Sinne, dass die Tangenten der einen zu denen der anderen reciprok sind.

Wir sind so zu dem wichtigen Ergebnis gekommen:

Theorem üb. Abb. d. Haupttgc. als Krümmgsl.

Theorem 20: *Es lassen sich die Flächenelemente zweier Räume (x, y, z), (X, Y, Z) in ein-zweideutiger Weise so einander zuordnen, dass jedem Flächenelement des ersteren Raumes sowie dem zu ihm hinsichtlich eines gewissen linearen Liniencomplexes reciproken Flächenelement ein Flächenelement des Raumes (X, Y, Z) entspricht. Hierbei wird jeder Fläche ω_1 des ersteren Raumes zusammen mit der zu ihr hinsichtlich des Complexes reciproken Fläche ω_2 eine Fläche Ω des Raumes (X, Y, Z) zugeordnet, sodass Berührung in Berührung übergeht. Jeder Haupttangentencurve der Fläche ω_1 zusammen mit der reciproken Haupttangentencurve auf ω_2 ist dabei eine Krümmungslinie der Fläche Ω zugeordnet.*

Wir können also zu unseren tabellarischen Zusammenstellungen noch folgenden Zusatz machen:

Raum (x, y, z).	Raum (X, Y, Z).
20) *Haupttangentencurven* einer Fläche und ihrer reciproken Fläche.	20) *Krümmungslinien* einer Fläche.
21) Haupttangente einer Fläche und die reciproke Haupttangente der reciproken Fläche.	21) Kugel, die mit einer Fläche zwei consecutive Flächenelemente gemein hat (Krümmungskugel).
22) Die Geraden einer Regelfläche als Haupttangentencurven.	22) Die Kreise der Umhüllenden einer Kugelschar als Krümmungslinien.
23) Die Geraden einer Fläche zweiten Grades als Haupttangentencurven.	23) Die Kreise einer Dupin'schen Cyklide als Krümmungslinien.

§ 5. Vereine von Linienelementen im Raume.

Als Anhang zum zweiten Abschnitt mögen hier einige Bemerkungen zusammengestellt werden, zu deren Erwähnung wir bisher noch nicht Gelegenheit gefunden haben.

Wir haben schon längst den Begriff: *Linienelement* im Raume (x, y, z) eingeführt, nämlich den Inbegriff eines Punktes (x, y, z) und einer durch ihn gehenden Geraden. Wenn x, y, z beim Fortschreiten des Punktes auf der Geraden die Incremente dx, dy, dz erfahren, so bezeichnen wir x, y, z sowie die Verhältnisse von dx, dy, dz als die *Coordinaten des Linienelementes.* Indem wir, zur Vermeidung infinitesimaler Grössen, das Verhältnis $\frac{dy}{dx}$ mit y', $\frac{dz}{dx}$ mit z' bezeichnen, verstehen wir also unter (x, y, z, y', z') das Linienelement, dessen Punkt der Punkt (x, y, z) ist und dessen Gerade Richtungscosinus proportional $1, y', z'$ hat. Linien-element.

Wie in der Ebene, in § 1 des 2. Kap., können wir auch im Raume Scharen von unendlich vielen Linienelementen betrachten und den Begriff: *Verein von Linienelementen* einführen. Um uns aber möglichst knapp fassen zu können, wollen wir im Raume direct analog der in der Ebene, S. 39, gegebenen Definition zunächst Folgendes definieren:

Zwei unendlich benachbarte Linienelemente (x, y, z, y', z') und $(x + dx, y + dy, z + dz, y' + dy', z' + dz')$ liegen vereinigt, wenn die Gerade des ersten Elementes den Punkt des zweiten enthält. Da die Gerade des ersten Elementes in den laufenden Coordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ die Gleichungen Bedinggn. d. vereinigten Lage.

$$\mathfrak{y} - y - y'(\mathfrak{x} - x) = 0, \quad \mathfrak{z} - z - z'(\mathfrak{x} - x) = 0$$

hat, so sind also die analytischen Bedingungen für die vereinigte Lage diese beiden:

$$dy - y'dx = 0, \quad dz - z'dx = 0. \tag{57}$$

Liegt nun eine Schar von unendlich vielen Linienelementen vor, so sagen wir, dass sie *einen Verein von Linienelementen* darstellt, *sobald jedes Element der Schar mit allen unendlich benachbarten Elementen der Schar vereinigt liegt.*

Verein v. Linienelementen.

Eine Schar von Linienelementen kann ∞^1, ∞^2, ∞^3, ∞^4 oder endlich alle ∞^5 Linienelemente des Raumes umfassen. Ihre Elemente (x, y, z, y', z') werden dementsprechend analytisch durch 4, 3, 2, 1 oder keine Gleichung zwischen x, y, z, y', z' definiert sein. Sind es r Gleichungen:

$$\varphi_1(x, y, z, y', z') = 0, \cdots \varphi_r(x, y, z, y', z') = 0, \tag{58}$$

und ist (x, y, z, y', z') ein Element dieser Schar, so sind die Incremente dx, dy, dz, dy', dz', welche die Coordinaten des Elementes beim Übergang zu einem unendlich benachbarten Element der Schar erfahren, an die Gleichungen

$$d\varphi_i \equiv \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} dz + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y'} dy' + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z'} dz' = 0 \tag{59}$$
$$(i = 1, 2 \cdots r)$$

und an keine sonstige Gleichung gebunden. Mithin ist die durch (58) dargestellte Schar dann und nur dann ein Verein von Linienelementen, wenn die Gleichungen (59) bloss eine Folge der Gleichungen (57) und (58) sind. Da nun die Gleichungen (57) und (59) linear und homogen in dx, dy, dz, dy', dz' sind, so ergiebt sich: Die Schar (58) ist dann und nur dann ein Verein von Linienelementen, wenn infolge von (58) Gleichungen bestehen von der Form:

$$\begin{cases} dy - y'dx = \varrho_1\, d\varphi_1 + \varrho_2\, d\varphi_2 + \cdots + \varrho_r\, d\varphi_r, \\ dz - z'dx = \sigma_1\, d\varphi_1 + \sigma_2\, d\varphi_2 + \cdots + \sigma_r\, d\varphi_r, \end{cases} \tag{60}$$

in denen $\varrho_1 \cdots \varrho_r$, $\sigma_1 \cdots \sigma_r$ Functionen von x, y, z, y', z' bedeuten.

Sollen die Gleichungen (58) einen Verein darstellen, so muss es insbesondere möglich sein, aus ihnen mindestens eine Gleichung zwischen x, y, z allein abzuleiten. Sonst nämlich könnte die Zahl r der Gleichungen (58) höchstens gleich zwei sein; wären es nun zwei, so würden sie y' und z' als Functionen von x, y, z geben:

$$y' - \lambda(x, y, z) = 0, \quad z' - \mu(x, y, z) = 0.$$

Aber dann ergäben die Bedingungen (60) sofort, dass die ϱ und σ Null wären, da rechts dy' und dz' auftreten würden. Es müssten also die Gleichungen (57) infolge von $y' = \lambda$, $z' = \mu$ bestehen, und dies ist absurd. Ebenso als unmöglich zeigt sich die Annahme, dass die Schar nur durch eine Gleichung $y' = \lambda(x, y, z, z')$ definiert wird.

Es hat sich also gezeigt: Wenn die Geichungen (58) einen Verein von Linienelementen darstellen, so lässt sich aus ihnen *mindestens eine Gleichung in x, y, z allein* ableiten.

Gesetzt nun, es bestände *nur eine* solche Relation: Bestimmg. d. Vereine.

$$\Omega(x, y, z) = 0,$$

so gäbe es nur eine Bedingung für dx, dy, dz, die frei von den in (60) links nicht vorkommenden Grössen dy' und dz' ist, nämlich diese:

$$d\Omega \equiv \Omega_x dx + \Omega_y dy + \Omega_z dz = 0.$$

Es müssten also Relationen bestehen von der Form:

$$dy - y'dx = \varrho d\Omega,$$
$$dz - z'dx = \sigma d\Omega,$$

die unvereinbar mit einander sind.

Bestehen dagegen *zwei* von einander unabhängige Gleichungen zwischen x, y, z allein, so können wir annehmen, dass das Coordinatensystem so gewählt sei, dass diese Gleichungen die Form haben:

$$y - Y(x) = 0, \quad z - Z(x) = 0.$$

Da alsdann, wie man sofort sieht, Gleichungen von der Form:

$$dy - y'dx = \varrho(dy - Y'dx),$$
$$dz - z'dx = \sigma(dz - Z'dx)$$

bestehen müssen, so folgt $\varrho = \sigma = 1$ und also

$$y' = Y'(x), \quad z' = Z'(x).$$

Die vier Gleichungen:

$$(61) \qquad \begin{cases} y = Y(x), & z = Z(x); \\ y' = Y'(x), & z' = Z'(x) \end{cases}$$

müssen also für alle Linienelemente der betrachteten Schar bestehen. Mehr als diese vier Gleichungen können aber auch nicht für die Schar bestehen, da sie nur noch eine unabhängige Veränderliche x enthalten. Die Gleichungen (61) stellen immer einen *Verein von Linienelementen* dar; er besteht aus allen den Linienelementen (x, y, z, y', z'), deren Punkte (x, y, z) die Curve

$$y = Y(x), \quad z = Z(x)$$

bilden, während ihre Geraden die Tangenten der Curve in den betreffenden Punkten sind. Er besteht also, kurz gesagt, aus allen ∞^1 *Linienelementen einer Curve.* Curve.

Wenn endlich drei Gleichungen in x, y, z allein vorhanden sind, so bestimmen sie einen *Punkt* (a, b, c). Es handelt sich also hier um Linienelemente mit einem gemeinsamen Punkt. Durch einen Punkt gehen insgesamt ∞^2 Linienelemente. Besteht die Schar aus nur ∞^1, so bildet sie einen *Elementarkegel*, dessen Spitze der Punkt ist. Er wird analytisch dargestellt durch vier Gleichungen:

Elementarkegel.

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c, \quad \varphi(y', z') = 0,$$

die offenbar die Gleichungen (57) nach sich ziehen, sodass in der That ein *Verein von Linienelementen* vorliegt.

Punkt

Ferner werden *alle ∞^2 Linienelemente eines Punktes* (a, b, c) durch die drei Gleichungen

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c$$

definiert, die ebenfalls die Bedingungen (57) für einen *Verein von Linienelementen* erfüllen.

Hiermit hat sich ergeben:

Satz 27: *Es giebt im Raume drei Arten von Vereinen von Linienelementen: Erstens bilden alle ∞^1 Elemente einer Curve, zweitens alle ∞^1 Elemente eines Elementarkegels, drittens alle ∞^2 Elemente eines Punktes einen Verein. Andere Vereine von Linienelementen giebt es im Raume nicht.*

Trf. d. Linienelemente.

Hiervon machen wir eine Anwendung: Eine *Transformation der ∞^5 Linienelemente des Raumes* wird allgemein durch fünf Gleichungen von der Form

$$(62)\quad \begin{cases} x_1 = X(x, y, z, y', z'), \quad y_1 = Y(x, y, z, y', z'), \quad z_1 = Z(x, y, z, y', z'), \\ \qquad y_1' = \Phi(x, y, z, y', z'), \quad z_1' = \Psi(x, y, z, y', z') \end{cases}$$

dargestellt, die auch nach x, y, z, y', z' auflösbar sind.

Trf., die jeden Verein i. e. Verein trf.

Soll nun diese Transformation die Eigenschaft haben, *jeden Verein von Linienelementen wieder in einen Verein überzuführen*, so muss sie insbesondere jeden Verein allgemeiner Lage, der aus ∞^2 Linienelementen besteht, in einen Verein von ∞^2 Elementen verwandeln. Wir haben aber gesehen, dass ein Verein von ∞^2 Elementen stets aus allen Elementen eines Punktes (x, y, z) besteht. Daraus folgt, dass alle ∞^2 Elemente (x, y, z, y', z') durch einen gegebenen Punkt (x, y, z) von allgemeiner Lage in die ∞^2 Elemente $(x_1, y_1, z_1, y_1', z_1')$ durch einen anderen Punkt (x_1, y_1, z_1) übergehen müssen. Die drei ersten Gleichungen (62) müssen also x_1, y_1, z_1 als Functionen von x, y, z allein bestimmen, d. h. frei von y', z' sein. Alsdann stellen die drei ersten Gleichungen (62) eine *Punkttransformation* im Raume dar:

Punkttrf.

$$(63)\qquad x_1 = X(x, y, z), \quad y_1 = Y(x, y, z), \quad z_1 = Z(x, y, z).$$

Obgleich es fast als überflüssig erscheint, wollen wir doch der Vollständigkeit halber zeigen, dass hiermit eine und nur eine Transformation der Linienelemente von der verlangten Eigenschaft definiert ist. Aus (63) folgt nämlich:

$$(64)\qquad \begin{cases} dx_1 = X_x\,dx + X_y\,dy + X_z\,dz, \\ dy_1 = Y_x\,dx + Y_y\,dy + Y_z\,dz, \\ dz_1 = Z_x\,dx + Z_y\,dy + Z_z\,dz. \end{cases}$$

Da nun nach Voraussetzung Elemente in vereinigter Lage wieder in solche vermöge der Transformation (62) übergehen sollen, so müssen die Bedingungen (57) der vereinigten Lage infolge von (64) die Gleichungen:

$$dy_1 - y_1'dx_1 = 0, \quad dz_1 - z_1'dx_1 = 0$$

nach sich ziehen. Da diese Gleichungen frei von dy_1', dz_1' sind, so lehrt ihr Vergleich mit (64), dass sich y_1' und z_1' aus den Gleichungen:

$$y_1' = \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{Y_x + Y_y y' + Y_z z'}{X_x + X_y y' + X_z z'},$$

$$z_1' = \frac{dz_1}{dx_1} = \frac{Z_x + Z_y y' + Z_z z'}{X_x + X_y y' + X_z z'}$$

bestimmen. Diese beiden Gleichungen müssen demnach zusammen mit den drei Gleichungen (63) die gesuchte Transformation der Linienelemente darstellen. Wir nennen die so gewonnene Transformation, da ihre beiden letzten Gleichungen direct aus denen der Punkttransformation (63) durch Mitberücksichtigung der Transformation hervorgehen, die y' und z' bei der Punkttransformation erfahren, die *Erweiterung der Punkttransformation* (63). Man vergleiche die einleitenden Betrachtungen zu § 4 des 8. Kap., S. 335, 336. Erweiterg. e. Pkttrf.

Führen wir wieder die homogenen Bestimmungsstücke $dx : dy : dz$ anstelle von y' und z' ein, so können wir also den Satz aussprechen:

Satz 28: *Eine Transformation der Linienelemente $(x, y, z, dx{:}dy{:}dz)$ des Raumes (x, y, z), die jeden Verein von Linienelementen in einen Verein überführt, geht immer durch Erweiterung einer Punkttransformation*

$$x_1 = X(x, y, z), \quad y_1 = Y(x, y, z), \quad z_1 = Z(x, y, z)$$

durch Hinzufügung der Gleichungen:

$$dx_1 = X_x\,dx + X_y\,dy + X_z\,dz,$$
$$dy_1 = Y_x\,dx + Y_y\,dy + Y_z\,dz,$$
$$dz_1 = Z_x\,dx + Z_y\,dy + Z_z\,dz$$

hervor. Insbesondere führt sie also alle Linienelemente eines Punktes stets wieder in die Linienelemente eines Punktes über.

Wir können dies Ergebnis, wenn man will, kürzer so aussprechen: Es giebt ausser den *Punkt*transformationen keine Transformation der *Linienelemente*, die jeden Verein von Linienelementen wieder in einen Verein verwandelt.

Früher betrachteten wir gewisse Transformationen der Linienelemente einer Monge'schen Gleichung, bei denen die *Elementvereine dieser Gleichung* wieder in solche übergingen. Dass jene Transformationen keine Punkttransformationen waren, steht mit den jetzigen Ergebnissen durchaus nicht in Widerspruch, da wir hier Transformationen betrachten, die überhaupt *jeden* beliebigen Verein in einen Verein verwandeln.

Abschnitt III.

Einführung in die Geometrie der Flächenelemente. Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung.

Die im ersten Abschnitt entwickelte Theorie der Linienelemente der Ebene lässt sich, wie schon in der Einleitung zum zweiten Abschnitt hervorgehoben wurde, in zwei Weisen auf den Raum ausdehnen. Einerseits kommen wir zur Geometrie der Linienelemente im Raume, die wir im vorigen Abschnitt, wenn auch nicht vollständig, entwickelten, andererseits zur *Geometrie der Flächenelemente* im Raume. Der gegenwärtige Abschnitt soll nun in diese letztere Geometrie des Raumes einführen. In ihre volle Beleuchtung werden die hier zu entwickelnden Theorien jedoch erst im zweiten Bande dieses Werkes gerückt werden können.

Bei der Betrachtungsweise, die in diesem Abschnitte die herrschende sein soll, ist *die Schar aller ∞^5 Flächenelemente des Raumes als eine fünfdimensionale Mannigfaltigkeit* aufzufassen, und die Grössen x, y, z, p, q sind dabei die *Coordinaten zur Bestimmung eines Elementes dieser Mannigfaltigkeit.*

Eine oder mehrere Relationen zwischen x, y, z, p, q bestimmen Scharen von Flächenelementen, die in der Mathematik sonst unter anderen Gesichtspunkten betrachtet werden. Besteht z. B. nur eine Relation zwischen x, y, z, p, q, so liegt entweder eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung zwischen z und den beiden unabhängigen Veränderlichen x, y (vgl. § 1 des 7. Kap., S. 260) vor:

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

oder aber — wenn die Relation frei von p und q ist — die Gleichung aller der ∞^4 Flächenelemente, deren Punkte die einer gegebenen Fläche

$$F(x, y, z) = 0$$

sind, während ihre Ebenen beliebig liegen.

Wenn zwei Relationen zwischen x, y, z, p, q gegeben sind, so handelt es sich um eine Schar von gerade ∞^3 Flächenelementen.

Sind die Gleichungen nach p und q auflösbar, so haben sie die Form:

$$Zp + X = 0, \quad Zq + Y = 0.$$

Sie ordnen jedem Punkt (x, y, z) ein Flächenelement durch ihn zu. Die in diesem Flächenelement (x, y, z, p, q) gelegenen Linienelemente $(x, y, z, dx:dy:dz)$ genügen dabei der Pfaff'schen Differentialgleichung:

$$X dx + Y dy + Z dz = 0,$$

die entweder integrabel ist oder nicht. Im ersteren Fall besteht die Gesamtheit der ∞^3 betrachteten Flächenelemente aus allen Flächenelementen, die den ∞^1 Integralflächen angehören. Sind die beiden Relationen, die wir zwischen x, y, z, p, q annehmen, etwa von q frei, aber von p nicht, sodass sie die Form haben:

$$p = P(x, y, z), \quad \varphi(x, y, z) = 0,$$

so stellen sie solche ∞^3 Flächenelemente dar, deren Punkte auf der Fläche $\varphi = 0$ liegen. Wenn endlich die Relationen weder p noch q enthalten, so stellen sie *alle* ∞^3 Flächenelemente dar, deren Punkte eine gewisse Raumcurve bilden.

Auch in den Fällen, in denen weniger als ∞^3 Flächenelemente vorliegen, ergiebt sich eine grosse Anzahl von Möglichkeiten, die wir hier aber nicht ausführlich bezeichnen wollen. Wir deuten hier nur an, dass zu den Scharen von ∞^2 Flächenelementen alle Elemente einer Fläche gehören, ferner alle Flächenelemente einer Curve, d. h. alle Elemente, deren Punkte eine Curve bilden, während ihre Ebenen die Curve berühren, endlich alle Flächenelemente mit einem gemeinsamen Punkt. Die drei Gebilde Fläche, Curve und Punkt, die in der gewöhnlichen Auffassung verschieden sind, erscheinen also vom Standpunkte der Geometrie der Flächenelemente aus einfach als verschiedene Abarten von zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten in dem fünfdimensionalen Gebiet aller Flächenelemente.

Die Geometrie der Flächenelemente kann man als ein *Analogon zur Plücker'schen Liniengeometrie* bezeichnen. Für Plücker war die Schar aller ∞^4 Geraden

$$x = rz + \varrho, \quad y = sz + \sigma$$

des Raumes eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit, in der r, s, ϱ, σ die einzelne Gerade bestimmen. Je nachdem man zwischen diesen vier Liniencoordinaten eine, zwei oder drei Relationen aufstellt, gelangt man zu den Liniencomplexen, Strahlensystemen und Regelflächen. Wie in der Liniengeometrie die projectiven Transformationen des Raumes eine wesentliche Rolle spielen, so werden in der Geometrie der Flächenelemente, wie wir allerdings erst im zweiten Bande vollständig ausführen können, die *Berührungstransformationen des Raumes* in den Vordergrund treten.

Die Geometrie der Flächenelemente des Raumes wurde von Lie in seinen ersten geometrischen Arbeiten im Jahre 1870 begründet. Wir betrachten diese Theorie als neu, wenn sie auch viele alte Theorien in sich aufnimmt, denn auch diese schon bekannten Theorien erscheinen dabei immer in neuer Beleuchtung.

Wie gesagt, soll der gegenwärtige letzte Abschnitt dieses Bandes nur erst in die Geometrie der Flächenelemente *einführen.* Äussere Rücksichten zwingen uns zur Beschränkung auf einen kleinen Teil dieser Disciplin, nämlich auf die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0,$$

oder, wie wir auch sagen können, auf die Theorie der Scharen von ∞^4 Flächenelementen. Erst im zweiten Bande werden wir die Geometrie der Flächenelemente in weiterem Umfange entwickeln.

Im ersten Kapitel dieses Abschnittes geben wir die Lagrange'sche Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung wieder. Im darauffolgenden Kapitel bringen wir die Theorie vom Standpunkt der Geometrie der Flächenelemente aus, während uns in den beiden letzten Kapiteln besondere Kategorien von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung beschäftigen werden.

Kapitel 11.

Lagrange's Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung und ihre geometrische Deutung nach Monge.

Nach schönen Vorarbeiten von Euler, die aber immerhin einen speciellen Charakter hatten, entwickelte Lagrange vom Jahre 1772 an allgemeine *Integrationstheorien für die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung*

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0,$$

die von Monge durch Auffassung von x, y, z als Punktcoordinaten im Raume anschaulich gedeutet wurden.

In diesem Kapitel geben wir die Theorien Lagrange's in ihren Hauptzügen wieder und benutzen dabei die Monge'sche geometrische Einkleidung. Wir gehen dabei aber einen Schritt weiter, der allerdings hier nur formell zur Erleichterung des sprachlichen Ausdruckes dienen soll, indem wir den Begriff: *Flächenelement* (x, y, z, p, q) consequent benutzen. Wir können dann, wie wiederholt gesagt wurde, die partielle Differentialgleichung als Definitionsgleichung einer Schar von ∞^4 Flächenelementen (x, y, z, p, q) auffassen:

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

sodass das Integrationsproblem darauf hinauskommt, alle Flächen zu bestimmen, deren Flächenelemente dieser Schar von ∞^4 Elementen angehören. Obgleich diese Form der Fragestellung nur eine andere Fassung des Integrationsproblemes ist, so hat sie doch ebenso wie Monge's Deutung, die zunächst auch nur zur Erleichterung des Ausdruckes dienen sollte, ihren besonderen Wert.

Aber erst im nächsten Kapitel werden wir diese Theorien in einer Weise verallgemeinern, die principielle Fortschritte mit sich bringt.

Es sei noch daran erinnert, dass wir in § 1 des 7. Kap. aus einer vorgelegten Monge'schen Gleichung im Raume (x, y, z) eine gewisse partielle Differentialgleichung erster Ordnung ableiteten. Dieser Beziehung zwischen beiden Gleichungen werden wir im gegenwärtigen Kapitel wieder begegnen und sie dabei umkehren. Überhaupt werden wir an den bezeichneten Paragraphen wiederholt anknüpfen.

§ 1. Lineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung und Systeme von simultanen gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Der Vollständigkeit halber schicken wir hier einen Abriss der Theorie der *linearen* partiellen Differentialgleichnngen voraus*).

Lin. p. Diffgl. 1. O. Ist die *lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung*

$$X(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + Y(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = Z(x, y, z) \tag{1}$$

vorgelegt, so handelt es sich darum, z so als Function von x und y zu bestimmen, dass die Gleichung (1) durch diese Function identisch für alle Werte von x und y erfüllt wird. Deuten wir x, y, z als gewöhnliche Punktcoordinaten im Raume, so wird jede Lösung $z = z(x, y)$

*) In Bezug auf die geschichtlichen Notizen verweisen wir auf den letzten Paragraphen dieses Kapitels.

der Differentialgleichung (1) durch eine Fläche dargestellt. Sie heisst eine *Integralfläche.* Integral-fläche.

Die durch den Punkt (x, y, z) der Fläche gehenden Fortschreitungsrichtungen $(dx : dy : dz)$ auf der Integralfläche sind an eine einzige Bedingung gebunden, nämlich an diese:

$$dx \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + dy \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = dz. \tag{2}$$

Der Vergleich mit (1) lehrt daher, wenn wir annehmen, dass die drei Coefficienten X, Y, Z nicht für alle Punkte der Fläche verschwinden, dass unter diesen Fortschreitungsrichtungen $(dx : dy : dz)$ auf der Fläche insbesondere eine solche enthalten ist, für die

$$\frac{dx}{X(x, y, z)} = \frac{dy}{Y(x, y, z)} = \frac{dz}{Z(x, y, z)} \tag{3}$$

ist. Es sind dies zwei Gleichungen, und sie ordnen *jedem* allgemein gewählten Punkte (x, y, z) des Raumes eine Fortschreitungsrichtung $(dx : dy : dz)$ zu. Sie bestimmen daher ∞^3 *Linienelemente* $(x, y, z, dx : dy : dz)$, *die den ganzen Raum erfüllen.* Jede Integralfläche der linearen partiellen Differentialgleichung (1) ist so beschaffen, dass sie ∞^2 dieser Linienelemente enthält.

Wenn nun umgekehrt irgend eine Fläche

$$z - \varphi(x, y) = 0$$

von der Beschaffenheit vorliegt, dass sie in jedem ihrer Punkte (x, y, z) das Linienelement $(x, y, z, dx : dy : dz)$ enthält, das dem Punkte durch die Gleichungen (3) zugeordnet wird, so ist, da alle Fortschreitungsrichtungen $(dx : dy : dz)$ auf der Fläche die Gleichung (2) erfüllen, also auch die des Linienelementes diese Gleichung befriedigt, in jedem Punkte der Fläche:

$$X \frac{\partial z}{\partial x} + Y \frac{\partial z}{\partial y} = Z,$$

mit anderen Worten: die Fläche ist eine Integralfläche von (1).

Hiernach können wir die Integralflächen der linearen partiellen Differentialgleichung (1) *auch definieren als diejenigen Flächen, die in allen ihren Punkten die Linienelemente enthalten, die den Punkten durch die beiden Gleichungen* (3) *zugeordnet werden.*

Die Gleichungen (3) sind aber zwei simultane *gewöhnliche* Differentialgleichungen erster Ordnung in x, y, z. Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen entnehmen wir, dass sie in allgemeinster Weise durch zwei von einander unabhängige Gleichungen in x, y, z mit zwei wesentlichen willkürlichen Constanten a, b integriert Simult. gew. Diffgln. 1. O.

werden. Die Integralgleichungen des Systems (3) haben, nach a und b aufgelöst, die allgemeine Form:

$$u(x, y, z) = a, \quad v(x, y, z) = b. \tag{4}$$

Dabei sind u und v von einander unabhängig. Für jedes Wertsystem der Constanten a, b stellen die Gleichungen (4) eine *Curve* im Raume dar, eine sogenannte *Integralcurve* des Systems (3). Da längs der Curve

Integralcurve.

$$u_x\,dx + u_y\,dy + u_z\,dz = 0,$$
$$v_x\,dx + v_y\,dy + v_z\,dz = 0$$

ist und diese beiden Gleichungen infolge von (3) bestehen sollen, so folgt, dass die Curve in jedem ihrer Punkte (x, y, z) das dem Punkte vermöge des Systems (3) zugeordnete Linienelement $(x, y, z, dx : dy : dz)$ hat. Die ∞^3 durch (3) bestimmten Linienelemente ordnen sich daher in ∞^2 Curven (4) an, und zwar geht durch jeden allgemein gewählten Punkt eine dieser Curven hindurch.

Äquivalenz beider Probleme.

Es ist leicht einzusehen, dass das Problem, das System (3) von simultanen gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung zu integrieren, mit dem Integrationsproblem der linearen partiellen Differentialgleichung (1) völlig äquivalent ist. Liegt nämlich eine Integralfläche $z = \varphi(x, y)$ von (1) vor, in deren Punkten die Coefficienten X, Y, Z nicht sämtlich verschwinden, so wird für jeden Punkt der Fläche das zugeordnete Linienelement der Fläche angehören. Diese ∞^2 Linienelemente $(x, y, z, dx : dy : dz)$ werden durch die drei Gleichungen

$$z = \varphi(x, y), \quad dz = \varphi_x\,dx + \varphi_y\,dy,$$
$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}$$

bestimmt. Für diese Linienelemente ist also auch

$$\frac{dx}{X(x, y, \varphi)} = \frac{dy}{Y(x, y, \varphi)}.$$

Dies ist aber eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung in x, y. Es sei $\psi(x, y) =$ Const. ihre Integralgleichung. Dann folgt, dass jene ∞^2 Linienelemente durch die Gleichungen

$$z = \varphi(x, y), \quad \psi(x, y) = \text{Const.}$$

definiert sind, indem sie auch den durch Differentiation hieraus hervorgehenden Gleichungen genügen, d. h. dass sie die Linienelemente von ∞^1 *Curven* auf der Fläche sind.

Jede Integralfläche der linearen partiellen Differentialgleichung (1) wird mithin von ∞^1 Integralcurven des Systems (3) erzeugt.

Umgekehrt leuchtet ein, dass jede Fläche, die ∞^1 Integralcurven (4) des Systems (3) enthält, eine Integralfläche der linearen partiellen Differentialgleichung (1) ist.

Man construiert also die allgemeinste Integralfläche von (1) dadurch, dass man eine beliebige Curve wählt, die nicht zu den Integralcurven (4) gehört, und die durch ihre Punkte gehenden Curven (4) bestimmt. Sie erzeugen eine Integralfläche. Zwei Integralflächen schneiden sich längs einer Integralcurve (4). Kennt man alle Integralflächen von (1), so kennt man daher auch alle Integralcurven von (3).

Die allgemeine Integralfläche der Gleichung (1) hängt nach dem Vorhergehenden nicht nur von einer endlichen Anzahl von Parametern ab. Greifen wir nun ∞^1 unter diesen Integralflächen heraus, so werden sie sich durch eine Gleichung

$$f(x, y, z) = \text{Const.}$$

definieren lassen. Nun ist für diese Flächen:

$$f_x dx + f_y dy + f_z dz = 0,$$

d. h.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f_y}{f_z}.$$

Da sie Integralflächen von (1) sein sollen, so muss also in Folge von $f =$ Const. auch

$$-X\frac{f_x}{f_z} - Y\frac{f_y}{f_z} - Z = 0$$

sein. Da aber letztere Gleichung die willkürliche Constante gar nicht enthält, die in $f =$ Const. auftritt, so muss sie an sich bestehen, d. h. $f(x, y, z) =$ Const. stellt dann und nur dann ∞^1 Integralflächen der linearen partiellen Differentialgleichung (1) dar, wenn f eine Lösung der *homogenen linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung* Hom. lin. part. Diffgl. 1. O.

(5) $$X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + Z\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

ist, in der x, y, z unabhängige Veränderliche vorstellen.

Da jede Integralfläche ∞^1 Integralcurven (4) enthält, so wird also eine Gleichung in u und v

$$f(u, v) = 0$$

eine allgemeine Integralfläche darstellen, da sie diejenigen ∞^1 Curven

$$u(x, y, z) = a, \quad v(x, y, z) = b$$

enthält, deren Parameter a, b an die Gleichung $f(a, b) = 0$ gebunden sind. Mithin wird eine beliebige Gleichung von der Form

$$f(u, v) = \text{Const.}$$

∞^1 Integralflächen von (1) darstellen. Daraus folgt, dass die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung (5) eine willkürliche Function der beiden Integrale u, v von (3) ist.

Das Ergebnis unserer Betrachtungen besteht also darin, *dass sich das Integrationsproblem der linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung* (1) *für z ebensowohl mit dem Integrationsproblem des Systems von zwei simultanen gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung* (3) *deckt, als auch mit dem Integrationsproblem der homogenen linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung* (5) *für f.*

Besonderer Fall.

Sind insbesondere die Integralcurven (4) des Systems (3) Geraden, so werden sie — da es insgesamt ∞^2 sind — ein *Strahlensystem* bilden, während die allgemeinen Integralflächen der linearen partiellen Differentialgleichung (1) die Regelflächen sind, deren Geraden dem Strahlensystem angehören. Ein Strahlensystem hat aber im allgemeinen zwei *Brennflächen*, und die Strahlen des Systems lassen sich in je zwei Weisen zu je ∞^1 abwickelbaren Flächen zusammenfassen. Die Rückkehrcurven dieser Flächen bilden dann die beiden Brennflächen. (Vgl. § 2 des 7. Kap., S. 270, 271.) Die beiden Brennflächen sind hier *singuläre Integralflächen* der linearen partiellen Differentialgleichung (1), und jene zwei Scharen von ∞^1 Rückkehrcurven sind *singuläre Integralcurven* des Systems (3).

Im *allgemeinen* Falle, in dem die Integralcurven von (4) *keine* Geraden sind, können ebenfalls solche singuläre Integralgebilde auftreten, die sich den im Texte gegebenen Betrachtungen entziehen. Die ∞^2 Integralcurven des Systems (3) bilden, wie wir sagen wollen, ein *Curvensystem*. Die allgemeinen Integralflächen von (1) sind dann Flächen, erzeugt von ∞^1 Curven des Curvensystems. Die ∞^2 Curven können nun sämtlich eine Anzahl von Flächen berühren, die wir wieder *Brennflächen* nennen. Ist die Zahl dieser Brennflächen gleich m, so lassen sich die Integralcurven, wie man leicht sieht, in m Weisen zu je ∞^1 Scharen von je ∞^1 Curven zusammenfassen, sodass die ∞^1 Curven jeder Schar eine Umhüllungscurve haben. Diese Umhüllungscurven sind auf den Brennflächen gelegen und stellen *singuläre Integralcurven* von (3) dar, während die Brennflächen *singuläre Integralflächen* von (1) sind.

Singuläre Integralgebilde.

Verallgemeinerung.

Wir *verallgemeinern* einen Teil der vorhergehenden Überlegungen in knappen Worten auf den Fall von beliebig vielen Veränderlichen.

Syst. v. simult. gew. Diffgln. 1. O.

Es liege ein *System von $n - 1$ simultanen gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung in den n Veränderlichen* $x_1, x_2 \ldots x_n$ vor:

$$\text{(6)} \qquad \frac{dx_1}{X_1(x_1 \ldots x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1 \ldots x_n)} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n(x_1 \ldots x_n)}.$$

Integral.

Die Function $f(x_1 \ldots x_n)$ heisst ein *Integral* von (6), wenn die aus

$$f(x_1 \ldots x_n) = \text{Const.}$$

folgende Gleichung

$$(7)\qquad \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n=0$$

infolge von $f=$ Const. und von (6) besteht, d. h. also, da die willkürliche Constante in ihr gar nicht auftritt, sobald die Gleichung

$$(8)\qquad X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\cdots+X_n\frac{\partial f}{\partial x_n}=0$$

identisch besteht, sobald also f eine Lösung dieser *homogenen linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit n unabhängigen Veränderlichen* $x_1, x_2 \dots x_n$ ist. Hieraus folgt sofort, dass, wenn n Functionen $u_1 \dots u_n$ Integrale von (6) sind, ihre Functionaldeterminante hinsichtlich $x_1 \dots x_n$ verschwindet, dass also nur $n-1$ von einander unabhängige Integrale von (6) vorhanden sind und jedes andere eine beliebige Function von diesen $n-1$ Integralen ist. Denn dass das System (6) *mindestens* $n-1$ von einander unabhängige Integrale hat, können wir als bekannt voraussetzen. Die Integrationsprobleme von (6) und (8) decken sich hiernach völlig miteinander. Hom. lin. part. Diffgl 1. O.

Wenn wir von dem Begriff eines *Raumes von n Dimensionen* Gebrauch machen und also $x_1 \dots x_n$ als gewöhnliche Punktcoordinaten in diesem Raume deuten, so können wir diesen beiden Problemen einen begrifflichen Sinn beilegen. Alsdann nämlich ordnet das System (6) jedem Punkt $(x_1 \dots x_n)$ des Raumes eine Fortschreitungsrichtung $(dx_1 : dx_2 : \cdots : dx_n)$ zu. Den Inbegriff des Punktes und der Geraden dieser Richtung können wir auch jetzt als ein *Linienelement* bezeichnen. Ist nun $f(x_1 \dots x_n)$ ein Integral von (6), d. h. erfüllt f die Gleichung (8) identisch, so ist zunächst Raum von n Dimens.

$$f(x_1 \dots x_n) = \text{Const.}$$

begrifflich als eine Schar von ∞^1 Mannigfaltigkeiten von $n-1$ Dimensionen aufzufassen. Die Fortschreitungsrichtungen $(dx_1 : dx_2 : \cdots : dx_n)$, die ein Punkt $(x_1 \dots x_n)$ auf der durch ihn gehenden Mannigfaltigkeit $f=$ Const. einschlagen kann, sind an die Gleichung (7) gebunden. Ihr Vergleich mit (8) zeigt, dass unter diesen Richtungen insbesondere diejenige enthalten ist, die dem Punkte $(x_1 \dots x_n)$ vermöge (6) zugeordnet wird. Jedes Integral f liefert daher solche ∞^1 Mannigfaltigkeiten $f=$ Const., deren jede die ihren Punkten vermöge des Systems (6) zugeordneten Linienelemente enthält. Wenn umgekehrt

$$f(x_1 \dots x_n) = \text{Const.}$$

solche ∞^1 Mannigfaltigkeiten definiert, die in jedem ihrer Punkte auch das dem Punkte vermöge (6) zugeordnete Linienelement enthalten, so folgt rückwärts, dass f die Gleichung (8) identisch erfüllt, also ein Integral des Systems (6) ist.

Sind $n-1$ von einander unabhängige Integrale $u_1, u_2 \ldots u_{n-1}$ von (6) vorgelegt, so definieren die $n-1$ Gleichungen

$$u_1 = \text{Const.}, \quad u_2 = \text{Const.}, \cdots u_{n-1} = \text{Const.}$$

Integral-curve. ∞^{n-1} einfach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten, die wir *Integralcurven* von (6) nennen können. Da nun längs einer solchen Curve die Linienelemente $(x_1, x_2 \ldots x_n,\ dx_1 : dx_2 : \cdots : dx_n)$ an die $n-1$ Relationen

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial u_i}{\partial x_n} dx_n = 0 \qquad (i = 1, 2 \cdots n-1)$$

gebunden sind und $u_1 \ldots u_{n-1}$ andererseits die Differentialgleichung (8) für f erfüllen, so folgt, dass diese Linienelemente gerade die sind, die den Punkten vermöge (6) zugeordnet sind. Hieraus folgt, dass das Integrationsproblem des Systems (6) darauf zurückkommt, solche ∞^{n-1} Curven zu bestimmen, deren ∞^n Linienelemente diejenigen Elemente sind, die den Punkten vermöge (6) zugeordnet werden. Kennt man diese Curven und wählt man eine beliebige Schar von ∞^{n-2} aus, so bilden diese eine $(n-1)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, die zu jedem ihrer Punkte das zugeordnete Linienelement ebenfalls enthält. Die betrachtete Mannigfaltigkeit gehört daher zu den Mannigfaltigkeiten

$$f(x_1, x_2 \ldots x_n) = \text{Const.},$$

die durch die homogene lineare partielle Differentialgleichung (8) bestimmt werden, und ist, wie wir sagen können, eine *Integralmannigfaltigkeit* von (6), und so ergeben sich alle.

Integral-mannig-faltgkt.

§ 2. Lagrange's Ableitung der allgemeinen Lösung einer partiellen Differentialgleichung aus einer vollständigen Lösung.

Wir wenden uns zur allgemeinen *Integrationstheorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung* zwischen zwei unabhängigen Veränderlichen x, y und einer abhängigen Veränderlichen z. Eine solche Differentialgleichung hat die Form:

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0. \tag{9}$$

Wir setzen voraus, dass sie sich *nicht* auf eine in $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ lineare Form bringen lasse. Den Fall der linearen Differentialgleichungen haben wir ja schon im ersten Paragraphen besprochen.

Im gegenwärtigen Paragraphen geben wir Lagrange's Formulierung des Integrationsproblems sowie seine Ableitung der allgemeinen

Lösung aus einer vollständigen Lösung, wie er es nennt, wieder. Lagrange*) drückte sich rein analytisch aus, während Monge dadurch, dass er x, y, z als gewöhnliche Punktcoordinaten im Raume deutete, eine grössere Anschaulichkeit einführte. Wir folgen daher Monge in der Darstellung von Lagrange's Theorie, gehen aber dabei — wie schon in der Einleitung bemerkt wurde — insofern einen Schritt weiter, als wir den Begriff: Flächenelement consequent anwenden. Hierdurch gewinnt die Darstellung an Einfachheit und Übersichtlichkeit.

Das durch die Differentialgleichung (9) gestellte Problem ist dies: Es sollen alle Functionen *Lagrange's Formul. des Integr.-Problems.*

$$z = \varphi(x, y) \tag{10}$$

bestimmt werden, die, für z in die Gleichung (9) eingesetzt, diese Gleichung zu einer Identität für alle Werte von x und y machen. Jede solche Function $z = \varphi(x, y)$ heisst eine *Lösung* der partiellen Differentialgleichung (9). *Lösung.*

Deuten wir mit Monge die Veränderlichen x, y, z als rechtwinklige Punktcoordinaten im Raume, so stellt die Gleichung (10) eine Fläche dar. Sie heisst eine *Integralfläche* der partiellen Differentialgleichung (9). *Integralfläche.*

Wie wir es im zweiten Abschnitt wiederholt gethan haben (vgl. z. B. § 1 des 7. Kap., S. 257, 258), verstehen wir unter dem *Flächenelement* (x, y, z, p, q) den Inbegriff des Punktes (x, y, z) und derjenigen durch ihn gehenden Ebene, deren Richtungscosinus proportional p, q, -1 sind. Die Fläche (10) ist dann und nur dann eine Integralfläche der Differentialgleichung (9), wenn ihre Flächenelemente, für die ja *Flächenelement.*

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

ist, die Gleichung

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{9'}$$

erfüllen. Die Gleichung (9′) definiert ∞^4 der ∞^5 Flächenelemente des Raumes. Das Problem ihrer Integration deckt sich damit, *alle Flächen zu bestimmen, deren Elemente* (x, y, z, p, q) *sämtlich die Gleichung* $F(x, y, z, p, q) = 0$ *erfüllen.*

Dies Problem lässt sich — wie wir übrigens schon an der angeführten Stelle sahen — noch etwas anders formulieren. Nach Voraussetzung ist die Gleichung (9) nicht frei von $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ oder also die Gleichung (9′) nicht frei von beiden Grössen p und q. Daher giebt

*) Was die hierzugehörigen litterarischen Notizen anbetrifft, so verweisen wir auf den letzten Paragraphen dieses Kapitels.

es unter den ∞^4 erwähnten Flächenelementen gerade ∞^1, die einen bestimmt gewählten Punkt (x, y, z) gemein haben. Sie umhüllen

Elementarkegel.

einen *Elementarkegel*, dessen Spitze der Punkt (x, y, z) ist und der analytisch ebenfalls durch die Gleichung (9′) gegeben ist. Nach Voraussetzung artet er *nicht* in ein Büschel aus. Nun können wir sagen: Unser Problem verlangt, *alle Flächen zu bestimmen, die in jedem ihrer Punkte denjenigen Elementarkegel berühren, der dem Punkte durch die Gleichung* (9′) *zugeordnet ist.*

Wird eine Schar von ∞^2 verschiedenen Integralflächen bestimmt durch eine Gleichung von der Form:

$$z = \Phi(x, y, a, b), \tag{11}$$

in der a und b zwei willkürliche Constanten sind, d. h. erfüllt die Function Φ, für z in (9) eingesetzt, diese Gleichung identisch für alle Werte der Veränderlichen x, y und der wesentlichen Constanten a, b,

Vollständ. Lösung.

so heisst die Function Φ nach Lagrange eine *vollständige Lösung* der partiellen Differentialgleichung (9). Die Flächenelemente der ∞^2 Integralflächen $z = \Phi$ sind gegeben durch die drei Relationen

$$z = \Phi(x, y, a, b), \quad p = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \tag{12}$$

zwischen ihren Coordinaten x, y, z, p, q. Da a und b willkürlich und wesentlich sind, so geben diese Relationen insgesamt ∞^4 Flächenelemente. Sie müssen nach dem Vorhergehenden, wenn Φ eine vollständige Lösung darstellen soll, identisch sein mit allen den ∞^4 Flächenelementen, die durch die Gleichung (9′) definiert werden. Und hierin wollen wir das wesentliche Merkmal einer vollständigen Lösung erblicken.

Das Problem, eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung (9) zu finden, können wir hiernach so aussprechen:

Durch die Gleichung (9′) *sind* ∞^4 *Flächenelemente gegeben. Sie sollen in* ∞^2 *Scharen von je* ∞^2 *Elementen in der Weise zerlegt werden, dass jede dieser* ∞^2 *Scharen aus allen Elementen einer Fläche besteht.*

Es erhellt sofort, dass eine vorgelegte vollständige Lösung, da sie ja alle die ∞^4 Elemente liefert, die der Gleichung (9′) genügen, rückwärts die partielle Differentialgleichung (9) vollständig bestimmt In der That findet man bei gegebener vollständiger Lösung (11) die Gleichung (9′) und damit auch (9), indem man aus den drei Gleichungen (12) die beiden willkürlichen Constanten a und b eliminiert. Gehört somit zu einer beliebig gegebenen vollständigen Lösung, d. h. zu einer gewissen gegebenen Schar von ∞^2 Integralflächen (11), stets eine ganz bestimmte partielle Differentialgleichung (9), so liegt die Frage nahe, ob es möglich ist, aus einer bekannten vollständigen Lösung *alle* Integralflächen abzuleiten. Diese Frage wurde von Lagrange bejahend beantwortet, und wir geben im Folgenden die Methode von Lagrange ihrem Wesen nach, aber allerdings im Gegensatz zu Lagrange in geometrischer Einkleidung, wieder. Ableitg. aller Integralfl. a. einer vollst. Lösg.

Ist

$$z = \Phi(x, y, a, b) \tag{11}$$

eine vollständige Lösung und

$$z = \varphi(x, y) \tag{13}$$

irgend eine Lösung von (9), so gehört jedes Element der Integralfläche (13) zu den ∞^4 durch (9′) bestimmten Elementen, d. h. zu den ∞^4 Elementen der ∞^2 Integralflächen (11). Da die Fläche $z = \varphi(x, y)$ gerade ∞^2 Elemente hat, so sind *drei* Fälle denkbar:

Erster Fall: Die Fläche $z = \varphi(x, y)$ hat alle ihre ∞^2 Elemente mit *einer* unter den Flächen $z = \Phi$ gemein. Dann ist sie eine dieser Flächen. In diesem Falle ist die Lösung φ in der vollständigen Lösung Φ als *Particularlösung* enthalten. Erster Fall.

Zweiter Fall: Die Fläche $z = \varphi(x, y)$ hat je ∞^1 Elemente mit jeder einzelnen Fläche von gewissen ∞^1 Flächen der Schar (11) gemein. Denn berührt sie jede dieser ∞^1 Flächen längs einer Curve, nämlich längs des Punktortes derjenigen ∞^1 Elemente, die sie mit der betreffenden Fläche gemein hat. Sie ist daher die *Umhüllende der ∞^1 Flächen.* — Wählen wir umgekehrt irgend eine Schar von ∞^1 Flächen aus der Schar $z = \Phi$ von ∞^2 Flächen aus und bestimmen wir ihre umhüllende Fläche, so wird diese jede der ausgewählten ∞^1 Flächen längs einer Curve berühren, d. h. mit jeder je ∞^1 Flächenelemente gemein haben. Alle ihre ∞^2 Elemente gehören daher zu denen, die auf den Flächen (11) liegen, d. h. zu denen, die durch die Gleichung (9′) definiert werden. Die Umhüllende ist daher stets eine Integralfläche. Um diese Umhüllenden analytisch zu bestimmen, verfahren wir so: Aus der Schar der ∞^2 Flächen (11) wählen wir dadurch beliebige ∞^1 aus, dass wir eine willkürlich annehmbare Gleichung zwischen den Constanten a, b festsetzen: Zweiter Fall.

$$\omega(a, b) = 0.$$

Damit wird etwa die Constante b als Function von a bestimmt. Die Umhüllende der zugehörigen ∞^1 Flächen (11) ergiebt sich dann nach bekannter Regel durch Elimination von a, b und $\frac{db}{da}$ aus den vier Gleichungen:

$$z = \Phi(x, y, a, b), \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial a} + \frac{\partial \Phi}{\partial b}\frac{db}{da} = 0,$$

$$\omega(a, b) = 0, \qquad \frac{\partial \omega}{\partial a} + \frac{\partial \omega}{\partial b}\frac{db}{da} = 0,$$

d. h. durch Elimination von a und b aus den drei Gleichungen:

$$(14) \qquad \begin{cases} z = \Phi(x, y, a, b), \quad \omega(a, b) = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial a}\dfrac{\partial \omega}{\partial b} - \dfrac{\partial \Phi}{\partial b}\dfrac{\partial \omega}{\partial a} = 0. \end{cases}$$

Wie man sieht, ergeben sich die hier betrachteten *Lösungen durch Differentiation und Elimination* aus der vollständigen Lösung (11).

Dritter Fall. **Dritter Fall:** Die Fläche $z = \varphi(x, y)$ hat mit einer Fläche $z = \Phi$ je nur ein Flächenelement (oder eine discrete Anzahl von Elementen) gemein. Dann muss sie, da sie ja insgesamt ∞^2 Flächenelemente hat, *alle* ∞^2 Flächen $z = \Phi$ und zwar jede in einem Punkte berühren. Sie ist die Umhüllungsfläche aller ∞^2 Flächen (11) und ergiebt sich durch Elimination von a und b aus den drei Gleichungen:

$$(15) \qquad z = \Phi(x, y, a, b), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0.$$

Wenn alle ∞^2 Flächen der vollständigen Lösung wirklich eine Umhüllungsfläche haben, so gehören alle Elemente der Umhüllungsfläche zu den ∞^4 Elementen, die von der vollständigen Lösung (11) bestimmt werden, d. h. zu allen Elementen, die durch (9') gegeben werden. Die Umhüllungsfläche ist also stets eine Integralfläche von (9). Wir nennen eine solche Lösung $z = \varphi(x, y)$ nach Lagrange eine *singuläre Lösung* der partiellen Differentialgleichung (9). Sie ergiebt sich, wie wir sahen, *durch Differentiation und Elimination* aus der bekannten vollständigen Lösung (11).

Singuläre Lösung.

Diese Überlegungen zeigen, dass die im zweiten Falle durchgeführte Methode der Differentiation und Elimination zu *allen* Lösungen der partiellen Differentialgleichung (9) führt mit Ausnahme der singulären Lösung und der schon als bekannt vorausgesetzten vollständigen Lösung (11). Die Formeln (14) zeigen, da in ihnen eine willkürliche Function ω auftritt, dass der allgemeine Ausdruck einer Lösung, der durch Elimination von a und b aus (14) hervorgeht, von einer willkürlichen Function ω abhängt. Wir nennen sie mit Lagrange eine *allgemeine Lösung* der partiellen Differentialgleichung (9). Es ist zu beachten, dass man die allgemeinste Integralfläche in sehr verschiedenen Formen analytisch darstellen kann, je nach der ausgewählten voll-

Allgemeine Lösung.

ständigen Lösung, d. h. je nach der Auswahl der ∞^2 Integralflächen (11), aus deren Gleichung ihre Gleichung durch Differentiation und Elimination hervorgeht.

Wir erläutern die Theorie durch einige Beispiele.

1. Beispiel: Die partielle Differentialgleichung erster Ordnung: 1. Beispiel.

$$1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\frac{\varkappa^2+1}{\varkappa^2},$$

in der $\varkappa$ eine Constante ist, sei vorgelegt. Hier sind die Elementarkegel congruente und gleichgestellte Rotationskegel, deren Mantellinien den Winkel γ mit der (xy)-Ebene bilden, wenn $\operatorname{tg}\gamma=\frac{1}{\varkappa}$ ist. Die Gleichung wird, wie wir früher sahen (§ 1 des 7. Kap., S. 263), durch die ∞^2 Ebenen befriedigt, die mit der (xy)-Ebene den Winkel γ bilden. Die Gleichung dieser Schar von ∞^2 Ebenen lautet:

$$x\cos a+y\sin a-\varkappa z-b=0.$$

Hierin sind a, b willkürliche Constanten. Diese Gleichung stellt also eine *vollständige* Lösung der vorgelegten partiellen Differentialgleichung dar. Schon an der angegebenen früheren Stelle sahen wir, dass sich die allgemeinste Integralfläche als Umhüllende von ∞^1 dieser Ebenen ergiebt. Analytisch erhalten wir diese Umhüllenden nach (14) durch Elimination von a und b aus den drei Gleichungen:

$$x\cos a+y\sin a-\varkappa z-b=0,\qquad \omega(a,b)=0,$$
$$(x\sin a-y\cos a)\frac{\partial\omega}{\partial b}-\frac{\partial\omega}{\partial a}=0.$$

Nehmen wir $\omega(a,b)=0$ in aufgelöster Form $b-\varphi(a)=0$ an, so sehen wir, dass die *allgemeine* Lösung der vorgelegten partiellen Differentialgleichung durch Elimination von a aus den beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}x\cos a+y\sin a-\varkappa z-\varphi(a)&=0,\\ x\sin a-y\cos a\qquad\quad+\varphi'(a)&=0\end{aligned}$$

erhalten wird, in denen $\varphi(a)$ eine willkürliche Function von a bedeutet. Diese Gleichungen stellen alle abwickelbaren Flächen dar, deren Tangentenebenen den Winkel γ mit der (xy)-Ebene bilden. Wir können sie auch so schreiben:

$$\begin{aligned}x&=(\varkappa z+\varphi(a))\cos a-\varphi'(a)\sin a,\\ y&=(\varkappa z+\varphi(a))\sin a+\varphi'(a)\cos a.\end{aligned}$$

Eine eventuelle *singuläre* Lösung muss Umhüllende aller jener ∞^2 Ebenen sein. Diese Ebenen haben aber als gemeinsames Umhüllungsgebilde keine Fläche, sondern nur eine unendlich ferne Curve. Dass keine singuläre Integralfläche vorhanden ist, erkennt man analytisch nach (15) daraus, dass die Gleichung:

$$x \cos a + y \sin a - \varkappa z - b = 0$$

bei der Differentiation nach b eine absurde Relation liefert.

2. Beispiel. **2. Beispiel:** Es sei überhaupt eine partielle Differentialgleichung vorgelegt, die frei von x, y, z ist:

$$F\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0.$$

Hier sind die Elementarkegel ebenfalls einander congruent und gleichgestellt, da ihre Gleichung von ihren Spitzen (x, y, z) unabhängig ist. Diese Elementarkegel treffen, bis ins Unendliche ausgedehnt, die unendlich ferne Ebene in einer Curve c, und die ∞^2 Tangentenebenen der Curve c sind Integralflächen. (Vgl. § 1 des 7. Kap., S. 265.) Diese ∞^2 Ebenen stellen also eine *vollständige* Lösung dar. Die von ∞^1 solchen Ebenen umhüllten Flächen, d. h. die Developpabeln, welche die Curve c enthalten, stellen die *allgemeine* Lösung dar. Eine singuläre Integralfläche ist nicht vorhanden.

3. Beispiel. **3. Beispiel:** Es liege eine partielle Differentialgleichung von der Form:

$$F\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, z - x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

vor. Wie wir früher (§ 1 des 7. Kap., S. 266) sahen, wird ihr durch ∞^2 Ebenen genügt, die eine gewisse Fläche Ω berühren. Diese ∞^2 Ebenen bilden also eine *vollständige* Lösung. Die *allgemeine* Lösung wird von den Flächen gebildet, die von je ∞^1 dieser Ebenen umhüllt werden, und besteht daher aus den Developpabeln, die der Fläche Ω umschrieben sind. Die Fläche Ω ist hier eine *singuläre* Integralfläche und zwar die einzige.

4. Beispiel. **4. Beispiel:** Gehen wir einmal von einer vorgelegten vollständigen Lösung aus, d. h. von ∞^2 Flächen. Es mögen dies alle Kugeln vom Radius Eins sein, deren Mittelpunkte in der (xy)-Ebene liegen:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Um die zugehörige partielle Differentialgleichung zu finden, haben wir hieraus durch partielle Differentiation nach x und y die beiden Gleichungen abzuleiten:

$$x - a + z\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad y - b + z\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

und nun aus allen drei Gleichungen die willkürlichen Constanten a, b zu eliminieren. Dies giebt die partielle Differentialgleichung:

$$z^2\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]-1=0.$$

Jene ∞^2 Kugeln stellen eine *vollständige* Lösung dar. Die *allgemeine* Lösung besteht aus den Flächen, die von je ∞^1 derartigen Kugeln umhüllt werden, d. h. aus allen *Röhrenflächen*, deren Leitlinien beliebige Curven in der (xy)-Ebene sind, während ihr Radius gleich Eins ist. Die allgemeine Lösung ergiebt sich analytisch nach (14) durch Elimination von a, b aus

$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2-1=0, \quad \omega(a,b)=0,$$
$$(x-a)\frac{\partial \omega}{\partial b}-(y-b)\frac{\partial \omega}{\partial a}=0$$

oder, wenn wir $\omega=0$ in der aufgelösten Form $b-\varphi(a)=0$ schreiben, durch Elimination von a aus den beiden Gleichungen:

$$(x-a)^2+(y-\varphi(a))^2+z^2-1=0,$$
$$x-a+(y-b)\,\varphi'(a)=0.$$

Eine singuläre Integralfläche muss von allen jenen ∞^2 Kugeln berührt werden. Dies trifft, wie man geometrisch sofort einsieht, nur für die beiden Ebenen

$$z-1=0, \quad z+1=0$$

zu. In der That ist für jede solche Ebene $\frac{\partial z}{\partial x}\equiv\frac{\partial z}{\partial y}\equiv 0$, sodass die partielle Differentialgleichung befriedigt wird. Im gegenwärtigen Beispiel erhält man den Elementarkegel eines Punktes als den Kegel, der alle ∞^1 durch den Punkt gehende Kugeln vom Radius Eins und mit den Mittelpunkten in der (xy)-Ebene berührt. Wie man sieht, sind die Elementarkegel Rotationskegel, deren Axen auf der (xy)-Ebene senkrecht stehen und deren Öffnung nur von der z-Coordinate der Spitzen abhängt.

Es liegt in der Natur der Sache, dass man stets zu derselben allgemeinen Lösung kommt, von welcher vollständigen Lösung der partiellen Differentialgleichung man auch ausgehen mag. Es folgt dies daraus, dass wir aus einer vorgelegten vollständigen Lösung jede Integralfläche — abgesehen von den eventuell vorhandenen singulären Integralflächen und von den Integralflächen, die in der vorgelegten vollständigen Lösung selbst schon vorhanden sind — durch den Umhüllungsprocess ableiten können, den die Formeln (14) geben.

Auf die Frage, *ob eine vorgelegte partielle Differentialgleichung*

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0$$

überhaupt immer eine vollständige Lösung besitzt, sind wir hier nicht eingegangen. Im nächsten Paragraphen beschränken wir unsere Betrachtungen *formell* auf solche Gleichungen, die eine und infolge dessen unbegrenzt viele vollständige Lösungen haben. Da wir aber im folgenden Kapitel nach Cauchy zeigen werden, dass jede analytische Gleichung $F = 0$ wirklich vollständige Lösungen besitzt, so ergiebt sich nachträglich, dass die unter der Voraussetzung der Existenz von vollständigen Lösungen entwickelten Theorien in der That allgemein gültig sind.

§ 3. Erzeugung der Integralflächen durch die Charakteristiken.

Es war schon im zweiten Abschnitt von gewissen Curven, den *Charakteristiken*, die Rede, die mit den partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung in engem Zusammenhang stehen. (Vgl. § 1, des 7. Kap., S. 261.) Wir wollen in diesem und dem nächsten Paragraphen die Theorie der Charakteristiken, für deren Entwickelung neben Lagrange ganz besonders Monge in Betracht kommt, ausführlich darstellen.

Es sei also wiederum eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung in x, y, z vorgelegt:

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0. \tag{9}$$

Angenommen, es sei

$$z = \Phi(x, y, a, b) \tag{11}$$

eine vollständige Lösung der Differentialgleichung. Wie wir sahen, wird die allgemeine Lösung als die Gesamtheit der Flächen gewonnen, die von je ∞^1 Flächen (11) umhüllt werden. Analytisch geht sie also durch Elimination von a aus den beiden Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} z &= \Phi(x, y, a, \varphi(a)), \\ \frac{\partial \Phi(x, y, a, \varphi)}{\partial a} &+ \frac{\partial \Phi(x, y, a, \varphi)}{\partial \varphi}\varphi'(a) = 0 \end{aligned}\right. \tag{16}$$

hervor, in denen $\varphi(a)$ eine willkürlich zu wählende Function von a bedeutet. Die bestimmte Integralfläche, die bei einer bestimmten Wahl der Function $\varphi(a)$ durch (16) dargestellt wird, berührt als Umhüllende jede der ∞^1 Flächen

$$z = \Phi(x, y, a, \varphi(a)), \tag{17}$$

die in der vollständigen Lösung enthalten sind, nach einer Curve.

Um diese Curve auch analytisch abzuleiten, haben wir nach der Umhüllungstheorie ausser (17) die durch Differentiation nach a aus (17) hervorgehende Gleichung anzusetzen. So kommen wir gerade zu den beiden Gleichungen (16). Diese Gleichungen (16) haben demnach *zweierlei* Bedeutung:

Wenn man a aus (16) eliminiert, so ergiebt sich eine allgemeine Integral*fläche*. Wenn man dagegen a einen constanten Wert a_0 erteilt, so stellen die beiden Gleichungen (16) die *Curve* dar, nach der diese allgemeine Integralfläche von der Integralfläche

$$z = \Phi(x, y, a_0, \varphi(a_0)),$$

die zur vollständigen Lösung (11) gehört, berührt wird. Diese Curve heisst nach Monge eine *Charakteristik der partiellen Differentialgleichung* (9). Charakteristik.

Wollen wir *alle* Charakteristiken finden, so haben wir alle allgemeinen Integralflächen (16) zu betrachten, d. h. in (16) die Function $\varphi(a)$ völlig willkürlich zu lassen. Alsdann stellen die Gleichungen (16) alle Charakteristiken dar, wenn wir in ihnen a, $\varphi(a)$ und also auch $\varphi'(a)$ beliebige constante Werte a, b, c erteilen. Demnach geben die beiden Gleichungen:

$$(18) \qquad \begin{cases} z = \Phi(x, y, a, b), \\ \dfrac{\partial \Phi(x, y, a, b)}{\partial a} + \dfrac{\partial \Phi(x, y, a, b)}{\partial b} c = 0 \end{cases}$$

die Gesamtheit aller Charakteristiken, wenn man in ihnen a, b, c als Parameter auffasst. Da in ihnen nur *drei* Parameter a, b, c auftreten, so folgt, *dass die partielle Differentialgleichung* (9) *höchstens* ∞^3 *Charakteristiken hat.*

Wir zeigen nun, dass die partielle Differentialgleichung auch gerade ∞^3 Charakteristiken hat, sobald sie, wie wir voraussetzen, nicht auf lineare Form gebracht werden kann, sobald also der einem Punkte p von allgemeiner Lage zugeordnete Elementarkegel (vgl. § 2, S. 492) nicht in ein Büschel ausartet. Wird nämlich irgend eine Integralfläche ins Auge gefasst, die der vollständigen Lösung $z = \Phi$ angehört und den Punkt p enthält, so weiss man, dass sie den Elementarkegel des Punktes p berührt. Die Fläche hat also mit dem Kegel eine Tangentenebene gemein, die den Kegel nach einer Mantellinie g berührt. Eine benachbarte Integralfläche aus der Schar $z = \Phi$, die ebenfalls den Punkt p enthält, berührt den Kegel des Punktes p nach einer benachbarten Mantellinie g'. Nähert sich die zweite Fläche continuierlich der ersteren, so wird schliesslich g' mit g zusammenfallen. Andererseits geht dann die Schnittcurve beider Flächen in eine Charakteristik durch p über, und diese Charakteristik hat g zur Tangente in p. Nun ist zu beachten, dass es unter den ∞^2 Integralflächen der vollständigen Lösung $z = \Phi$ stets ∞^1 giebt, die durch den allgemein gewählten Punkt p gehen, und dort berühren sie den Elementarkegel von p nach seinen ∞^1 Mantellinien. Die Anzahl der Charakteristiken ist also so gross, dass durch jeden allgemein gewählten Punkt mindestens ∞^1 Charakteristiken gehen. Gäbe es überhaupt nur ∞^2 oder noch weniger Charakteristiken, so wäre dies nicht der Fall. Es giebt deshalb mindestens ∞^3 Charakteristiken. Halten wir dies mit dem vorigen Ergebnis zusammen, so ergiebt sich der

Anzahl der Charakteristiken.

Satz 1: *Eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung*

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0,$$

die sich nicht auf eine lineare Form bringen lässt, hat gerade ∞^3 *verschiedene Charakteristiken* *).

Da jede allgemeine Integralfläche je ∞^1 der durch (11) gegebenen Integralflächen längs Curven berührt, so enthält sie ∞^1 Charakteristiken. Diese Berührcurven können deshalb nicht zusammenfallen, weil die allgemeine Integralfläche als Ort dieser Berührcurven definiert werden kann.

Umhüllende der ∞^1 Char. auf einer Integr.-Fl.

Aus der allgemeinen Umhüllungstheorie folgt ferner, dass die auf einer allgemeinen Integralfläche gelegenen ∞^1 Charakteristiken eine Curve, eine Rückkehrcurve der Fläche, umhüllen. Wir erinnern hier an die Beweisführung dafür: Eine allgemeine Integralfläche, die durch (16) bei bestimmter Wahl der Function $\varphi(a)$ dargestellt wird, enthält die ∞^1 Charakteristiken:

$$z = \Phi(x, y, a, \varphi(a)),$$

$$\frac{\partial \Phi(x, y, a, \varphi)}{\partial a} + \frac{\partial \Phi(x, y, a, \varphi)}{\partial \varphi} \varphi'(a) = 0,$$

in deren Gleichungen a eine willkürliche Constante ist. Die hierdurch dargestellten ∞^1 Curven umhüllen dann und nur dann eine *Curve*, wenn die beiden Gleichungen zusammen mit den durch Differentiation nach a aus ihnen hervorgehenden Gleichungen eine Curve definieren. Aber durch Differentiation der ersten Gleichung nach a geht die zweite und

*) Die beschränkende Voraussetzung, dass die vorgelegte Differentialgleichung eine vollständige Lösung besitze, lassen wir hier wie später fort, da sich, wie schon zum Schluss des § 2, S. 498, bemerkt wurde, später herausstellen wird, dass diese Beschränkung nur formell ist.

durch Differentiation der zweiten eine neue Gleichung in x, y, a hervor. Insgesamt liegen also drei Gleichungen vor. Eine bestimmt a als Function von x, y, z, sodass die Substitution dieser Function in die beiden anderen Gleichungen bei passender Wahl der Function $\varphi(a)$ wirklich eine *Curve* liefert. Es ist also im Allgemeinen eine Umhüllungscurve, eine Rückkehrcurve der von den ∞^1 Charakteristiken erzeugten Integralfläche, vorhanden.

Wir zeigten vorhin, dass durch einen Punkt p von allgemeiner Lage mindestens ∞^1 Charakteristiken gehen, deren Linienelemente daselbst den Elementarkegel des Punktes p bilden. Daraus schlossen wir, dass es mindestens ∞^3 Charakteristiken giebt. Da wir aber andererseits wissen, dass es nicht mehr giebt, so folgt, dass durch p *gerade* ∞^1 Charakteristiken gehen.

Nun enthalten die ∞^3 Charakteristiken insgesamt ∞^4 Linienelemente. Sie definieren daher nach § 1 des 7. Kap., S. 249, 250, eine *Monge'sche Gleichung* Monge'sche Gl. für die Char.

$$\Omega(x, y, z;\ dx, dy, dz) = 0, \tag{19}$$

von der sie Integralcurven sind. Diese Monge'sche Gleichung ordnet jedem Punkte allgemeiner Lage ebenfalls einen Elementarkegel zu. Er wird von allen durch den Punkt p gehenden Linienelementen der Gleichung gebildet, also durch die ∞^1 Linienelemente der ∞^1 durch p gehenden Charakteristiken an der Stelle p und ist daher *identisch mit dem Elementarkegel, der dem Punkte durch die partielle Differentialgleichung zugeordnet wird.*

Früher, in § 1 des 7. Kap., fanden wir umgekehrt, ausgehend von einer Monge'schen Gleichung (19), eine partielle Differentialgleichung mit denselben Elementarkegeln. (Vgl. Satz 3, S. 260.) Wir werden die hier gewonnene Beziehung im nächsten Paragraphen auch analytisch ableiten.

Wir wollen uns nun die Frage vorlegen, *ob durch eine beliebig gewählte Curve c stets eine Integralfläche der partiellen Differentialgleichung hindurchgeht.* Integralfl. durch geg. Curve.

Ist dies der Fall, so ist die betreffende Integralfläche — sobald sie nicht der vollständigen Lösung angehört, in welchem Falle die Frage erledigt wäre, und sobald sie auch nicht singulär ist — die Umhüllende von ∞^1 Integralflächen der vollständigen Lösung $z = \Phi$. Dann ist die Curve c entweder auf allen diesen ∞^1 Integralflächen gelegen oder berührt jede der ∞^1 Flächen in je einem Punkte. Im ersten Falle wäre c eine Charakteristik. *Durch eine Charakteristik gehen aber unendlich viele Integralflächen*, denn um eine solche zu construieren, braucht man nur eine beliebige Schar von ∞^1 Flächen $z = \Phi$ auszuwählen, in der zwei benachbarte Flächen enthalten sind, die sich in der betrachteten Charakteristik schneiden, und dann die Umhüllende der ausgewählten ∞^1 Flächen zu construieren.

Sobald also die Curve c *keine* Charakteristik ist, müsste sie in jedem ihrer Punkte von je einer Integralfläche $z = \Phi$ berührt werden. Nehmen wir aber andererseits eine beliebige Curve c an, so gehen durch jeden Punkt (x_0, y_0, z_0) der Curve gerade ∞^1 der ∞^2 Integralflächen der vollständigen Lösung

$$z = \Phi(x, y, a, b),$$

nämlich die, deren Parameter a, b an die Bedingung

$$z_0 = \Phi(x_0, y_0, a, b)$$

geknüpft sind. Verlangt man ausserdem, dass die Curve c an der Stelle (x_0, y_0, z_0) von einer dieser ∞^1 Flächen berührt werde, so liefert dies eine zweite Bedingung für die Parameter a, b. Die Curve c wird also an der Stelle (x_0, y_0, z_0) nur von einer Fläche $z = \Phi$ (oder doch nur von einer discreten Anzahl) berührt werden. Längs der Curve c ergeben sich so ∞^1 Flächen, die eventuell in eine Fläche zusammenfallen. Ihre Umhüllende enthält die Curve c und ist ausserdem eine Integralfläche.

Allerdings wären hierbei Ausnahmefälle denkbar: Es wäre möglich, dass die Curve c in ihrem allgemein gewählten Punkte (x_0, y_0, z_0) von ∞^1 Integralflächen $z = \Phi$ berührt würde, die aber nicht die Curve enthielten; aber dieser Fall kann doch nur für eine discrete Anzahl von Curven im Raume eintreten. Denn die ∞^1 Integralflächen durch den Punkt (x_0, y_0, z_0) haben dort ∞^1 Flächenelemente, die einen Kegel bilden. Die Tangente der Curve c kann allen diesen Flächenelementen nur dann angehören, wenn der Kegel in ein Büschel von Flächenelementen oder gar in ein einziges Flächenelement ausartet. Da wir von den linearen partiellen Differentialgleichungen absehen, so kann eine solche Ausartung, wenn überhaupt, nur für einzelne Punkte oder für isolierte Curven oder für isolierte Flächen auftreten, wobei im letzteren Falle die Axen der Büschel die Fläche berührten und die Curve offenbar eine Charakteristik wäre.

Also hat sich ergeben:

Satz 2: *Durch eine Curve des Raumes* (x, y, z) *geht nur eine discrete Anzahl von Integralflächen einer vorgelegten partiellen Differential-*

gleichung erster Ordnung, es sei denn, dass die Curve eine Charakteristik ist. Durch jede Charakteristik geht eine stetige Schar von unendlich vielen Integralflächen.

Man kann daher die Charakteristiken als *Unbestimmtheitscurven* bezeichnen, da durch Angabe einer Charakteristik nicht zugleich bestimmte Integralflächen, die sie enthalten, angegeben werden. Unbestimmtheitscurven.

Aus dieser Eigenschaft der Charakteristiken folgt, dass ihre Definition von der gerade gewählten vollständigen Lösung unabhängig ist. Wenn also aus einer vollständigen Lösung durch die Lagrange'sche Methode eine allgemeine Lösung abgeleitet und alsdann eine Schar von ∞^2 allgemeinen Integralflächen als neue vollständige Lösung benutzt wird, so ergeben sich aus ihr dieselben ∞^3 Charakteristiken wie aus der ursprünglich benutzten vollständigen Lösung. Hieraus folgt:

Satz 3: *Zwei unendlich benachbarte allgemeine Integralflächen der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung*

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

schneiden einander stets in einer Charakteristik der partiellen Differentialgleichung. Berühren zwei allgemeine Integralflächen einander längs einer Curve, so ist die Curve eine Charakteristik.

Dass die Definition der Charakteristiken von der gerade gewählten vollständigen Lösung unabhängig ist, wird auch auf analytischem Wege im nächsten Paragraphen nachgewiesen werden.

Die im gegenwärtigen Paragraphen entwickelten Theorien sollen nun durch einige Beispiele erläutert werden.

1. Beispiel: Liegt die partielle Differentialgleichung Beispiele.

$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{\varkappa^2 + 1}{\varkappa^2}$$

vor (vgl. § 2, S. 495), so bilden alle ∞^2 Ebenen, die eine gewisse Neigung γ zur (xy)-Ebene haben, eine vollständige Lösung. Die ∞^3 Schnittgeraden je zweier unendlich benachbarter unter diesen Ebenen, d. h. die Geraden, die den Winkel γ mit der (xy)-Ebene bilden, sind also hier die Charakteristiken. (Vgl. § 1 des 7. Kap., S. 265.) Es sind dies alle Geraden, die einen gewissen unendlich fernen Kegelschnitt k treffen. Jene ∞^2 Ebenen sind die Tangentialebenen von k. Durch eine Curve c gehen zwei allgemeine Integralflächen, nämlich die abwickelbaren Flächen, die von allen gemeinsamen Tangentialebenen von k und c umhüllt werden. Nur wenn c eine der Treffgeraden von k ist, gehen durch sie unendlich viele Integralflächen, nämlich alle abwickelbaren Flächen, die aus Treffgeraden von k bestehen und diese eine Gerade enthalten. Im gegenwärtigen Beispiele spielt die Curve k selbst eine Ausnahmerolle: Durch jeden Punkt von k gehen nicht nur ∞^1, sondern ∞^2 Charakteristiken. Jede Integralfläche mit Ausnahme der ∞^2 Ebenen enthält k.

2. Beispiel: Liegt die partielle Differentialgleichung

$$z^2\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]-1=0$$

vor, so hat sie, wie wir sahen (§ 2, S. 497), als eine vollständige Lösung die Gesamtheit der ∞^2 Kugeln vom Radius Eins, deren Mittelpunkte in der (xy)-Ebene liegen. Je zwei unendlich benachbarte unter diesen Kugeln schneiden sich in einem Kreis vom Radius Eins, dessen Mittelpunkt in der (xy)-Ebene liegt und dessen Ebene auf der (xy)-Ebene senkrecht steht. Diese ∞^3 Kreise sind also hier die Charakteristiken. Wählen wir eine beliebige Curve c, so erhalten wir die durch sie gehenden Integralflächen, indem wir diejenigen ∞^1 Kugeln bestimmen, die sie berühren, vom Radius Eins sind und ihre Mittelpunkte in der (xy)-Ebene haben. Augenscheinlich giebt es zwei getrennte Scharen von solchen Kugeln. Sie haben zwei Umhüllende, nämlich Röhrenflächen. Es gehen also durch eine allgemein gewählte Curve c gerade zwei Integralflächen. Ist aber c einer jener Kreise, so gehen durch die Curve offenbar unendlich viele Röhrenflächen vom Radius Eins, nämlich alle die, deren Leitlinien in der (xy)-Ebene den Mittelpunkt jenes Kreises enthalten und dort zur Ebene des Kreises senkrecht sind.

§ 4. Die Differentialgleichungen der Charakteristiken.

Es liege wiederum eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung in x, y, z vor:

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)=0, \tag{20}$$

von der wir voraussetzen, dass sie *nicht* auf eine lineare Form gebracht werden könne. Zur Bequemlichkeit wollen wir von jetzt ab mit p, q die ersten, mit r, s, t die zweiten partiellen Ableitungen von z nach x, y bezeichnen. Die vorgelegte Differentialgleichung

$$F(x, y, z, p, q)=0 \tag{20'}$$

hat nun, wie wir im vorigen Paragraphen sahen, die Eigenschaft, dass durch eine allgemein gewählte Curve c im Raume nur eine discrete

Anzahl von Integralflächen hindurchgehen. Wir wollen jetzt auf analytischem Wege diejenigen Curven c, durch die eine continuierliche Schar von Integralflächen hindurchgeht, also die Charakteristiken, bestimmen. Von den nur vereinzelt eventuell vorkommenden Curven c, die bei der Betrachtung des vorigen Paragraphen eine Ausnahmerolle spielten, sehen wir ganz ab. Ferner setzen wir bekannt voraus, dass die vorgelegte Differentialgleichung eine vollständige Lösung und daher nach § 2 auch eine allgemeine Lösung besitze.

Es liege nun eine Curve c analytisch in der Form

(21) $$x = X(\tau), \quad y = Y(\tau), \quad z = Z(\tau)$$

mit dem Parameter τ vor. Wir betrachten die Integralflächen von (20′), die diese Curve enthalten. Für jede Integralfläche $z = \varphi(x, y)$ durch die Curve c haben mit x, y, z auch p, q; r, s, t längs der Curve c gewisse Werte, ausgedrückt als Functionen des Parameters τ. Um diese Werte zu berechnen, bedenken wir, dass p, q ausser der Gleichung (20′) noch die Bedingung Integralfl. durch geg. Curve.

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

erfüllen müssen. Die Werte von p und q ergeben sich somit in einem Punkte (τ) der Curve c nach (21) aus den beiden Gleichungen:

$$F(X, Y, Z, p, q) = 0,$$
$$Z' - pX' - qY' = 0,$$

wenn der Accent die Differentiation nach τ andeutet. Da die erste Gleichung nicht auf eine in p, q lineare Form gebracht werden kann, so lassen sich p, q aus diesen beiden Gleichungen längs der allgemein gewählten Curve c als Functionen von τ berechnen:

(22) $$p = P(\tau), \quad q = Q(\tau).$$

Zur Bestimmung von r, s, t im Punkte (τ) der Curve c haben wir nun zunächst die beiden Gleichungen, die aus der partiellen Differentialgleichung (20′) durch partielle Differentiation nach x bez. y hervorgehen, nämlich:

(23) $$F_x + F_z p + F_p r + F_q s = 0, \quad F_y + F_z q + F_p s + F_q t = 0,$$

und ausserdem die beiden Gleichungen:

$$dp - r\,dx - s\,dy = 0, \quad dq - s\,dx - t\,dy = 0,$$

die in Folge von (21) und (22) die Form haben:

(24) $$P' - rX' - sY' = 0, \quad Q' - sX' - tY' = 0.$$

Auch in (23) hat man sich die Werte von x, y, z, p, q als Functionen von τ aus (21) und (22) eingesetzt zu denken. Wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} F_p & F_q \\ X' & Y' \end{vmatrix}$$

nach den Substitutionen (21) und (22) nicht für alle Werte von τ gleich Null ist, so lassen sich aus den beiden linksstehenden Gleichungen (23) und (24) die Grössen r und s, aus den beiden rechtsstehenden die Grössen s und t als Functionen von τ berechnen. Die beiden Werte, die sich so für s ergeben, stimmen, nebenbei bemerkt, überein. Dies folgt ja von vornherein daraus, dass es wenigstens eine Integralfläche giebt, die durch die Curve c hindurchgeht.

Wenn nun aber nach den Substitutionen (21) und (22) die obige Determinante oder also die Determinante

$$\begin{vmatrix} F_p & F_q \\ \frac{dx}{d\tau} & \frac{dy}{d\tau} \end{vmatrix} \tag{25}$$

identisch Null ist, so würden die beiden linksstehenden Gleichungen (23) und (24) einander widersprechen, wenn nicht überhaupt alle zweireihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} F_p & F_q & -F_x - F_z p \\ \frac{dx}{d\tau} & \frac{dy}{d\tau} & \frac{dp}{d\tau} \end{vmatrix}$$

nach der Substitution der Werte (21) und (22) verschwänden. Entsprechendes gilt von den beiden rechtsstehenden Gleichungen (23) und (24). Im Fall des Verschwindens der Determinante (25) sind also alle zweireihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} F_p & F_q & -F_x - F_z p & -F_y - F_z q \\ \frac{dx}{d\tau} & \frac{dy}{d\tau} & \frac{dp}{d\tau} & \frac{dq}{d\tau} \end{vmatrix} \tag{26}$$

längs der Curve (21) gleich Null. In diesem Falle bestimmen die Gleichungen (23) und (24) nicht mehr r, s, t vollständig.

Differenziert man die Gleichungen (23) nochmals partiell nach x und nach y und fügt die Gleichungen

$$dr - \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx - \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dy = 0, \quad ds - \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx - \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dy = 0,$$

$$dt - \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dx - \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy = 0$$

hinzu, so liegen sechs Gleichungen zur Berechnung der vier dritten Ableitungen von z vor. Da wir wissen, dass durch die gewählte

Curve c stets eine Integralfläche geht, so ist es selbstverständlich, dass die Gleichungen einander nicht widersprechen. Man sieht, dass sich die dritten Ableitungen aus Gleichungen bestimmen, die in ihnen linear sind und die zu je zweien die Determinante (25) haben.

Das Entsprechende gilt, wie man übersieht, für die Berechnung der höheren Ableitungen von z längs der Curve (21).

Es hat sich also ergeben, dass sich nur dann nicht vollständig bestimmte Werte für die Ableitungen von z längs der Curve (21) ergeben, wenn die Determinante (25) längs der Curve identisch verschwindet, und dass alsdann überhaupt alle zweireihigen Determinanten der Matrix (26) längs der Curve (21) identisch gleich Null sind. Unendlich viele Integralfln. durch geg. Curve.

Diejenigen Curven also, durch die unendlich viele Integralflächen der partiellen Differentialgleichung (20′) hindurchgehen, werden daher notwendig zu den Curven (21) gehören, längs deren alle zweireihigen Determinanten der Matrix (26) identisch verschwinden, längs deren also:

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dp}{-F_x - F_z p} = \frac{dq}{-F_y - F_z q} = d\tau$$

ist. Da nun

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

ist, so sehen wir, dass die Functionen X, Y, Z, P, Q von τ längs einer solchen Curve die folgenden Bedingungen für x, y, z, p, q erfüllen müssen:

$$(27)\qquad \frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{F_p p + F_q q} = \frac{dp}{-F_x - F_z p} = \frac{dq}{-F_y - F_z q}.$$

Es hat sich also Folgendes ergeben:

Liegt eine Curve vor:

$$(28)\qquad x = X(\tau), \quad y = Y(\tau), \quad z = Z(\tau)$$

und bestimmt man die beiden übrigen Coordinaten p, q derjenigen Flächenelemente (x, y, z, p, q), die einerseits der partiellen Differentialgleichung:

$$(29)\qquad F(x, y, z, p, q) = 0$$

genügen und andererseits die Linienelemente $(x, y, z, dx:dy:dz)$ der Curve enthalten, indem man also p, q aus (29) und

$$(30)\qquad dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

mit Rücksicht auf (28) berechnet, so könnten alle höheren Ableitungen von z für die Lösungen

$$z = \varphi(x, y)$$

der partiellen Differentialgleichung (29), die Integralflächen durch die Curve (28) vorstellen, längs der Curve nur dann *nicht* vollständig bestimmte Functionen von τ sein, wenn die für x, y, z, p, q berechneten Functionen von τ die Gleichungen (27) erfüllen.

Simultane tot. Diffgln.

Betrachten wir nun dies Gleichungensystem (27). Es ist ein *System von vier simultanen totalen Differentialgleichungen* in x, y, z, p, q und als solches nach § 1, S. 489, der *linearen homogenen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung* für f:

$$(27') \quad F_p \frac{\partial f}{\partial x} + F_q \frac{\partial f}{\partial y} + (F_p p + F_q q) \frac{\partial f}{\partial z} - (F_x + F_z p) \frac{\partial f}{\partial p} - - (F_y + F_z q) \frac{\partial f}{\partial q} = 0$$

äquivalent. Die allgemeinste Lösung der letzteren ist eine willkürliche Function von *vier* unabhängigen Lösungen oder, was dasselbe sagt, das System (27) hat *vier von einander unabhängige Integrale. Eines davon ist* $F(x, y, z, p, q)$. Denn setzt man diese Function für f in (27') ein, so wird diese Gleichung identisch erfüllt. Es seien Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 drei von F und von einander unabhängige Lösungen von (27').

Da die Flächenelemente (x, y, z, p, q) einer Integralfläche der partiellen Differentialgleichung (29), also auch ihre Flächenelemente längs der Curve (28) die Gleichung $F = 0$ erfüllen, so kommt für uns als Lösung des Systems (27) von totalen Differentialgleichungen nur das folgende Gleichungensystem in Betracht:

$$(31) \qquad \left| \begin{array}{c} F(x, y, z, p, q) = 0, \\ \Psi_1(x, y, z, p, q) = c_1, \qquad \Psi_2(x, y, z, p, q) = c_2, \\ \Psi_3(x, y, z, p, q) = c_3, \end{array} \right.$$

in dem c_1, c_2, c_3 willkürliche Constanten sind.

Aus diesen vier Gleichungen lassen sich *mindestens zwei* von p, q freie Gleichungen ableiten:

$$(32) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \psi_1(x, y, z, c_1, c_2, c_3) = 0, \\ \psi_2(x, y, z, c_1, c_2, c_3) = 0. \end{array} \right.$$

Sie stellen Curven dar, unter denen diejenigen Curven enthalten sein müssen, durch die eine continuierliche Schar von Integralflächen geht. Da es solche Curven giebt, nämlich die im vorigen Paragraphen betrachteten *Charakteristiken*, so folgt zugleich, dass sich aus (31) *höchstens zwei* von p, q freie Gleichungen ableiten lassen, denn wenn zu (32) eine dritte Gleichung hinzuträte, so würden alle drei nicht mehr Curven im Raume, sondern nur Punkte darstellen.

Nach Satz 1 des vorigen Paragraphen (S. 500) hat nun die partielle Differentialgleichung erster Ordnung $F = 0$ gerade ∞^3 verschiedene Charakteristiken. Daraus folgt, da die Schar der Curven (32) nur von drei Parametern c_1, c_2, c_3 abhängt, *dass die Gleichungen* (32) *gerade und nur die* ∞^3 *Charakteristiken darstellen.* Zu jedem Wertsystem (c_1, c_2, c_3) der drei Parameter gehört dabei eine der ∞^3 Charakteristiken. Gehen wir zu den Gleichungen (31) zurück, die noch p und q enthalten, so sehen wir, dass sie bei gegebenen constanten Werten von c_1, c_2, c_3 gerade ∞^1 Flächenelemente definieren und zwar diejenigen ∞^1 Flächenelemente (x, y, z, p, q) der partiellen Differentialgleichung $F = 0$, die längs der bestimmt gewählten Charakteristik (c_1, c_2, c_3) gelegen sind, d. h. die je eines der Linienelemente dieser Charakteristik enthalten. Erteilen wir c_1, c_2, c_3 alle möglichen constanten Werte, so geben uns also die Gleichungen (31) insgesamt ∞^3 Scharen von je ∞^1 Flächenelementen, die längs der ∞^3 Charakteristiken gelegen sind. Im ganzen sind dies alle ∞^4 Flächenelemente, die durch die Gleichung $F = 0$ definiert sind.

Da die Gleichungen (31) durch Integration aus dem Systeme (27) von vier simultanen totalen Differentialgleichungen hervorgegangen sind, so folgt, dass die ∞^3 Charakteristiken oder — wenn man will — die ∞^3 Scharen von je ∞^1 Flächenelementen der Gleichung $F = 0$ längs der ∞^3 Charakteristiken analytisch durch das totale System (27) unter Hinzunahme der Gleichung $F = 0$ selbst definiert werden. Wir sprechen dies so aus:

Satz 4: *Liegt die nicht lineare partielle Differentialgleichung in* Diffgln. der Charakteristiken.
x, y, z *vor:*

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

so werden ihre ∞^3 *Charakteristiken durch das System von vier simultanen gewöhnlichen Differentialgleichungen:*

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{F_p p + F_q q} = \frac{dp}{-F_x - F_z p} = \frac{dq}{-F_y - F_z q}$$

definiert, von dem F *selbst ein Integral ist. Sind* Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 *drei von* F *und von einander unabhängige Integrale dieses Systems, so ergeben sich die endlichen Gleichungen der Charakteristiken durch Elimination von* p *und* q *aus den vier Gleichungen*

$$F = 0, \quad \Psi_1 = \text{Const.}, \quad \Psi_2 = \text{Const.}, \quad \Psi_3 = \text{Const.}$$

Wir wollen insbesondere die Charakteristiken betrachten, die durch einen Punkt allgemeiner Lage (x, y, z) hindurchgehen. Es sind dies gerade ∞^1 Charakteristiken. Sie bestimmen im Punkte (x, y, z) den

Elementarkegel. *Elementarkegel der Charakteristiken*, von dem im vorigen Paragraphen (S. 500) die Rede war. Will man den Kegel analytisch darstellen, so hat man zu beachten, dass nach (27) die Fortschreitungsrichtung $(dx : dy : dz)$ längs einer Charakteristik durch die Gleichungen

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{F_p p + F_q q} \tag{33}$$

bestimmt wird, in denen x, y, z, p, q an die Bedingung

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{29}$$

gebunden sind. Die Gleichung des Kegels:

$$\Omega(x, y, z;\ dx, dy, dz) = 0 \tag{34}$$

geht daher durch Elimination von p und q aus den drei Gleichungen (33) und (29) hervor.

Zugehörige Monge'sche Gl. Zugleich ist die so hervorgehende Gleichung (34) die *Monge'sche Gleichung, zu deren Integralcurven die Charakteristiken gehören*, d. h. nach den Entwickelungen des vorigen Paragraphen (S. 501) *die zur partiellen Differentialgleichung $F = 0$ gehörige Monge'sche Gleichung.* Denn wir haben ja im vorigen Paragraphen erkannt, dass der Elementarkegel, der von den Charakteristiken durch einen gegebenen Punkt (x, y, z) in diesem Punkte gebildet wird, mit dem Elementarkegel identisch ist, der im Punkte (x, y, z) von denjenigen ∞^1 Flächenelementen umhüllt wird, die dem Punkte vermöge der partiellen Differentialgleichung $F = 0$ zugeordnet werden. Dies können wir hier von Neuem nachweisen: Will man die Richtung $(dx : dy : dz)$ einer Mantellinie des letzteren Kegels bestimmen, so hat man im Punkte (x, y, z) die Schnittlinie der Ebenen zweier solcher unmittelbar benachbarter Flächenelemente (x, y, z, p, q) und $(x, y, z, p + dp, q + dq)$ zu suchen, die der Gleichung (29) genügen, für die also ausser (29) noch

$$F_p\,dp + F_q\,dq = 0 \tag{35}$$

ist. Die Ebene des ersteren Elementes hat in den laufenden Coordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ die Gleichung

$$\mathfrak{z} - z - p(\mathfrak{x} - x) - q(\mathfrak{y} - y) = 0,$$

sodass für die Schnittlinie ausser dieser noch die Gleichung

$$dp(\mathfrak{x} - x) + dq(\mathfrak{y} - y) = 0$$

oder also nach (35) noch die Gleichung

$$F_q(\mathfrak{x} - x) - F_p(\mathfrak{y} - y) = 0$$

besteht. Die Richtung $(dx : dy : dz)$ der Schnittlinie wird somit aus den beiden Gleichungen:

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0, \quad F_q\,dx - F_p\,dy = 0$$

gewonnen. Es kommt:

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{F_p p + F_q q}.$$

Alle Mantellinien des Kegels erhält man also durch Elimination von p und q aus diesen beiden Gleichungen und aus $F = 0$. So kommt man aber genau wieder zur Gleichung

(34) $$\Omega(x, y, z;\ dx, dy, dz) = 0.$$

Hiermit ist das frühere Ergebnis von Neuem bewiesen. Wir fassen dies zusammen in dem

Satz 5: *Liegt eine nicht lineare partielle Differentialgleichung*

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

im Raume (x, y, z) vor, so bestimmt sie ∞^4 Flächenelemente. Der Elementarkegel, der von den ∞^1 Elementen umhüllt wird, die durch einen allgemein gewählten Punkt (x, y, z) gehen, ist identisch mit dem Elementarkegel, der von den ∞^1 Charakteristiken durch diesen Punkt bestimmt wird. Die Gleichung dieses Kegels geht durch Elimination von p und q aus den drei Gleichungen

$$F = 0, \quad \frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{F_p p + F_q q}$$

hervor. Sie ist zugleich die Monge'sche Gleichung

$$\Omega(x, y, z;\ dx, dy, dz) = 0,$$

deren Elementarkegel mit den Elementarkegeln der partiellen Differentialgleichung identisch sind und zu deren Integralcurven die Charakteristiken gehören.

In § 1 des 7. Kap. haben wir — in Satz 3, S. 260 — erkannt, wie man aus einer vorgelegten Monge'schen Gleichung $\Omega = 0$ diejenige partielle Differentialgleichung $F = 0$ ableitet, deren Integralflächen die Elementarkegel berühren, die ihren Punkten durch $\Omega = 0$ zugeordnet werden. Hier haben wir den umgekehrten Weg eingeschlagen. (Vgl. hiermit die Note auf S. 262.)

Kennt man die ∞^3 Charakteristiken (32) der partiellen Differentialgleichung, so kann man ohne weiteres *die durch eine beliebig gegebene Curve c gehende Integralfläche construieren.* Zu diesem Zweck betrachtet man in jedem Punkte der Curve c diejenigen Flächenelemente, die durch die Differentialgleichung $F = 0$ daselbst bestimmt werden. Constr. der Integralfl. durch geg. Curve.

Sie umhüllen in jedem Punkte p von c einen Elementarkegel. (Siehe Fig. 90.) Alsdann legt man durch die Tangente in p eine Tangentialebene e an den Kegel. Das Flächenelement (p, e), dessen Punkt der Punkt p und dessen Ebene die Tangentialebene e ist, gehört dann zu den ∞^4 Flächenelementen, die durch $F = 0$ bestimmt werden. So verfahren wir in jedem Punkte p von c. Eine Integralfläche von $F = 0$ enthält nun nur solche Flächenelemente, die zu den ∞^4 durch $F = 0$ gegebenen Elementen gehören. Soll die Fläche durch c gehen, so muss sie daher längs c gerade die soeben construierten ∞^1 Flächenelemente (p, e) enthalten. Ferner wissen wir, dass die Integralfläche ∞^1 Charakteristiken enthält, nach § 3, S. 500. Die durch p gehende Charakteristik γ der Fläche muss dort das in p construierte Flächenelement (p, e) berühren. Sie ist demnach diejenige unter den ∞^1 durch p gehenden Charakteristiken, die den Elementarkegel längs der Mantellinie berührt, die die Ebene e mit dem Kegel gemein hat. So können wir in jedem Punkt p von c die betreffende Charakteristik γ construieren. Die von diesen ∞^1 Charakteristiken gebildete Fläche muss alsdann die Integralfläche sein, auf der die Curve c liegt.

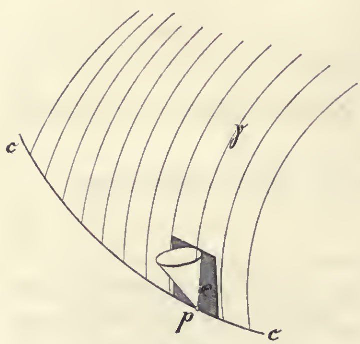

Fig. 90.

Im allgemeinen wird man im Punkte p mehr als eine Tangentialebene e an die Curve c und den Elementarkegel des Punktes p legen können, sodass die Construction, die wir soeben ausführten, eine discrete Anzahl von Integralflächen durch c liefert.

Es wird nicht überflüssig sein, nochmals darauf hinzuweisen, dass diese Betrachtungen wesentlich auf der vorausgesetzten Existenz einer vollständigen Lösung der partiellen Differentialgleichungen beruhen. Den Existenzbeweis für die vollständige Lösung bringen wir, wie wiederholt bemerkt wurde, im nächsten Kapitel.

Wir erläutern die vorgetragenen Theorien schliesslich wieder durch einige Beispiele.

Beispiele. **1. Beispiel:** Es liege die schon häufig besprochene partielle Differentialgleichung

$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{\varkappa^2 + 1}{\varkappa^2}$$

oder

$$F \equiv p^2 + q^2 - \frac{1}{\varkappa^2} = 0$$

vor. Hier lautet das System (27):

$$\frac{dx}{p} = \frac{dy}{q} = \frac{dz}{p^2 + q^2} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{0}.$$

Offenbar sind

$$p, \quad q, \quad (p^2 + q^2)x - pz, \quad (p^2 + q^2)y - qz$$

vier von einander unabhängige Integrale. Wegen $F = 0$ können wir daher setzen:

$$p = \frac{1}{\varkappa}\cos c_1, \quad q = \frac{1}{\varkappa}\sin c_1,$$

$$(p^2 + q^2)x - pz = c_2, \quad (p^2 + q^2)y - qz = c_3.$$

Elimination von p, q aus diesen vier Gleichungen liefert die beiden Gleichungen für die Charakteristiken:

$$x - \varkappa\cos c_1 \cdot z = \varkappa^2 c_2, \quad y - \varkappa\sin c_1 \cdot z = \varkappa^2 c_3,$$

die ∞^3 Geraden darstellen, nämlich die Geraden, die mit der (xy)-Ebene den Winkel γ bilden, dessen Tangente gleich $\frac{1}{\varkappa}$ ist. (Vgl. § 1 des 7. Kap., S. 265.) Will man die zugehörige Monge'sche Gleichung bestimmen, so hat man aus $F = 0$ und aus

$$\frac{dx}{p} = \frac{dy}{q} = \frac{dz}{p^2 + q^2}$$

p und q zu eliminieren. Es kommt:

$$dx^2 + dy^2 - \varkappa^2 dz^2 = 0,$$

also die Monge'sche Gleichung, von der wir auf S. 262 ausgingen.

2. Beispiel: Liegt die partielle Differentialgleichung

$$F \equiv z^2(1 + p^2 + q^2) - 1 = 0$$

vor, so lautet das System von simultanen totalen Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{zp} = \frac{dy}{zq} = \frac{dz}{z(p^2 + q^2)} = \frac{dp}{-p(1 + p^2 + q^2)} = \frac{dq}{-q(1 + p^2 + q^2)}.$$

Es sind F, $x + zp$, $y + zq$, $\frac{p}{q}$ vier von einander unabhängige Integrale. Ausser $F = 0$ setzen wir daher noch:

$$x + zp = c_1, \quad y + zq = c_2, \quad \frac{p}{q} = c_3$$

und erhalten durch Elimination von p und q:

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 + z^2 = 1,$$
$$x - c_1 - c_3(y - c_2) = 0.$$

Diese beiden Gleichungen stellen die ∞^3 Kreise vom Radius Eins dar, deren Mittelpunkte in der (xy)-Ebene liegen und deren Ebenen auf der (xy)-Ebene senkrecht stehen. Dass diese Kreise die Charakteristiken sind, steht in Einklang mit § 3, S. 504. Aus den Gleichungen $F = 0$ und

$$\frac{dx}{p} = \frac{dy}{q} = \frac{dz}{p^2 + q^2}$$

ergiebt sich in diesem Beispiel als die zugehörige Monge'sche Gleichung durch Elimination von p und q die folgende:

$$(z^2 - 1)(dx^2 + dy^2) + z^2 dz^2 = 0.$$

§ 5. Ältere Untersuchungen über partielle Differentialgleichungen erster Ordnung.

Wir wollen versuchen, unsere Auffassung der geschichtlichen Entwickelung, welche die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung in drei Veränderlichen bietet, in Kürze darzulegen.

Naturgemäss traten von den Differentialgleichungen zuerst die *gewöhnlichen* in der mathematischen Litteratur auf. Alsdann führte Euler *totale* Differentialgleichungen, welche die Integrabilitätsbedingungen erfüllen, auf gewöhnliche Differentialgleichungen zurück. Von ihm rühren ferner die ersten Untersuchungen über Systeme von simultanen gewöhnlichen Differentialgleichungen sowie der allgemeine Begriff: Integrabilitätsfactor her.

Euler.

Die ersten Untersuchungen über *partielle* Differentialgleichungen erster und höherer Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen wurden von Euler und d'Alembert angestellt. Uns interessieren hier aber nur die partiellen Differentialgleichungen *erster* Ordnung. Euler integrierte eine grosse Anzahl derartiger Gleichungen, unter denen wir hier als Beispiele die folgenden erwähnen*):

d'Alembert.

$$q = \varphi(x, y)\, p + \psi(x, y), \qquad q = \varphi(y, p)\, x + \psi(y, p),$$
$$y = \varphi(p, q)\, x + \psi(p, q), \qquad \varphi(p, x) = \psi(q, y),$$
$$q = \varphi(x, y)\, p + \psi(y, z), \qquad q = a p^n x^\lambda y^\mu z^\nu.$$

Obgleich Euler viele partielle Differentialgleichungen erster (und höherer) Ordnung integrierte, fehlte ihm doch eine allgemeine Integrationstheorie. Wie man sieht, untersuchte er sowohl lineare als auch nicht lineare partielle Differentialgleichungen.

Lineare part. Diffgln. 1. O.

Zunächst wollen wir uns nun mit der geschichtlichen Entwickelung der *linearen* partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung beschäftigen.

Der Zusammenhang zwischen dem System von zwei simultanen gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$$

*) Anstelle der einzelnen Abhandlungen von Euler aus früheren Jahren nennen wir das Werk: Euler, *Institutiones calculi integralis,* 3. Bd. Petersburg 1770 (2. Aufl. Petersburg 1793).

und der linearen homogenen partiellen Differentialgleichung mit drei unabhängigen Veränderlichen

$$X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}+Z\frac{\partial f}{\partial z}=0$$

wurde, wenn wir nicht irren, schon von Euler erkannt. Dagegen rührt die allgemeine Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen und die Theorie der Systeme von simultanen gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung von Lagrange her.

Lagrange betrachtete 1779 *) die allgemeine *lineare*, aber nicht homogene partielle Differentialgleichung erster Ordnung in n unabhängigen Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$: Lagrange.

$$X_1(x_1\cdots x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_1}+\cdots+X_n(x_1\cdots x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_n}=Z(z, x_1\cdots x_n) \tag{36}$$

und führte ihre Integration zurück auf die Integration des Systems von simultanen gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\frac{dx_1}{X_1}=\cdots=\frac{dx_n}{X_n}=\frac{dz}{Z}. \tag{37}$$

Er führte aber 1785 auch **) die Integration dieses Systems auf die Integration der linearen *homogenen* Gleichung:

$$X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\cdots+X_n\frac{\partial f}{\partial x_n}+Z\frac{\partial f}{\partial z}=0 \tag{38}$$

zurück. Setzen wir insbesondere voraus, dass hierin $Z\equiv 0$ und $X_1, X_2 \ldots X_n$ frei von z seien, so werden die Gleichungen (38) und (36), abgesehen von der Bezeichnung der unbekannten Function, mit einander identisch.

Die völlige Äquivalenz des Integrationsproblems eines Systems (37) von simultanen gewöhnlichen Differentialgleichungen mit dem Integrationsproblem der linearen homogenen Gleichung (38) ist somit als Specialfall in Lagrange's allgemeiner Theorie enthalten. Es erscheint uns daher unerfindlich, was Jacobi wesentlich Neues in *dieser* Hinsicht sollte geleistet haben, wenn sich auch Jacobi nach anderer Richtung hin die grössten Verdienste um die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung in beliebig vielen Veränderlichen erworben hat; wir erinnern insbesondere an die Multiplicatortheorie, die Theorie der Functionaldeterminanten und die Jacobi'sche Identität.

Bei unserer Darstellung von Lagrange's Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen in § 1 dieses Kap. haben wir die unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2 \ldots x_n$ als Punktcoordinaten in einem Raume von n Dimensionen gedeutet, sodass alsdann das System von $n-1$ simultanen gewöhnlichen Differentialgleichungen Deutg. im Raum von n Dimens.

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\cdots=\frac{dx_n}{X_n} \tag{39}$$

jedem Punkte $(x_1 \ldots x_n)$ eine Fortschreitungsrichtung, also ein Linienelement $(x_1, \ldots x_n, dx_1 : \cdots : dx_n)$ zuordnet. Die somit bestimmten ∞^n Linienelemente

*) Lagrange, *Sur différentes questions d'analyse relatives à la théorie des intégrales particulières.* Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin, 1779. Siehe auch Oeuvres, 4. Bd., S. 585. (Insbes. S. 624.)

**) Lagrange, *Méthode générale pour intégrer les équations aux différences partielles du premier ordre, lorsque ces différences ne sont que linéaires.* Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin, 1785. Siehe auch Oeuvres, 5. Bd., S. 543.

im n-dimensionalen Raume lassen sich in ∞^{n-1} Curven von je ∞^1 Elementen zusammenfassen, und diese Curven sind die Integralcurven. Es braucht kaum bemerkt zu werden, dass bei Lagrange diese geometrische Deutung nicht vorkommt. Wie nützlich sie aber ist, möge an folgendem Beispiel erläutert werden:

Anwendg. der geom. Deutg. Jacobi behandelte 1827*) unter anderem die Frage, bei vorgelegtem System (39) ein solches System von r ($< n$) Gleichungen in $x_1 \dots x_n$ aufzustellen, das die Gleichungen (39) erfüllt. Diese Frage lässt sich nun in der Sprache der Mannigfaltigkeitslehre im Raume $(x_1 \dots x_n)$ so formulieren: Es sollen alle diejenigen $(n-r)$-dimensionalen Punkt-Mannigfaltigkeiten bestimmt werden, die in jedem Punkte das Linienelement enthalten, das dem Punkte durch das System (39) zugeordnet wird. Fassen wir eine solche $(n-r)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit als einen Raum auf, so erkennen wir, dass sich die den ∞^{n-r} Punkten dieses Raumes vermöge (39) zugeordneten Linienelemente zu ∞^{n-r-1} Curven zusammenfassen lassen, und diese Curven gehören im Raume $(x_1 \dots x_n)$ mit zu den ∞^{n-1} Integralcurven des Systems (39). Die gesuchten Mannigfaltigkeiten werden daher von ∞^{n-r-1} Integralcurven des Systems (39) erzeugt. Sind

$$u_1 = \text{Const.}, \cdots u_{n-1} = \text{Const.}$$

die Gleichungen der ∞^{n-1} Integralcurven von (39), so wird also die fragliche Mannigfaltigkeit dargestellt durch r Gleichungen von der Form:

$$f_1(u_1 \cdots u_{n-1}) = 0, \cdots f_r(u_1 \cdots u_{n-1}) = 0. \tag{40}$$

Umgekehrt leuchtet ein, dass r von einander unabhängige Gleichungen von dieser Form stets eine der Mannigfaltigkeiten darstellen, die ∞^{n-r-1} Integralcurven des Systems (39) enthalten. Die Frage von Jacobi führt daher auf die Gleichungen (40). Zu demselben Ergebnis kommt Jacobi durch ein analytisches Verfahren, das, so elegant es auch sein mag, doch weniger durchsichtig ist als die soeben angestellte begriffliche Überlegung.

Wir kommen auf die Benutzung begrifflicher Betrachtungen in höheren Räumen für die Theorie der Differentialgleichungen nachher ausführlicher zurück.

Das soeben entwickelte, von Jacobi herrührende Ergebnis steht, wie wir hier nebenbei bemerken, in genauem Zusammenhang mit einem Satze der Lieschen Gruppentheorie, ohne sich aber damit völlig zu decken. Dieser Satz sagt aus, dass alle Mannigfaltigkeiten, die bei allen Transformationen einer eingliedrigen Gruppe mit der infinitesimalen Transformation

$$X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

invariant bleiben, von *Bahncurven* erzeugt werden, wenn nicht alle ihre Punkte in Ruhe bleiben. (Vgl. § 3 des 4. Kap., S. 108, 109.)

Allg. part. Diffgln. 1. O. Wir wenden uns jetzt zur Skizzierung der geschichtlichen Entwickelung, soweit sie sich auf *nicht lineare* partielle Differentialgleichungen erster Ordnung bezieht. Die allgemeine Theorie dieser Differentialgleichungen rührt von Lagrange

Lagrange. her, zu dessen schönsten Leistungen sie gehört. In seiner ersten Arbeit hierüber

*) Jacobi, *Über die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.* Crelles Journal 2. Bd. (1827), S. 317, insbes. S. 321. Siehe auch: *Dilucidationes de aequationum differentialium vulgarium systematis earumque connexione cum aequationibus differentialibus partialibus linearibus primi ordinis.* Crelles Journal 23. Bd. (1842), S. 1. Gesammelte Werke, 4. Bd. S. 1 und 148.

aus dem Jahre 1772 *) betrachtete er eine allgemeine partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen x, y und einer abhängigen Veränderlichen z. Er dachte sich durch die partielle Differentialgleichung die Grösse q bestimmt als Function von x, y, z, p:

$$q - Q(x, y, z, p) = 0 \tag{41}$$

und suchte p derart als Function P von x, y, z zu bestimmen, dass die beiden Gleichungen

$$q - Q(x, y, z, p) = 0, \qquad p - P(x, y, z) = 0$$

∞^1 gemeinsame Integralflächen haben, oder, wie er es analytisch aussprach, dass der Ausdruck

$$dz - p\,dx - q\,dy$$

nach Multiplication mit einem geeigneten Factor $M(x, y, z)$ ein vollständiges Differential dN wird. Zunächst muss

$$\frac{\partial N}{\partial z} = M, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -Mp, \quad \frac{\partial N}{\partial y} = -Mq$$

sein, woraus die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial M}{\partial x} = -\frac{\partial Mp}{\partial z}, \quad \frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\partial Mq}{\partial z}, \quad \frac{\partial Mp}{\partial y} = \frac{\partial Mq}{\partial x}$$

hervorgehen. Setzt man in die letzte dieser drei Gleichungen die Werte von $\frac{\partial M}{\partial x}$ und $\frac{\partial M}{\partial y}$ aus den beiden ersten ein, so kommt:

$$\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} - p\frac{\partial q}{\partial z} + q\frac{\partial p}{\partial z} = 0. \tag{42}$$

Hierin ist q die gegebene Function Q von x, y, z, p, sodass die Gleichung ausführlich geschrieben so lautet:

$$-Q_p\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} + (Q - pQ_p)\frac{\partial p}{\partial z} - Q_x - pQ_z = 0. \tag{42'}$$

Lagrange zeigte, dass, sobald eine solche Lösung $p = P$ dieser *linearen* partiellen Differentialgleichung erster Ordnung gefunden ist, die eine willkürliche Constante α enthält, durch Integration der beiden Gleichungen

$$q - Q(x, y, z, p) = 0, \qquad p - P(x, y, z, \alpha) = 0,$$

die ja $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ als Functionen von x, y, z ergeben, eine Schar von ∞^2 Integralflächen der vorgelegten partiellen Differentialgleichung erster Ordnung (41) gefunden wird. Alsdann zeigte er, wie man durch *Variation der Constanten*, also dadurch, dass man die Constante α durch eine passende Function ersetzt, aus der so erhaltenen *vollständigen* Lösung eine *allgemeine* Lösung der partiellen Differentialgleichung (41) ableiten kann. Vollst. u. allg. Lösg.

Hiermit hatte also Lagrange das Integrationsproblem der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung auf das Integrationsproblem der *linearen* partiellen Differentialgleichung (42′) zurückgeführt. Verbindet man dies Ergebnis mit seiner oben erwähnten Reduction der linearen partiellen Differentialgleichungen auf Systeme von simultanen gewöhnlichen Differentialgleichungen, so erkennt man, dass Lagrange zu dem Ergebnis gelangt war, *beliebige partielle Differential-* Reduction auf gew. Diffgln.

*) Lagrange, *Sur l'intégration des équations à différences partielles du premier ordre*, Mém. de l'Acad. de Berlin, 1772. Siehe auch Oeuvres, 3. Bd., S. 549.

gleichungen erster Ordnung in x, y, z auf Systeme von simultanen gewöhnlichen Differentialgleichungen zurückzuführen. Wenn sich auch bei Lagrange diese letztere Schlussfolgerung in seinen Arbeiten nicht ausdrücklich findet, so geht sie doch aus seinen Theorien aus den Jahren 1772 bis 1785 unmittelbar hervor *).

Dem steht nun gegenüber, dass Lagrange selbst in seiner früher erwähnten Abhandlung aus dem Jahre 1785 an einer Stelle **), an der er sich mit Trajectorien einer Flächenschar beschäftigte, wobei er auf eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung geführt wurde, die Bemerkung machte, dass es unmöglich wäre, diese Differentialgleichung durch eine der bis dahin bekannten Methoden zu integrieren. Ferner behauptete Lacroix 1798***), dass Charpit im Jahre 1784 in einer bei der Pariser Academie eingereichten Abhandlung, die aber nicht gedruckt wurde, die Reduction der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung auf gewöhnliche Differentialgleichungen geleistet habe, und gab 1814 ein Referat über diese Abhandlung. Schon Jacobi †) fand diese Behauptung von Lacroix auffallend und sprach den Wunsch aus, dass die Arbeit Charpit's veröffentlicht werden möchte. Dieser Aufforderung ist aber nie Folge geleistet worden. Es ist also unmöglich, die Richtigkeit der Behauptung Lacroix' zu bestätigen. Selbst wenn sie in Ordnung ist, erscheint uns das Verdienst Charpit's gegenüber den oben auseinandergesetzten Ergebnissen Lagrange's verschwindend. Wir glauben, dass die vorhin erwähnte allerdings auffallende Bemerkung von Lagrange selbst darin ihre Erklärung findet, dass Lagrange bei der Besprechung jenes Beispiels momentan an seine eigene allgemeine Theorie nicht gedacht hat.

Charpit.

Wir müssen noch erwähnen, dass Lagrange seine Theorie der vollständigen Lösungen sofort auch auf den Fall *beliebig vieler Veränderlicher* ausgedehnt hat.

Monge.

Lagrange benutzte die Sprache der Analysis, während Monge ††) die von Lagrange gegebene Ableitung der allgemeinen Lösung aus einer vollständigen Lösung in der Sprache der Geometrie als eine Umhüllungstheorie darstellte. Auch führte Monge den Begriff: *Charakteristik* ein.

Charakteristik.

Elementarkegel.

Der Begriff: *Elementarkegel* kommt bei Lagrange und Monge wohl vor, aber nur ganz *gelegentlich.* Insbesondere wird er nicht als Ausgangsbegriff benutzt und als solcher systematisch verwendet. Dies geschah vielmehr erst 1857 durch Bonnet †††), dessen Arbeiten nicht hinlängliche Beachtung gefunden zu haben scheinen. In bezug auf den Elementarkegel hatte Lie 1872 *†) die Bemerkung

Bonnet.

*) Wir benutzen diese Gelegenheit, um eine frühere Fussnote, die auf S. 265, zu berichtigen. In der That hat Lagrange die allgemeine Differentialgleichung von der Form

$$F(p,\ q,\ z - xp - yq) = 0$$

schon 1774 integriert. (Vgl. Oeuvres 4. Bd., S. 634.) Später, in seinen *Leçons sur le calcul des fonctions analytiques* (Oeuvres 10. Bd., S. 348) citiert er selbst Monge in bezug auf die Erzeugung und analytische Darstellung der Integralflächen.

**) Lagrange, a. a. O. S. 560.

***) Lacroix, *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral.* 2. Bd. Paris 1798, S. 496. Zweite Aufl. Paris 1814, S. 548.

†) Jacobi, *Dilucidationes etc.* in d. Gesamm. Werken 4. Bd., S. 151.

††) Statt der einzelnen Abhandlungen von Monge, die fast gleichzeitig mit den Arbeiten von Lagrange erschienen, nennen wir das Werk: Monge, *Application de l'analyse à la géométrie.* Fünfte Auflage Paris 1850, hier insbes. S. 421.

†††) Bonnet, *Sur un théorème de Jacobi relatif à l'intégration des équations aux différences partielles du premier ordre*, Comptes Rendus 45. Bd., 1857, S. 581.

*†) Lie, *Über Complexe, insbesondere Linien- und Kugelcomplexe, mit Anwendung auf die Theorie partieller Differentialgleichungen.* Math. Ann. 5. Bd. (1872), S. 152.

gemacht: „Eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung in x, y, z ist nach Monge mit dem Problem äquivalent, die allgemeine Fläche zu finden, die in allen ihren Punkten einen dem betreffenden Punkte nach einem beliebigen Gesetze zugeordneten Kegel berührt." Diese starke Hervorhebung von Monge veranlasste 1877 eine Reclamation durch P. du Bois-Reymond, der in den Jahren 1864 und 1865 Untersuchungen über partielle Differentialgleichungen erster Ordnung veröffentlicht hatte *).

Indem wir von dieser Reclamation einen Teil, dessen Hinfälligkeit nach unserer Ansicht auf der Hand liegt, übergehen, geben wir die folgenden Bemerkungen du Bois-Reymond's wieder: „Mir ist allerdings ebenfalls bei Monge und auch bei Lagrange eine Stelle aufgestossen, wo diese Autoren bemerken, dass der Gleichung $F(x, y, z, p, q) = 0$ ein gewisser Kegel entspricht, was übrigens auch nahe liegt. Es folgt aber bei den genannten Autoren auf diese Bemerkung ein Weiteres nicht, und insbesondere Monge macht von ihr keinen Gebrauch in seiner Theorie der Charakteristiken" **). Aber, wie oben gesagt wurde, hat Bonnet sieben Jahre früher als du Bois-Reymond den Begriff: Elementarkegel als Grundlage der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung eingeführt.

Selbstverständlich berücksichtigten wir in dieser kurzen geschichtlichen Übersicht nur die wichtigeren Arbeiten über die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Absichtlich haben wir hierbei die Arbeiten von Cauchy, die von hervorragender Bedeutung sind, bei Seite gelassen. Wir werden diese Arbeiten im nächsten Kapitel zu besprechen passende Gelegenheit haben. Cauchy.

Bei unserer Darstellung der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen (vgl. § 1 sowie S. 516) benutzten wir schon den Begriff: *Raum von n Dimensionen* sowie die damit in Zusammenhang stehenden Mannigfaltigkeitsbegriffe. Es erscheint uns hier angebracht, zu unseren geschichtlichen Bemerkungen über den Raum von n Dimensionen in § 2 des 7. Kap., S. 274, 275, noch einige Zusätze zu machen. Raum von n Dimens.

Wie wir schon damals sagten, sind wir der Ansicht, dass zuerst Grassmann (1844) den Begriff: n-dimensionaler Raum explicite eingeführt und entwickelt hat. Wir betonen dies hier nochmals, weil wir sehen, dass Forsyth in seiner kürzlich erschienenen inhaltreichen Biographie ***) von Cayley diesen so hervorragenden Mathematiker als den Begründer der Theorie des n-dimensionalen Raumes bezeichnet. Forsyth stützt diese Ansicht in erster Linie auf eine Abhandlung von Cayley, die im Jahre 1845 erschien und den Titel hat: „*Chapters in the analytical geometry of* (n) *dimensions*" †). In dieser Arbeit, die wir früher nicht berücksichtigt hatten, weil sie uns damals unbekannt war, giebt Cayley einige *analytische* Entwickelungen für n Veränderliche, die für $n = 3$ bekannte Sätze über Flächen zweiten Grades liefern. Wenn wir auch nur im Titel und in der Schlussbemerkung dieser Arbeit den Begriff: n-dimensionaler Raum ausdrücklich finden, so erkennen wir doch gern an, dass Cayley unabhängig von Grassmann. Cayley.

*) P. du Bois-Reymond, *Beiträge zur Interpretation der partiellen Differentialgleichungen mit drei Variabeln.* Erstes (einziges) Heft, Leipzig 1864. Ferner: *Hauptlehrsätze der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit drei Veränderlichen*, Crelle's Journal 64. Bd. (1865), S. 271.

**) P. du Bois-Reymond, *Note über die Integration totaler Differentialgleichungen*, Math. Ann. 12. Bd. (1877), S. 130.

***) In Bd. 7 der *Collected mathematical papers of Cayley*, Cambridge 1895, S. XXXIII.

†) Cambridge Math. Journ. 4. Bd. (1845), S. 119. Siehe auch Collected Papers, 1. Bd. S. 55.

Grassmann die Idee eines n-dimensionalen Raumes angeregt hat. Da diese Arbeit jedoch später als Grassmann's Ausdehnungslehre datiert, so müssen wir die Priorität Grassmann's aufrecht erhalten.

Cauchy. Im Jahre 1847 betonte Cauchy in einer kurzen Note*), dass der Begriff: n-dimensionaler Raum bei vielen analytischen Untersuchungen, namentlich in der Zahlentheorie, förderlich sei.

Riemann. In Riemann's berühmter Rede „*über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*"**) ist der n-dimensionale Raum das Fundament der Betrachtungen. Wir führen aus dieser leider unklar abgefassten Rede eine bemerkenswerte Stelle aus dem ersten Paragraphen an, dessen Überschrift ist: „Begriff einer n-fach ausgedehnten Grösse". Diese Stelle lautet so: „Die Untersuchungen ... bilden einen allgemeinen von Massbestimmungen unabhängigen Teil der Grössenlehre, wo die Grössen nicht als unabhängig von der Lage existierend und nicht als durch eine Einheit ausdrückbar, sondern als Gebiete in einer Mannigfaltigkeit betrachtet werden. Solche Untersuchungen sind für mehrere Teile der Mathematik, namentlich für die Behandlung der mehrwertigen analytischen Functionen ein Bedürfnis geworden, und der Mangel derselben ist wohl eine Hauptursache, dass der berühmte Abel'sche Satz und die Leistungen von Lagrange, Pfaff und Jacobi für die allgemeine Theorie der Differentialgleichungen so lange unfruchtbar geblieben sind."

Wir glauben diese Stelle, insofern sie sich auf Differentialgleichungen bezieht, dahin deuten zu sollen, dass Riemann *geahnt* hat, dass die Einführung des Begriffes: n-dimensionaler Raum in die Theorie der Differentialgleichungen diese Lehre fördern würde. Doch giebt Riemann keine Anwendungen hiervon.

Die allerdings leicht zu übersehenden Andeutungen Cauchy's und Riemann's blieben, wie es scheint, unbeachtet. Lipschitz und Christoffel, die Riemann's nur skizzierte Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie teilweise reconstruierten, haben in ihren Arbeiten aus den Jahren 1869—72 Mannigfaltigkeitsbetrachtungen für die Theorie der partiellen Differentialgleichungen als *Forschungsmittel nicht* angewandt.

Grassmann beschäftigte sich in seiner *zweiten Ausdehnungslehre****) aus dem Jahre 1862 zum Schlusse auch mit der Theorie der Differentialgleichungen. Diese Untersuchungen, die zum ersten Mal die richtigen Kriterien für die Reducibilität eines gegebenen Pfaff'schen Ausdruckes auf eine gegebene Normalform lieferten, haben aber, obgleich Grassmann sonst den n-dimensionalen Raum einführte und auch weitgehend verwertete, einen rein analytischen Charakter. Ebensowenig hat Plücker, dessen wichtige Beiträge zur Theorie des n-dimensionalen Raumes wir schon so oft hervorgehoben haben, Mannigfaltigkeitsbetrachtungen auf die Theorie der Differentialgleichungen angewandt.

Verwertg. d. Mannigf.-lehre für Diffgln. Wir glauben daher im Rechte zu sein, wenn wir behaupten, dass Lie zuerst die Begriffe der Mannigfaltigkeitslehre für die Theorie der partiellen Differentialgleichungen verwertet hat. Schon in seinen ersten Arbeiten aus den Jahren 1870 und 1871 wurde die *Plücker'sche Liniengeometrie* systematisch für die Lehre von den Differentialgleichungen nutzbar gemacht, ebenso die von ihm geschaffene *Kugelgeometrie.* Dabei ergab es sich, dass es zweckmässig ist, bei Untersuchungen über partielle Differentialgleichungen erster Ordnung in x, y, z nicht den Punkt

---

*) Cauchy, *Mémoire sur les lieux analytiques.* Comptes Rendus 24. Bd. (1847), S. 885.

**) Gehalten 1854, zuerst gedruckt im 13. Bd. der Abh. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. Siehe auch Gesammelte Werke, 2. Aufl., S. 272, insbes. S. 274.

***) Grassmann, *Die Ausdehnungslehre, vollständig und in strenger Form bearbeitet.* Berlin, 1862.

(x, y, z), sondern das *Flächenelement* (x, y, z, p, q) bez. das *Linienelement* $(x, y, z, dx : dy : dz)$ als das grundlegende Element zu benutzen. In dieser Weise entstand die *Geometrie der Flächenelemente* und die *Geometrie der Linienelemente.* Besonders zweckmässig zeigte sich dieser Standpunkt in der Theorie der *Berührungstransformationen.* In den Lie'schen Arbeiten aus dem Jahre 1871 *) werden merkwürdige, wenn auch bis jetzt wenig beachtete metrische Untersuchungen im n-dimensionalen Raum angestellt, und dabei werden die Mannigfaltigkeitsbegriffe gelegentlich für die Theorie der Differentialgleichungen verwertet. Im Jahre 1872 erschienen seine ersten Untersuchungen über die *allgemeine* Theorie der partiellen Differentialgleichungen sowie Andeutungen hinsichtlich der partiellen Differentialgleichungen höherer Ordnung. *In allen diesen Untersuchungen aber bildet die Mannigfaltigkeitslehre die Grundlage, ebenso in Lie's ausgedehnten Untersuchungen über Transformationsgruppen und Differentialinvarianten.*

Kapitel 12.

Die Theorie der partiellen Differentialgleichungen als Teil der Geometrie der Flächenelemente.

Im vorigen Kapitel gaben wir die Lagrange'sche Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung in ihren Hauptzügen wieder. Dabei legten wir Monge's *geometrische* und zugleich *begriffliche* Deutung zu Grunde. Ausserdem benutzten wir *consequent* den Begriff: *Flächenelement,* aber, wie wir hervorhoben, nur zu rein formellen Zwecken, nämlich zur Erleichterung des sprachlichen Ausdruckes.

Jetzt wollen wir einen weiteren Schritt von principieller Bedeutung thun: Wir wollen die Integrationstheorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung von einem neuen und allgemeineren Standpunkt aus auffassen, sie nämlich *als einen Teil der Geometrie der Flächenelemente* darstellen. Hierdurch gelangen wir zu einem Integrationsproblem, in dem das alte Problem als ein *specieller,* allerdings besonders wichtiger Teil enthalten ist.

Dabei führen wir — wie früher analog in der Ebene — den Begriff: *Elementverein* für besondere Scharen von Flächenelementen ein. Dieser Begriff umfasst die Begriffe: Fläche, Curve und Punkt, aber auch noch die Begriffe: Elementstreifen und Elementarkegel als Specialfälle. In der Geometrie der Flächenelemente ist, wie wir schon öfters hervorhoben, eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

als Definitionsgleichung einer Schar von ∞^4 Flächenelementen zu betrachten, und das Integrationsproblem kommt dann auf das Problem

*) Götting. Nachr., Mai u. Nov. 1871.

hinaus, alle Elementvereine zu bestimmen, die in dieser Schar enthalten sind.

In dieser Weise und indem wir überhaupt alle Sätze als Sätze über Elemente und Elementvereine auffassen, gelingt es uns, allen hierhergehörigen Theorien eine Allgemeingültigkeit und Einfachheit zu geben, die vor dem Jahre 1871 unbekannt war.

Ganz besonders gilt dies von Cauchy's *Existenzbeweis* für die Integralflächen analytischer Gleichungen $F = 0$, den wir hier erbringen werden.

Ferner werden wir durch Einführung des allgemeinen *Involutionsbegriffes* und seine Deutung ältere Theorien übersichtlicher und allgemeiner darstellen können.

Schliesslich wird uns die *Transformationstheorie* der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, soweit sie sich auf *Punkttransformationen* bezieht, kurz beschäftigen*).

§ 1. Vereine von Flächenelementen. Neue Formulierung des Integrationsproblems einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung.

Es giebt im Raume ∞^5 Flächenelemente, denn ein Flächenelement ist durch die Angabe der drei Coordinaten x, y, z seines Punktes und der beiden Bestimmungsstücke p, q der Stellung seiner Ebene vollständig bestimmt. Die Geometrie der Flächenelemente ist somit die Geometrie einer Mannigfaltigkeit (x, y, z, p, q) von fünf Dimensionen.

Zwei Flächenelemente heissen unendlich benachbart, wenn die Coordinaten des einen unendlich wenig von den entsprechenden Coordinaten des anderen verschieden sind. So sind allgemein (x, y, z, p, q) und $(x + dx,\ y + dy,\ z + dz,\ p + dp,\ q + dq)$ zwei unendlich benachbarte Flächenelemente. Die Punkte der beiden Elemente sind ebenso wie ihre Ebenen unendlich wenig von einander verschieden.

Eine besondere Beziehung zwischen zwei unendlich benachbarten Flächenelementen ist die der *vereinigten Lage*. Wir definieren sie zunächst analytisch:

Vereinigte Flächenelemente.

Ein Flächenelement (x, y, z, p, q) liegt mit einem unendlich benachbarten Element $(x + dx,\ y + dy,\ z + dz,\ p + dp,\ q + dq)$ vereinigt, wenn die Pfaff'sche Gleichung:

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0 \tag{1}$$

besteht.

---

*) Lie, *Allgemeine Theorie partieller Differentialgleichungen erster Ordnung*, Ges. d. Wiss. zu Christiania, Nov. 1874, S. 198. Vgl. auch dieselben Verhandlungen 1871 u. 72, sowie Götting. Nachr., Oct. 1872 und Math. Ann., 9. Bd. (1875).

Diese analytische Definition deckt sich mit einer geometrischen Definition der vereinigten Lage: Wenn nämlich die Bedingung (1) erfüllt ist, so liegt der Punkt $(x+dx,\ y+dy,\ z+dz)$ des zweiten Elementes in der Ebene des ersten, denn die Ebene des ersten Elementes hat in den laufenden Punktcoordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Gleichung

$$(\mathfrak{z}-z)-p(\mathfrak{x}-x)-q(\mathfrak{y}-y)=0,$$

und diese Gleichung wird durch $\mathfrak{x}=x+dx$, $\mathfrak{y}=y+dy$, $\mathfrak{z}=z+dz$ erfüllt, sobald die Bedingung (1) besteht. Wir können also sagen: *Ein Flächenelement liegt mit einem unendlich benachbarten Element vereinigt, wenn der Punkt des letzteren Elementes in der Ebene des ersteren Elementes liegt.* Dabei sehen wir von unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung ab.

Diese Definition der vereinigten Lage ist analog der in § 1 des 2. Kap., S. 39, gegebenen Definition für den Fall von Linienelementen in der Ebene. Wie dort könnten wir auch hier in mehr eingehender Weise diese Definition formulieren, indem wir zuerst von einer *Schar* von Flächenelementen ausgingen. Wir ziehen es aber der Kürze halber vor, hier direct die Definition der vereinigten Lage von *zwei* Flächenelementen an die Spitze zu stellen.

Unter den Scharen von unendlich vielen Flächenelementen richten wir nunmehr unser Augenmerk auf die Scharen von besonderer Beschaffenheit, die wir wie folgt als *Elementvereine* definieren:

Unter einem Verein von Flächenelementen verstehen wir eine solche Schar von Flächenelementen, in der jedes einzelne Element mit allen unendlich benachbarten Elementen der Schar vereinigt liegt. **Verein von Flächenelementen.**

Wir können die Definition der Elementvereine natürlich auch rein analytisch formulieren, indem wir den Begriff: vereinigte Lage nicht explicite benutzen und also sagen:

Eine Schar von Flächenelementen (x, y, z, p, q), die durch r Gleichungen:

$$\text{(2)} \qquad \Phi_1(x,y,z,p,q)=0, \cdots \Phi_r(x,y,z,p,q)=0 \qquad (r<5)$$

bestimmt wird, heisst ein Elementverein, wenn alle Wertsysteme x, y, z, p, q und dx, dy, dz, dp, dq, die neben den Gleichungen (2) die durch totale Differentiation hervorgehenden Gleichungen

$$\text{(3)} \qquad d\Phi_1=0, \cdots d\Phi_r=0$$

erfüllen, zugleich die Bedingung

$$\text{(1)} \qquad dz-p\,dx-q\,dy=0$$

befriedigen

Beispiele. Es leuchtet fast unmittelbar geometrisch ein, dass die Elemente einer Fläche einen Elementverein bilden. Construiert man nämlich in irgend einem regulären Punkte (x, y, z) der Fläche die zugehörige Tangentenebene, so weiss man, dass sie alle unendlich benachbarten Punkte der Fläche enthält, sobald man von unendlich kleinen Grössen von höherer als erster Ordnung absieht. Es ergiebt sich aber auch sofort analytisch: Ist $z = \varphi(x, y)$ die Gleichung der Fläche, und sind die Richtungscosinus ihrer Tangentenebene im regulären Punkte (x, y, z) proportional $p, q, -1$, so erfüllen x, y, z, p, q die drei Gleichungen:

$$z = \varphi(x, y), \quad p = \varphi_x, \quad q = \varphi_y,$$

die aber die Gleichung (1) nach sich ziehen. Die durch diese drei Gleichungen dargestellten ∞^2 Flächenelemente (x, y, z, p, q) bilden demnach einen Elementverein.

Betrachten wir eine Curve im Raume. Sie hat in jedem Punkt ∞^1 Tangentialebenen und bestimmt also in jedem Punkte ∞^1 Flächenelemente. Insgesamt definiert sie somit ∞^2 Flächenelemente. Offenbar bilden sie wieder einen Elementverein, wie man durch ganz ähnliche Betrachtungen wie bei der Fläche erkennt.

Ein Punkt endlich definiert auch ∞^2 Flächenelemente, nämlich alle die, deren Punkte mit dem gewählten Punkte zusammenfallen. Es ist klar, dass diese ∞^2 Elemente ebenfalls einen Verein bilden.

Flächen, Curven und Punkte erscheinen also in der Geometrie der Flächenelemente als Abarten eines gemeinsamen Begriffes, nämlich eines Vereines von ∞^2 Flächenelementen. Es ist aber zu bemerken, dass mit diesen noch nicht alle Vereine von Flächenelementen erschöpft sind. Denn wenn man z. B. auf einer Fläche alle diejenigen ∞^1 Flächenelemente herausgreift, deren Punkte eine beliebige Curve auf der Fläche bilden, so erhellt, dass sie ebenfalls einen Elementverein bilden.

Wir stellen uns daher jetzt die Aufgabe, überhaupt *alle Vereine von Flächenelementen zu bestimmen.*

Zur Bestimmg. der Elementvereine. Bestimmen die r von einander unabhängigen Gleichungen

$$(2) \qquad \Phi_1(x, y, z, p, q) = 0, \cdots \Phi_r(x, y, z, p, q) = 0 \quad (r < 5)$$

einen Elementverein, so muss es möglich sein, aus ihnen mindestens eine Gleichung zwischen x, y, z allein abzuleiten. Diese Behauptung ist für $r > 2$ selbstverständlich, denn dann müssen sich p und q, soweit sie überhaupt in (2) auftreten, eliminieren lassen. Es bleibt also übrig, die Richtigkeit dieser Behauptung für $r = 2$ und $r = 1$ zu beweisen.

Ist $r = 2$, liegen also nur zwei von einander unabhängige Gleichungen

(4) $$\Phi_1(x, y, z, p, q) = 0, \quad \Phi_2(x, y, z, p, q) = 0$$

vor, sodass es sich um eine Schar von ∞^3 Flächenelementen handelt, so müssen, damit die Schar einen Verein darstelle, die beiden Gleichungen (4) zusammen mit den Gleichungen:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} dz + \frac{\partial \Phi_1}{\partial p} dp + \frac{\partial \Phi_1}{\partial q} dq = 0,$$
$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} dz + \frac{\partial \Phi_2}{\partial p} dp + \frac{\partial \Phi_2}{d q} dq = 0$$

die Gleichung

(1) $$dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

nach sich ziehen. Da nun die drei letzten Gleichungen linear und homogen in den Differentialen sind, so ist dies nur so möglich, dass für *alle* Wertsysteme (x, y, z, p, q), die den Gleichungen (4) genügen, eine Gleichung von der Form besteht:

$$dz - p\,dx - q\,dy = \varrho\, d\Phi_1 + \sigma\, d\Phi_2,$$

in der ϱ und σ Functionen von x, y, z, p, q bedeuten, während dx, dy, dz, dp, dq ganz willkürlich sind. ϱ und σ sind also offenbar nicht beide gleich Null infolge von (4). Vergleichen wir die Coefficienten von dp und dq auf beiden Seiten, so kommt

$$\frac{\partial \Phi_1}{dp} \varrho + \frac{\partial \Phi_2}{dp} \sigma = 0,$$
$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial q} \varrho + \frac{\partial \Phi_2}{\partial q} \sigma = 0.$$

Diese beiden Gleichungen müssen infolge von (4) bestehen. Da aber ϱ und σ infolge von (4) nicht verschwinden, so muss die Functionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial p} & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial q} \\ \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial p} & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial q} \end{vmatrix} = 0$$

sein infolge von (4). Dann aber sind die Gleichungen (4) hinsichtlich p und q abhängig von einander. Die Elimination dieser Grössen aus (4) giebt also in der That eine Gleichung zwischen x, y, z allein.

Ist endlich $r = 1$, liegt also nur eine Gleichung

$$\Phi(x, y, z, p, q) = 0$$

vor, also eine Schar von ∞^4 Flächenelementen, so muss wieder eine Gleichung von der Form

$$dz - p\,dx - q\,dy = \varrho\,d\Phi$$

für *alle* Wertsysteme (x, y, z, p, q) bestehen, die $\Phi = 0$ erfüllen, während dx, dy, dz, dp, dq ganz willkürlich sind. Wiederum ist die Annahme $\varrho = 0$ infolge von $\Phi = 0$ von vornherein als absurd abzuweisen. Da nun links in der letzten Gleichung dp und dq gar nicht auftreten, so folgt, dass Φ frei von p und q sein muss.

Wir werden übrigens nachher erkennen, dass die Fälle $r = 2$ und $r = 1$ überhaupt keine Elementvereine liefern.

Hiermit ist also bewiesen, dass sich aus den Gleichungen eines Elementvereins stets mindestens eine Gleichung in x, y, z allein ableiten lässt.

Erster Hauptfall.

Nehmen wir nunmehr an, es bestehe für den gesuchten Elementverein nur *eine* Gleichung in x, y, z allein:

$$\omega(x, y, z) = 0.$$

Bei passender Wahl des Coordinatensystems können wir immer annehmen, dass diese Gleichung, die ja alle Punkte einer *Fläche* darstellt, nach z auflösbar sei, also die Form habe:

$$z - \varphi(x, y) = 0.$$

Alsdann sind dx, dy, dz an die Gleichung

$$dz - \varphi_x\,dx - \varphi_y\,dy = 0 \tag{5}$$

gebunden, während die übrigen Gleichungen, welche die Schar der Flächenelemente definieren, durch totale Differentiation nur solche Gleichungen in dx, dy, dz, dp, dq geben, aus denen sich dp und dq *nicht* eliminieren lassen. dx, dy, dz sind hier also nur an die eine Gleichung (5) gebunden. Die Bedingung

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

für die vereinigte Lage, die ja auch von dp und dq frei ist, muss also für alle Elemente der gesuchten Schar mit (5) übereinstimmen, d. h. es muss

$$p = \varphi_x, \quad q = \varphi_y$$

sein. Mithin enthält das Gleichungensystem, das den gesuchten Elementverein darstellt, sicher die drei Gleichungen

$$z = \varphi(x, y), \quad p = \varphi_x, \quad q = \varphi_y. \tag{6}$$

Enthielte es nun noch weitere Gleichungen, so würde die Substitution $p = \varphi_x$, $q = \varphi_y$ weitere Gleichungen in x, y, z allein liefern, was nach Voraussetzung ausgeschlossen ist. *Die Gleichungen* (6) *definieren*

Fläche.

immer einen Elementverein. Er besteht aus allen ∞^2 *Elementen der Fläche* $z = \varphi(x, y)$.

Nehmen wir jetzt zweitens an, dass sich aus den Gleichungen des gesuchten Elementvereins gerade *zwei* von einander unabhängige Gleichungen in x, y, z allein ableiten lassen. Diese beiden Gleichungen: Zweiter Hauptfall.

$$\omega_1(x, y, z) = 0, \quad \omega_2(x, y, z) = 0$$

stellen eine *Curve* dar, und bei passender Wahl des Coordinatensystems dürfen wir immer annehmen, dass sie nach x und y auflösbar seien:

$$x = X(z), \quad y = Y(z).$$

Im gegenwärtigen Falle bestehen zwischen dx, dy, dz nur die beiden Gleichungen:

$$(7) \qquad dx = X'dz, \quad dy = Y'dz,$$

während sich aus den übrigen Gleichungen des Vereins durch totale Differentiation keine Gleichung ableiten lassen darf, die frei von dp und dq ist. Die von dp und dq freie Bedingung der vereinigten Lage

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

kann daher nur dann erfüllt sein, wenn sie für alle Elemente der Schar aus (7) folgt, d. h. wenn für alle Elemente der Schar

$$1 - X'(z)p - Y'(z)q = 0$$

ist. Die Gleichungen des gesuchten Vereines umfassen daher die drei Gleichungen:

$$(8) \qquad x = X(z), \quad y = Y(z), \quad 1 - X'(z)p - Y'(z)q = 0.$$

Treten keine weiteren Gleichungen hinzu, so ist hiermit ein *Verein von Flächenelementen* bestimmt. *Er besteht aus allen ∞^2 Flächenelementen der Curve* Curve.

$$x = X(z), \quad y = Y(z).$$

Treten aber weitere Gleichungen hinzu, so kann es nur noch eine sein, da durch (8) nur ∞^2 Elemente definiert werden und die Schar doch aus mindestens ∞^1 bestehen muss. Diese hinzutretende Gleichung kann durch die Substitutionen $x = X'(z)$, $y = Y'(z)$ frei von x und y gemacht werden und hat dann die Form:

$$(9) \qquad \omega(z, p, q) = 0.$$

Andererseits dürfen sich aus ihr und der letzten Gleichung (8) die Grössen p und q nicht eliminieren lassen, da sich sonst entgegen der Voraussetzung noch eine Gleichung in x, y, z allein ergäbe. Im übrigen darf (9) beliebig gewählt werden, da die Bedingung der vereinigten Lage schon infolge von (8) erfüllt ist.

Aus der letzten Gleichung (8) und aus (9) lassen sich p und q als Functionen von z berechnen. Wir werden daher den gefundenen Verein auch so darstellen können:

$$(10) \qquad x = X(z), \quad y = Y(z), \quad p = P(z), \quad q = Q(z).$$

Hier besteht noch die aus der letzten Gleichung (8) folgende Bedingung:

$$1 - X'(z)\,P(z) - Y'(z)\,Q(z) = 0. \tag{10'}$$

Bei beliebiger Wahl von $X(z)$ und $Y(z)$ lässt sie sich immer durch passende Wahl der Functionen $P(z)$ und $Q(z)$ erfüllen. Wir sehen hieraus, *dass die durch* (10) *und* (10′) *definierten Flächenelemente einen Verein bilden, dessen* ∞^1 *Elemente längs einer Curve c*

$$x = X(z), \quad y = Y(z)$$

liegen, sodass jedes einzelne Element zum Punkt einen Punkt p der Curve und zur Ebene eine Tangentialebene e der Curve an der betreffenden Stelle hat. Einen solchen Verein nennen wir einen *Elementstreifen.* (Siehe Fig. 91 a.)

Element-streifen.

Dritter Hauptfall.

Schliesslich nehmen wir an, dass sich aus den Gleichungen des gesuchten Elementvereins *drei* Gleichungen in x, y, z allein ableiten lassen. Weitere Fälle sind dann nicht mehr übrig, da diese drei Gleichungen x, y, z als die Coordinaten eines Punktes

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c \tag{11}$$

bestimmen werden. Dieser Punkt gehört nun ∞^2 Elementen an. *Offenbar bilden alle* ∞^2 *Elemente des Punktes einen Verein.* Er wird durch die drei Gleichungen (11) definiert.

Punkt.

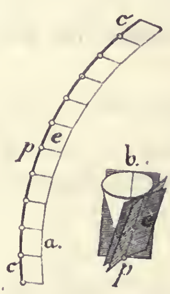

Fig. 91.

Es kann aber auch zu den drei Gleichungen (11) noch eine Gleichung hinzutreten, die dann offenbar auf die Form:

$$\omega(p, q) = 0$$

gebracht werden kann. Die vier Gleichungen:

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c, \quad \omega(p, q) = 0 \tag{12}$$

Elementar-kegel.

definieren ∞^1 Elemente durch den Punkt, also einen *Elementarkegel, der ebenfalls einen Verein darstellt.* (Angedeutet durch Fig. 91 b.)

Hiermit sind alle Möglichkeiten erschöpft.

Die Ergebnisse fassen wir zusammen in dem

Ergebnis.

Theorem 21: *Ein Verein von Flächenelementen im Raume enthält entweder* ∞^2 *oder* ∞^1 *Elemente.*

Enthält er ∞^2 *Elemente, so besteht er entweder aus allen Elementen einer Fläche oder aus allen Elementen einer Curve oder endlich aus allen Elementen eines Punktes.*

Enthält er dagegen nur ∞^1 Elemente, so besteht er aus allen Elementen eines Streifens längs einer Curve oder aus allen Elementen eines Elementarkegels.

In der Geometrie der Flächenelemente ordnen sich also die drei Begriffe: Fläche, Curve und Punkt dem Begriff: Verein von ∞^2 Flächenelementen unter und erschöpfen ihn vollständig. Ebenso ordnen sich die beiden Begriffe: Elementstreifen und Elementarkegel dem Begriff: Verein von ∞^1 Flächenelementen unter und erschöpfen ihn völlig. Hierin liegt, dass sich viele Betrachtungen in der Geometrie der Flächenelemente, die sich z. B. auf Flächen beziehen, unmittelbar auf den Fall ausdehnen lassen, dass die Flächen sich auf Curven oder Punkte reducieren. Ebenso werden Betrachtungen über Elementstreifen häufig auch dann noch gültig bleiben, wenn sich die Streifen auf Elementarkegel reducieren. Es entspricht dies durchaus der analogen Erscheinung in der Geometrie der Linienelemente in der Ebene, bei der die Begriffe: Curve und Punkt in dem höheren Begriff: Verein von Linienelementen zusammengefasst werden konnten.

Nachdem wir hiermit den Begriff: Elementverein eingeführt und seinem vollen Umfang nach kennen gelernt haben, können wir nun das alte Integrationsproblem einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung durch ein allgemeineres Problem ersetzen, das dem Wesen der Sache besser angepasst ist. Indem wir uns hiermit auf einen höheren Standpunkt stellen, wird es uns gelingen, Zusammenhänge zu finden, die früher nicht ans Licht traten, und ausserdem der ganzen Integrationstheorie eine solche Form zu geben, dass *Ausnahmefälle*, die in der Lagrange'schen Theorie auftraten und seinen Nachfolgern Schwierigkeiten bereitet haben, einfach *eliminiert* werden.

Wir stellen uns das

Problem: Es liege eine beliebige analytische Gleichung Integrationsproblem.

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{13}$$

in den Coordinaten x, y, z, p, q der Flächenelemente vor, oder, was auf dasselbe hinauskommt, eine Schar von ∞^4 Flächenelementen sei durch eine analytische Gleichung bestimmt. *Gesucht werden alle Elementvereine, deren Elemente der vorgelegten Schar angehören.* Jeden Verein von Elementen, der die Gleichung (13) erfüllt, nennen wir ein *Integralgebilde.* Integralgebilde.

Das Problem giebt zwei einzelne Probleme, nämlich je nachdem man Elementvereine von nur ∞^1 oder solche von ∞^2 Elementen sucht.

Bestimmg. d. Integralgebilde von ∞^1 El.

Die *Bestimmung aller Elementvereine von ∞^1 Elementen*, die der gegebenen Schar angehören, lässt sich ohne Mühe allgemein durchführen. Wählen wir nämlich irgend einen Verein von ∞^2 Elementen aus, dessen Elemente nicht sämtlich der durch (13) definierten Schar angehören, so wird er durch drei Gleichungen in x, y, z, p, q definiert sein. Zusammen mit (13) liegen dann vier Gleichungen vor, d. h. der ausgewählte Elementverein enthält eine Schar von ∞^1 Elementen, die zur Schar der durch (13) definierten ∞^4 Elemente gehören. Da alle ∞^2 Elemente des gewählten Vereins so beschaffen sind, dass jedes mit allen benachbarten vereint liegt, so werden umsomehr die gefundenen ∞^1 Elemente einen Verein bilden und zwar einen Verein, der der Gleichung (13) genügt. In dieser Weise findet man alle Vereine von ∞^1 Elementen, die der Gleichung (13) genügen, denn jeder Verein von ∞^1 Elementen ist in solchen von ∞^2 Elementen enthalten. So ist z. B. ein Elementstreifen in dem Verein der ∞^2 Elemente seiner Punktcurve enthalten. Ein Elementarkegel ferner gehört zu dem Elementverein, der durch die ∞^2 Elemente seiner Spitze dargestellt wird.

Integralgeb. v. ∞^2 El.

Ist somit die Bestimmung der Vereine von ∞^1 Elementen, die der Gleichung $F = 0$ genügen, sehr einfach, indem sie nur sogenannte ausführbare analytische Operationen, nämlich Differentiationen und Eliminationen, verlangt, so bietet dagegen die Bestimmung der Vereine von ∞^2 Elementen, welche die gegebene Gleichung $F = 0$ erfüllen, ganz andere Schwierigkeiten dar, insofern sie nämlich nur in speciellen Fällen geleistet werden kann. Sie ist eben ein Integrationsproblem, das nicht nur ausführbare Operationen verlangt. Wir werden aber zeigen, dass das jetzige Problem immer dann nur noch Operationen des Differenzierens und Eliminierens erfordert, *sobald ∞^2 verschiedene Vereine von je ∞^2 Flächenelementen bekannt sind, die also alle diejenigen ∞^4 Elemente enthalten, die der Gleichung $F = 0$ genügen.*

Wir nennen eine solche Schar von ∞^2 verschiedenen Vereinen von je ∞^2 Elementen eine *vollständige Lösung* der Gleichung $F = 0$. Wie dieser Begriff eine Verallgemeinerung des Lagrange'schen Begriffes ist, so ist auch der Nachweis der soeben ausgesprochenen Behauptung eine Verallgemeinerung der Lagrange'schen Theorie, die wir im vorigen Kapitel auseinandersetzten. Es sei ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, dass eine vollständige Lösung der Gleichung (13) ihrer Definition nach *alle* ∞^4 Elemente der Gleichung (13) umfasst. *Jedes Integralgebilde der Gleichung* (13) *ist daher ein solcher Verein, dessen sämtliche Elemente der vollständigen Lösung angehören.*

Um nun unsere obige Behauptung zu beweisen, betrachten wir *zunächst* den Fall, dass die vorgelegte Gleichung $F = 0$ von p und q frei ist und also die Form hat:

Gleichg. frei von p und q.

$$(14) \qquad F(x, y, z) = 0.$$

Diese Gleichung stellt im Punktraum (x, y, z) eine *Fläche* dar. Fasst man aber den Raum als den Ort seiner ∞^5 Flächenelemente (x, y, z, p, q) auf, so stellt die Gleichung $F = 0$ alle die ∞^4 Elemente dar, deren Punkte auf der Fläche liegen. Im gegenwärtigen Falle ist es sehr leicht, sofort alle Integralgebilde der Gleichung $F = 0$ zu bestimmen. Wir brauchen dies nur für die Integralgebilde von ∞^2 Elementen zu thun: Besteht ein solches aus allen Elementen einer Fläche, so muss es offenbar die Fläche $F = 0$ sein. Es giebt also nur ein Integralgebilde, das aus allen Elementen einer Fläche besteht. Wird das Integralgebilde dagegen von den ∞^2 Elementen einer Curve gebildet, so muss die Curve auf jener Fläche verlaufen. Besteht es schliesslich aus allen Elementen eines Punktes, so muss der Punkt auf der Fläche liegen. Die Fläche $F = 0$, jede Curve und jeder Punkt auf ihr stellen also die Integralgebilde der vorgelegten partiellen Differentialgleichung dar. Eine vollständige Lösung besteht hiernach entweder aus solchen ∞^2 Vereinen, die von ∞^2 Curven auf der Fläche definiert werden, oder aber aus den ∞^2 Vereinen, die durch die ∞^2 Punkte der Fläche dargestellt werden. Jedes Integralgebilde von ∞^2 Elementen ist nun sowohl aus einer vollständigen Lösung der ersteren Art als auch aus einer solchen der letzteren Art durch Umhüllung, also analytisch ausgesprochen, durch die Operationen des Differenzierens und Eliminierens ableitbar. In der That folgt dies im ersteren Falle sofort daraus, dass, nachdem ∞^2 Curven auf der Fläche ausgewählt sind, jede andere Curve der Fläche gewisse ∞^1 dieser ausgewählten Curven umhüllt und durch jeden Punkt der Fläche ebenfalls ∞^1 Curven dieser ausgewählten Schar hindurchgehen. Die Fläche selbst, die ein singuläres Integralgebilde vorstellt, hat solche ∞^2 Elemente, die sämtlich den Elementen der ausgewählten ∞^2 Curven angehören. Wenn zweitens die ∞^2 Vereine, die von den ∞^2 Punkten der Fläche definiert werden, als vollständige Lösung benutzt werden sollen, so ist jede Curve auf der Fläche der Ort von ∞^1 dieser Punkte und die Fläche selbst der Ort aller ∞^2 Punkte.

Betrachten wir irgend zwei der besprochenen Integralgebilde, die ∞^1 Elemente gemein haben, indem wir dabei von dem singulären Integralgebilde, der Fläche selbst, absehen. Sie werden entweder durch zwei einander berührende Flächencurven dargestellt. Dann sind die gemeinsamen Elemente die eines Büschels, dessen Axe ein Linienelement auf der Fläche ist. Oder aber sie werden durch einen Punkt und eine Curve durch ihn auf der Fläche gegeben. Auch dann haben sie ein solches Büschel von Flächenelementen gemein. *Zwei Integralgebilde von je ∞^2 Elementen also, die ∞^1 Elemente gemein haben, haben die Elemente eines Büschels gemein, dessen Axe ein Linienelement der Fläche ist. Insgesamt giebt es ∞^3 solche Büschel.*

Noch heben wir hervor: Wenn überhaupt eine partielle Differentialgleichung

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

von solchen ∞^2 Vereinen befriedigt wird, die aus allen Elementen von ∞^2 *Punkten* bestehen, so werden diese Punkte eine Fläche

$$f(x, y, z) = 0$$

bilden, und alle ∞^4 Elemente, deren Punkte (x, y, z) auf der Fläche liegen, gehören dann zu denen der Gleichung $F = 0$. Die Gleichungen $f = 0$ und $F = 0$ müssen daher mit einander identisch sein, d. h. die vorgelegte partielle Differentialgleichung ist *frei von p und q.*

Ehe wir den allgemeinen Fall behandeln, wollen wir jetzt *zweitens* den besonderen Fall ins Auge fassen, dass die vorgelegte partielle Differentialgleichung zwar nicht frei von den beiden Grössen p und q, aber doch nur *linear in p und q* ist:

Gleichg. linear in p u. q.

$$X(x, y, z)\,p + Y(x, y, z)\,q - Z(x, y, z) = 0. \tag{15}$$

Die ∞^4 Elemente, die sie definiert, haben eine besondere Lage: Nämlich diejenigen ∞^1 dieser Elemente, die einen beliebig gewählten Punkt (x, y, z) gemein haben, bilden ein *Büschel*, da die Gleichung (15) linear in p und q ist. Die Axe des Büschels, deren Richtung $dx : dy : dz$ sei, liegt in den Ebenen

$$(\mathfrak{x} - x)\,p + (\mathfrak{y} - y)\,q - (\mathfrak{z} - z) = 0$$

aller dieser ∞^1 Elemente (x, y, z, p, q), für sie ist also

$$dx \cdot p + dy \cdot q - dz = 0,$$

sodass aus (15) folgt:

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}. \tag{16}$$

Die Gleichungen aber stellen ein System von zwei simultanen gewöhnlichen Differentialgleichungen in x, y, z dar, und ihnen genügen ∞^2 Curven

$$u(x, y, z) = \text{Const.}, \quad v(x, y, z) = \text{Const.}$$

(Vgl. § 1 des 11. Kap., S. 485, 486.) Im vorliegenden Falle sind die

∞^4 Elemente der Differentialgleichung (15) diejenigen, die längs der ∞^2 Curven gelegen sind. Jede Integralcurve des Systems (16) ist also für unsere Auffassung ein Integralgebilde der Gleichung (15), und alle ∞^2 Integralcurven stellen eine vollständige Lösung der Gleichung (15) dar. Greifen wir ∞^1 dieser ∞^2 Integralcurven heraus, betrachten wir also ∞^1 Integralgebilde von (15), die in der vollständigen Lösung enthalten sind, so erzeugen sie eine Fläche. Diese Fläche hat mit jedem der ∞^1 Integralgebilde einen Elementstreifen gemein, und alle ∞^2 Elemente der Fläche erfüllen die Gleichung (15). Die Fläche stellt demnach ein Integralgebilde dar. Wir wissen, dass umgekehrt jede Integralfläche von ∞^1 Integralcurven des Systems (16) erzeugt wird (S. 487).

Wir können auch ∞^2 Flächen, deren jede ∞^1 der Integralcurven des Systems (16) enthält, und die insgesamt alle ∞^2 Integralcurven dieses Systems enthalten, als die Integralgebilde einer vollständigen Lösung benutzen. Wenn irgend zwei der ausgewählten ∞^2 Integralflächen einen Punkt gemein haben, so haben sie auch diejenige Integralcurve des Systems (16) gemein, die durch den Punkt geht. Hieraus folgt, dass irgend ∞^1 der Integralflächen, die in der vollständigen Lösung enthalten sind, stets eine Integralfläche umhüllen oder aber alle durch eine Integralcurve des Systems (16) gehen. Im letzteren Falle liefern sie ein Integralgebilde, das aus allen Flächenelementen einer Curve besteht. Auch ist klar, dass jede Integralfläche, da sie ∞^1 jener ∞^2 Curven enthält, in der angegebenen Weise als Umhüllende ableitbar ist, wenn wir von singulären absehen.

Wir fügen noch hinzu: Wenn eine partielle Differentialgleichung

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

eine solche vollständige Lösung hat, deren ∞^2 Integralgebilde durch ∞^2 *Curven* dargestellt werden, so sind zwei Fälle denkbar: Entweder liegen die ∞^2 Curven sämtlich in einer Fläche. Dann stellt jeder Punkt der Fläche, da durch ihn ∞^1 der Curven gehen, ein Integralgebilde dar, d. h. die vorgelegte Gleichung ist nach dem Obigen (S. 532) *frei von p und q*. Oder aber die ∞^2 Curven sind über den ganzen Raum verteilt, sodass durch jeden Punkt (x, y, z) eine geht, die dort ein bestimmtes Linienelement hat. Diejenigen ∞^1 der ∞^4 Linienelemente von $F = 0$, die einen Punkt (x, y, z) gemein haben, bilden daher ein Büschel, d. h. $F = 0$ ist *linear in p, q* oder lässt sich jedenfalls auf eine in p, q lineare Form bringen.

Endlich kehren wir zum *allgemeinen Fall* zurück: Wir nehmen an, die vorgelegte Gleichung Allg. Fall.

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{17}$$

sei weder frei von p, q noch linear in p, q, und setzen voraus, dass uns eine vollständige Lösung der Gleichung bekannt sei. Die vollständige Lösung besteht dann aus ∞^2 Vereinen, die durch ∞^2 *Flächen* dargestellt werden, denn sonst kämen wir zu den ausgeschlossenen Fällen zurück. Die ∞^4 Elemente der bekannten ∞^2 Flächen umfassen alle Flächenelemente der Gleichung (17). Soll nun ein Verein von ∞^2 Elementen die Gleichung (17) erfüllen, so ist er entweder eine Fläche oder eine Curve oder ein Punkt. Alle seine ∞^2 Elemente müssen dabei zu den Elementen der vollständigen Lösung gehören. Dabei sind zwei Fälle denkbar:

Erstens: Das Integralgebilde von ∞^2 Elementen hat mit nur ∞^1 der Flächen der vollständigen Lösung Elemente gemein und also mit jeder von diesen gerade ∞^1. Alsdann hat es mit jeder dieser ∞^1 Flächen einen Elementstreifen gemein und ist daher eine Fläche oder eine Curve. Ist das Integralgebilde eine Fläche, so muss es jene ∞^1 Flächen längs der ∞^1 Curven der Elementstreifen umhüllen. Ist es eine Curve, so muss diese Curve jenen ∞^1 Flächen gemein sein. Greifen wir umgekehrt nach einem beliebigen analytischen Gesetz aus den ∞^2 bekannten Flächen ∞^1 heraus, so haben sie entweder eine umhüllende Fläche oder gehen sämtlich durch eine Curve. Letzterer Fall kann höchstens ∞^1 mal vorkommen, nach S. 533. Es erhellt, dass die umhüllende Fläche bez. die gemeinsame Curve einen Verein darstellt, der die Gleichung (17) erfüllt. Im Fall der gemeinsamen Curve kann allerdings die Annahme vorkommen, dass die ∞^1 Flächen einander sämtlich längs der Curve berühren. Dann giebt sie kein Integralgebilde von ∞^2 Elementen, sondern nur einen Elementstreifen, der dann notwendig ein charakteristischer Streifen ist.

Zweitens: Es ist denkbar, dass das gesuchte Integralgebilde von ∞^2 Elementen mit jeder der ∞^2 bekannten Flächen Elemente gemein hat, also mit jeder ein Element (oder eine discrete Anzahl von Elementen). Haben die ∞^2 Flächen eine gemeinsame, punktweis berührende Umhüllende, so ist diese Umhüllende der gesuchte Verein. Insbesondere kann sich die Umhüllende auf eine Curve oder einen Punkt reducieren. Dies sind *singuläre* Integralgebilde.

Es ist klar, dass sich die hier für den allgemeinen Fall angestellten Erörterungen nicht sehr wesentlich von der Lagrange-Monge'schen Theorie, § 2 des 11. Kap., S. 493, unterscheiden.

Hiermit ist die oben aufgestellte Behauptung bewiesen, und wir können folglich das Theorem aufstellen:

Theorem 22: *Sind ∞^4 Flächenelemente (x, y, z, p, q) im Raume (x, y, z) durch eine Gleichung* Ergebnis.

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

definiert und ist eine vollständige Lösung dieser Gleichung, d. h. eine solche Schar von ∞^2 Vereinen von je ∞^2 Elementen bekannt, die alle Elemente der Gleichung $F = 0$ umfasst, so lässt sich jedes Integralgebilde der Gleichung durch die Operationen des Differenzierens und Eliminierens aus der vollständigen Lösung ableiten.

§ 2. Die charakteristischen Streifen und ihre Abbildung als Linienelemente in der Ebene.

Wir betrachten jetzt die Ableitung aller Integralgebilde aus einer vollständigen Lösung etwas näher. Dabei wollen wir uns *zunächst* auf solche partielle Differentialgleichungen

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{17}$$

beschränken, die nicht frei von p und q sind und auch nicht auf eine in p, q lineare Form gebracht werden können. Trotz dieser vorläufigen Beschränkung aber werden wir die Ergebnisse unserer Betrachtungen durch Einführung zweckmässiger Begriffe in solcher Weise ausdrücken, dass ihre Formulierung auch in den ausgeschlossenen Fällen gültig bleibt.

Nehmen wir wieder an, die vorgelegte partielle Differentialgleichung (17) besitze eine vollständige Lösung, d. h. eine Schar von ∞^2 Integralgebilden von je ∞^2 Elementen, sodass diese Schar alle diejenigen ∞^4 Elemente umfasst, die der Gleichung (17) genüge leisten. Nach den Erörterungen des vorigen Paragraphen, S. 534, sind diese Integralgebilde ∞^2 *Flächen*, da wir die linearen und die von p, q freien Gleichungen ausgeschlossen haben. Wir schreiben die Flächen der vollständigen Lösung in der Form:

$$\Phi(x, y, z, a, b) = 0. \tag{18}$$

Nach Lagrange's Theorie setzen wir, um ∞^1 Integralgebilde (18) herauszugreifen, eine beliebige Relation zwischen a und b an: Lagrange's Methode.

$$\omega(a, b) = 0$$

und eliminieren a, b und $\frac{db}{da}$ aus den vier Gleichungen:

$$\begin{cases} \Phi(x, y, z, a, b) = 0, & \omega(a, b) = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial a} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial b}\dfrac{db}{da} = 0, & \dfrac{\partial \omega}{\partial a} + \dfrac{\partial \omega}{\partial b}\dfrac{db}{da} = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Nach § 2 des vorigen Kapitels erhalten wir dadurch eine allgemeine *Integralfläche* der partiellen Differentialgleichung (17), unter Umständen (vgl. § 1, S. 534) nur eine *Curve* als Integralgebilde von (17). *Zu jeder vorgelegten Relation* $\omega(a, b) = 0$ *gehört somit eine bestimmte Integralfläche (allgemeiner: Integralgebilde) von* (17).

Abbildg. d. vollst. Lösg. als Pkte. einer (ab)-Ebene.

Wir deuten nun die Parameter a und b als Punktcoordinaten in einer (ab)*-Ebene.* Da zu jedem Wertepaar a, b eine bestimmte Integralfläche aus der vollständigen Lösung (18) gehört, so *bilden wir also jede der* ∞^2 *Integralflächen* (18) *als einen Punkt in der Ebene ab.* Eine Relation $\omega(a, b) = 0$ giebt in der Ebene eine *Curve.* Ihre Punkte sind die Bilder von ∞^1 unter den ∞^2 Flächen (18). Da diese Relation $\omega(a, b) = 0$ eine allgemeine Integralfläche liefert, eben die, die aus (19) durch Elimination von $a, b, \frac{db}{da}$ hervorgeht, so können wir sagen,

Curve i. d. Ebene.

dass jede Curve in der (ab)*-Ebene das Bild einer allgemeinen Integralfläche ist.* Während also im Raume eine allgemeine Integralfläche als Umhüllende von ∞^1 Integralflächen der vollständigen Lösung auftritt, ist ihr Bild in der Ebene der Ort der ∞^1 Bildpunkte der ausgewählten ∞^1 Flächen.

Jede Curve in der (ab)-Ebene stellt hiernach eine bestimmte Integralfläche der partiellen Differentialgleichung (17) dar, und andererseits wird jede Integralfläche der allgemeinen Lösung durch eine solche Curve dargestellt.

Berührende Curven i. d. Ebene.

Ziehen wir in der (ab)-Ebene zwei Curven, die einander im Punkte (a_0, b_0) *berühren,* so entsprechen ihnen zwei Integralflächen, und wir behaupten, dass diese beiden Flächen einander längs einer Curve, nämlich längs einer *Charakteristik,* berühren. In der That, wenn die beiden Curven

$$\omega_1(a, b) = 0, \qquad \omega_2(a, b) = 0$$

einander im Punkte (a_0, b_0) berühren, so hat $\frac{db}{da}$ für beide Curven im Punkte (a_0, b_0) den gleichen Wert, den wir mit c_0 bezeichnen wollen. Nach (19) wird nun die zur Curve $\omega_1 = 0$ bez. $\omega_2 = 0$ gehörige allgemeine Integralfläche durch Elimination von a, b aus den drei Gleichungen

$$(20) \qquad \begin{cases} \Phi(x, y, z, a, b) = 0, \qquad \omega_1(a, b) = 0, \\ \Phi_a \dfrac{\partial \omega_1}{\partial b} - \Phi_b \dfrac{\partial \omega_1}{\partial a} = 0 \end{cases}$$

bez. aus den drei Gleichungen

$$
(21) \qquad \begin{cases} \Phi(x, y, z, a, b) = 0, \qquad \omega_2(a, b) = 0, \\ \Phi_a \dfrac{\partial \omega_2}{\partial b} - \Phi_b \dfrac{\partial \omega_2}{\partial a} = 0 \end{cases}
$$

gewonnen. Da nun $a = a_0$ und $b = b_0$ die Gleichung $\omega_1 = 0$ sowie die Gleichung $\omega_2 = 0$ erfüllen und da

$$
\frac{db}{da} = - \frac{\dfrac{\partial \omega_1}{\partial a}}{\dfrac{\partial \omega_1}{\partial b}}
$$

für $a = a_0$, $b = b_0$ denselben Wert wie

$$
\frac{db}{da} = - \frac{\dfrac{\partial \omega_2}{\partial a}}{\dfrac{\partial \omega_2}{\partial b}}
$$

hat, nämlich den Wert c_0, so folgt, dass beide Flächen die Curve enthalten, die durch die beiden Gleichungen

$$
(22) \qquad \Phi(x, y, z, a_0, b_0) = 0, \qquad \frac{\partial \Phi_0}{\partial a_0} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial b_0} c_0 = 0
$$

dargestellt wird. Nun aber liegt diese Curve auf der Integralfläche

$$
(23) \qquad \Phi(x, y, z, a_0, b_0) = 0
$$

der vollständigen Lösung (18). Diese Integralfläche gehört, da ihre Parameter a_0, b_0 die Relation $\omega_1 = 0$ erfüllen, zu den ∞^1 Integralflächen der vollständigen Lösung, deren Umhüllende die durch (20) dargestellte Fläche ist. Die Fläche (20) berührt demnach die Integralfläche (23) längs der Curve (22), und folglich ist diese Curve eine *Charakteristik* (vgl. § 3 des 11. Kap., S. 499). Ebenso berührt die Fläche (21) die Fläche (23) längs dieser Charakteristik.

Also sehen wir in der That: *Zwei solchen Curven:*

$$
\omega_1(a, b) = 0, \qquad \omega_2(a, b) = 0
$$

in der (ab)-Ebene, die einander in einem Punkte (a_0, b_0) berühren, wobei $\dfrac{db_0}{da_0} = c_0$ sei, entsprechen im Raume zwei allgemeine Integralflächen, die einander längs der Charakteristik

$$
(22) \qquad \Phi(x, y, z, a_0, b_0) = 0, \qquad \frac{\partial \Phi_0}{\partial a_0} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial b_0} c_0 = 0
$$

berühren. Die beiden Integralflächen haben also einen *Elementstreifen* gemein, und zwar besteht dieser Elementstreifen aus ∞^1 Flächenelementen längs einer Charakteristik. Er ist vollständig bestimmt, sobald die betreffende Charakteristik (22) vorliegt, denn seine Elemente sind die ∞^1 Flächenelemente der Fläche

$$\Phi(x, y, z, a_0, b_0) = 0$$

längs dieser Charakteristik. Wir nennen diesen Elementstreifen einen *charakteristischen Streifen.*

Charakt. Streifen.

Nach (22) ist dieser charakteristische Streifen völlig bestimmt durch Angabe der Werte a_0, b_0, c_0. Daher giebt es höchstens ∞^3 charakteristische Streifen. Andererseits haben wir gesehen (vgl. Satz 1, § 3 des 11. Kap., S. 500), dass die nicht lineare partielle Differentialgleichung (17) *gerade* ∞^3 charakteristische Curven (22) hat. Daher:

Satz 1: *Eine nicht lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung im Raume (x, y, z) hat gerade ∞^3 charakteristische Streifen.*

Da die ∞^4 Flächenelemente der partiellen Differentialgleichung (17) den ∞^2 Flächen der vollständigen Lösung $\Phi = 0$ angehören, so folgt, dass durch jedes der ∞^4 Elemente der Differentialgleichung im allgemeinen ein charakteristischer Streifen hindurchgeht, und zwar nur einer, wenn wir uns auf einen passenden Bereich beschränken, wie wir es immer stillschweigend thun.

Wir sehen aber noch mehr: Wird eine Curve

$$\omega(a, b) = 0$$

in der (ab)-Ebene vorgelegt, so entspricht ihr, wie wir wissen, eine allgemeine Integralfläche. Wenn wir nun unter a_0, b_0, c_0 irgend drei solche Constanten verstehen, die den beiden Gleichungen

$$(24) \qquad \omega(a_0, b_0) = 0, \quad \frac{\partial \omega_0}{\partial a_0} + \frac{\partial \omega_0}{\partial b_0} c_0 = 0$$

genügen, so gehört zu der betrachteten Integralfläche derjenige charakteristische Streifen, der durch die Charakteristik (22) gegeben wird. Da es nun ∞^1 Wertsysteme a_0, b_0, c_0 giebt, die (24) erfüllen, so folgt, dass die betrachtete Integralfläche, aufgefasst als Elementverein, ∞^1 charakteristische Streifen enthält.

Integralfl. erzeugt v. ∞^1 char. Streifen.

Jede allgemeine Integralfläche der partiellen Differentialgleichung (17) *wird somit, aufgefasst als Elementverein, von ∞^1 charakteristischen Streifen erzeugt.*

Ein Wertsystem a, b, c bestimmt in der (ab)-Ebene einen Punkt (a, b) und eine hindurchgehende Gerade von der Richtung $\frac{db}{da} = c$, also ein *Linienelement.* Da dies Wertsystem im Raume einen charakteristischen Streifen bestimmt, so können wir sagen: *Jeder charakteristische Streifen bildet sich in der (ab)-Ebene als ein Linienelement ab.*

Linienel. als Bild eines char. Streifens.

Wählt man in der (ab)-Ebene eine Schar von ∞^1 Linienelementen $\left(a, b, \frac{db}{da}\right)$, die zu einer Curve

$$\omega(a, b) = 0$$

gehören, so entsprechen ihnen im Raume ∞^1 charakteristische Streifen. Sie liegen sämtlich auf der durch die Gleichung $\omega = 0$ nach (19) definierten allgemeinen Integralfläche. Insbesondere entsprechen also zwei unendlich benachbarten unter diesen Linienelementen zwei unendlich benachbarte charakteristische Streifen auf der Integralfläche. Da die Integralfläche selbst, aufgefasst als Ort ihrer ∞^2 Flächenelemente, einen Verein darstellt (nach § 1, S. 526), so folgt, dass die beiden Streifen so liegen, *dass sie erstens einander unendlich benachbart sind und zweitens jedes Element des einen mit den unendlich benachbarten Elementen des andern vereinigt liegt.* Vereinigte char. Streifen.

Wir gingen hierbei von zwei unendlich benachbarten Linienelementen einer Curve aus. Wir wissen, dass zwei solche Linienelemente (a, b, c) und $(a + da, b + db, c + cd)$ *vereinigt* liegen und also die Bedingung Vereinigte Linienelem.

$$db - c\,da = 0$$

erfüllen, und dass umgekehrt diese Bedingung der vereinigten Lage hinreicht, damit die beiden Linienelemente benachbarte Elemente einer Curve oder eines Punktes seien. Auf letzteren Fall kommen wir sogleich ausführlich zu sprechen. Wir wollen nur vorher den Satz formulieren:

Satz 2: *Ist* Ergebnis.

$$\Phi(x, y, z, a, b) = 0$$

eine vollständige Lösung der nicht linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

im Raume (x, y, z) *und bildet man den längs der Charakteristik*

$$\Phi(x, y, z, a, b) = 0, \quad \Phi_a + \Phi_b c = 0$$

gelegenen charakteristischen Streifen als dasjenige Linienelement (a, b, c) *einer* (ab)*-Ebene ab, dessen Punkt die Coordinaten* a, b *und dessen Gerade die durch* $\frac{db}{da} = c$ *bestimmte Richtung hat, so entsprechen zwei vereinigten Linienelementen der* (ab)*-Ebene stets zwei solche unendlich benachbarte charakteristische Streifen, von denen jedes Element des einen Streifens mit den unendlich benachbarten Elementen des anderen Streifens vereinigt liegt. Jede allgemeine Integralfläche wird von* ∞^1 *charakteristischen Streifen erzeugt, die sich als die Linienelemente einer Curve in der* (ab)*-Ebene abbilden. Umgekehrt gehören zu den* ∞^1 *Linienelementen eines beliebigen Elementvereins in der Ebene solche* ∞^1 *charakteristische Streifen, die ein allgemeines Integralgebilde erzeugen.*

In der (ab)-Ebene giebt es, wie gesagt, ausser den Curven noch andere Vereine, nämlich die *Punkte* der Ebene. Betrachten wir daher einen bestimmten Punkt (a_0, b_0) in der Ebene. Ein Linienelement (a, b, c) gehört dem Punkte an, wenn $a = a_0$, $b = b_0$ ist, während c beliebig gewählt werden kann. Jedem Linienelement (a_0, b_0, c) entspricht ein charakteristischer Streifen, nämlich der längs der Charakteristik:

$$(25)\qquad \Phi(x, y, z, a_0, b_0) = 0, \quad \frac{\partial \Phi_0}{\partial a_0} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial b_0} c = 0.$$

Dieser charakteristische Streifen besteht also aus ∞^1 Flächenelementen der Fläche

$$(26)\qquad \Phi(x, y, z, a_0, b_0) = 0.$$

Betrachten wir *alle* ∞^1 Linienelemente (a_0, b_0, c) durch den Punkt (a, b), d. h. erteilen wir c alle möglichen Werte, so stellen die Gleichungen (25) ∞^1 Charakteristiken dar, nämlich die ∞^1 Charakteristiken auf der Fläche (26). Den ∞^1 Linienelementen entsprechen daher die ∞^1 charakteristischen Streifen, die auf der Fläche (26) liegen. Diese Fläche gehört zu den Integralflächen der vollständigen Lösung (18). Mithin können wir zum Satz 2 noch hinzufügen:

Punkt i. d. Ebene.

Satz 3: *Bei der in Satz 2 angegebenen Abbildung entspricht jedem Elementverein in der (ab)-Ebene ein Integralgebilde der partiellen Differentialgleichung. Insbesondere entsprechen den Punkten der Ebene die ∞^2 Integralflächen der vollständigen Lösung $\Phi = 0$.*

Die im Vorhergehenden besprochene Abbildung lässt sich nun auch auf den Fall ausdehnen, dass die vorgelegte partielle Differentialgleichung *linear in p, q* ist, also die Form hat:

Lineare Diffgl.

$$(27)\qquad X(x, y, z)p + Y(x, y, z)q - Z(x, y, z) = 0.$$

Wir wissen ja, dass, wenn $u(x, y, z)$ und $v(x, y, z)$ zwei von einander unabhängige Integrale des zugehörigen Systems

$$(27')\qquad \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$$

sind, alsdann jede Integralfläche durch eine Gleichung

$$(28)\qquad f(u, v) = 0$$

dargestellt wird (vgl. § 1 des 11. Kap., S. 488). Je zwei Integralflächen (Integralgebilde von ∞^2 Elementen), die ∞^1 Elemente gemein haben, haben dabei einen Elementstreifen gemein, dessen Punktort eine Curve

$$u = \text{Const.}, \quad v = \text{Const.}$$

ist. Durch jede Curve $u = \text{Const.}$, $v = \text{Const.}$ gehen offenbar unendlich viele Integralflächen. Diese ∞^2 Curven sind somit im vorliegenden Falle die charakteristischen Curven. (Vgl. § 3 des 11. Kap., S. 503.) *Eine lineare partielle Differentialgleichung hat also nur ∞^2 Charakteristiken, nämlich die ∞^2 Integralcurven des äquivalenten Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen* (27′).

Dennoch aber hat die lineare Differentialgleichung (27), wie wir sogleich sehen werden, ∞^3 verschiedene charakteristische Streifen. Als einen charakteristischen Streifen werden wir nämlich auch hier den Elementstreifen bezeichnen, den zwei Integralgebilde von je ∞^2 Elementen gemein haben, sobald sie überhaupt ∞^1 Elemente gemeinsam besitzen. Sind diese Integralgebilde zwei Flächen, also von je ∞^1 Curven

$$(29) \qquad u(x, y, z) = \text{Const.}, \quad v(x, y, z) = \text{Const.}$$

erzeugt, so müssen sie einander längs eine Curve

$$(30) \qquad u = a, \quad v = b$$

berühren. Wir erhalten daher den Streifen, wenn wir auf einer durch diese Curve (30) gehenden Fläche (28) die Elemente (x, y, z, p, q) längs der Curve (30) bestimmen. Die Curve (30) liegt auf der Fläche (28), wenn

$$f(a, b) = 0$$

ist. Die bezeichneten Elemente (x, y, z, p, q) werden daher bestimmt durch die Gleichungen (30) und

$$\frac{p}{f_x} = \frac{q}{f_y} = \frac{-1}{f_z}.$$

Es ist aber $f_x = f_u u_x + f_v v_x$ u. s. w. und f_u längs der Curve (30) gleich f_a und ebenso f_v gleich f_b. Ferner sehen wir, dass die der Curve $u = a$, $v = b$ unendlich benachbarte Charakteristik

$$u = a + da, \quad v = b + db$$

auf der Fläche (28) erhalten wird, wenn wir da und db der Bedingung

$$f_a da + f_b db = 0$$

unterwerfen. Wie im allgemeinen Falle sei $\frac{db}{da}$ mit c bezeichnet, sodass $f_a = -c f_b$ ist. Die Elemente (x, y, z, p, q) eines charakteristischen Streifens genügen somit den vier Gleichungen:

$$(31) \qquad \begin{cases} u = a, \quad v = b, \\ \dfrac{p}{-c u_x + v_x} = \dfrac{q}{-c u_y + v_y} = \dfrac{-1}{-c u_z + v_z}. \end{cases}$$

Char. Streifen d. lin. p. Diffgl.

Diese Gleichungen enthalten *drei* wesentliche Constanten a, b, c. *Eine lineare Differentialgleichung* (27) *hat demnach ebenfalls* ∞^3 *verschiedene charakteristische Streifen.* Der Unterschied gegenüber dem allgemeinen Fall liegt darin, dass jetzt jede charakteristische Curve $u = a$, $v = b$ zu ∞^1 charakteristischen Streifen gehört.

Wir haben vorhin nur den Fall ins Auge gefasst, dass die beiden Integralgebilde, die einen Streifen gemein haben, Flächen sind. Aber auch wenn das eine eine Curve ist, so kommen wir genau zu denselben charakteristischen Streifen, denn eine solche: $u = a$, $v = b$ hat mit einer Integralfläche (28) nur dann ∞^1 Elemente gemein, wenn sie auf der Integralfläche verläuft.

Indem wir nun die in (31) auftretenden Constanten a, b als Punktcoordinaten in einer (ab)-Ebene deuten, sodass $\frac{db}{da} = c$ die Richtungen in der Ebene bestimmt, so entspricht jedem charakteristischen Streifen (31) in der Ebene ein Linienelement $\left(a, b, \frac{db}{da} = c\right)$. Jedes Integralgebilde, sei es eine Integralfläche (28) oder eine Curve (30), enthält ∞^1 charakteristische Streifen (31), und je zwei unendlich benachbarte dieser Streifen liegen wiederum, wie im allgemeinen Falle, so, dass jedes Element des einen mit den unendlich benachbarten des anderen Streifens vereinigt liegt. Andererseits haben zwei charakteristische Streifen (a, b, c) und $(a + da,\ b + db,\ c + dc)$ diese Eigenschaft, wenn sie auf einer Integralfläche

$$f(u, v) = 0$$

liegen, d. h., wenn mit

$$f(a, b) = 0$$

auch

$$f(a + da,\ b + db) = 0$$

ist, woraus, da $c = -\frac{f_a}{f_b}$ war, sofort folgt:

$$db - c\,da = 0.$$

Dies ist aber die Bedingung der vereinigten Lage zweier Linienelemente (a, b, c), $(a + da,\ b + db,\ c + dc)$ in der (ab)-Ebene.

Daraus folgt, dass sich jedes Integralgebilde von ∞^2 Elementen auch im Falle der linearen Differentialgleichung als ein Elementverein in der (ab)-Ebene abbildet. Insbesondere entsprechen einem Punkte (a, b) der Ebene, aufgefasst als Verein von Linienelementen, alle ∞^1 charakteristische Streifen längs einer charakteristischen Curve

$$u = a, \quad v = b,$$

d. h. ein Integralgebilde, das aus allen ∞^2 Elementen einer charakteristischen Curve besteht.

Auch auf *die von p und q freien* partiellen Differentialgleichungen

Diffgl. frei v. p u. q.

$$F(x, y, z) = 0$$

lassen sich unsere allgemeinen Ergebnisse ausdehnen. Wie wir im vorigen Paragraphen (S. 531) sahen, werden ihre Integralgebilde, die ∞^2 Elemente enthalten, von den Curven (insbesondere Punkten) der Fläche $F = 0$ dargestellt. Wir erkannten dort auch, dass zwei solche Integralgebilde, sobald sie ∞^1 Elemente gemein haben, alle Elemente eines Büschels gemein haben, dessen Axe ein Linienelement der Fläche $F = 0$ ist. Diese ∞^3 Büschel werden wir daher hier als die charakteristischen Streifen bezeichnen. Dass sich Elementstreifen auf Elementarkegel und also insbesondere auf Büschel reducieren können, bemerkten wir ja schon in § 1, Theorem 21, S. 529. Wir sehen somit, *dass auch jede von p und q freie partielle Differentialgleichung erster Ordnung ∞^3 verschiedene charakteristische Streifen (Elementbüschel) hat.*

Char. Streifen: Büschel v. Elementen.

Im gegenwärtigen Falle können wir die besprochene Abbildung sofort herstellen: Wenn nämlich a, b Gaussische Coordinaten auf der Fläche $F = 0$ bedeuten, so werden a, b und $\frac{db}{da} = c$ ein Linienelement auf der Fläche und damit einen charakteristischen Streifen definieren. Zwei Linienelemente (a, b, c) und $(a + da,\ b + db,\ c + dc)$ auf der Fläche liegen vereinigt, wenn

$$db - c\,da = 0$$

ist (vgl. die einleitenden Bemerkungen in § 1 des 5. Kap., S. 134). ∞^1 der besprochenen Büschel definieren ein Integralgebilde dann und nur dann, wenn ihre Axen (Linienelemente) einen Verein bilden. Deuten wir a, b als Punktcoordinaten in einer (ab)-Ebene, so ist also hier die fragliche Abbildung klar, wie nicht weiter ausgeführt zu werden braucht.

Es hat sich somit als Verallgemeinerung der Sätze 2 und 3 ergeben:

Satz 4: *Jede partielle Differentialgleichung erster Ordnung*

Ergebnis für bel. p. Diffgl. 1. O.

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

im Raume (x, y, z) hat ∞^3 charakteristische Streifen. Wählt man die Parameter a, b, c dieser Streifen in passender Weise und deutet a, b als Punktcoordinaten in einer (ab)-Ebene, während $c = \frac{db}{da}$ die Richtungen in dieser Ebene definiert, so wird jeder charakteristische Streifen als ein Linienelement in der (ab)-Ebene abgebildet. Je zwei vereinigten Linienelementen der (ab)-Ebene entsprechen dabei zwei solche unendlich be-

nachbarte charakteristische Streifen, von denen jedes Flächenelement des einen mit den unendlich benachbarten Flächenelementen des anderen vereinigt liegt. Jedes (nicht singuläre) Integralgebilde, das ein Verein von ∞^2 *Flächenelementen ist, wird von* ∞^1 *solchen charakteristischen Streifen erzeugt, die sich als die Linienelemente eines Elementvereins in der* (ab)*-Ebene abbilden. Umgekehrt entsprechen den Linienelementen eines Vereins in der* (ab)*-Ebene solche* ∞^1 *charakteristische Streifen, die ein Integralgebilde von* ∞^2 *Flächenelementen erzeugen.*

Wir stellen die einander bei der Abbildung entsprechenden Gebilde tabellarisch zusammen:

(ab)-Ebene.	Raum (x, y, z).
1) Die ∞^3 Linienelemente der Ebene.	1) Die ∞^3 charakteristischen Streifen der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung $F(x, y, z, p, q) = 0$.
2) Zwei vereinigte Linienelemente.	2) Zwei unendlich benachbarte charakteristische Streifen, von denen jedes Flächenelement des einen mit den unendlich benachbarten Elementen des anderen vereinigt liegt.
3) Verein von Linienelementen.	3) Integralgebilde von ∞^2 Elementen.

Im Vorhergehenden haben wir eine Abbildung der ∞^3 charakteristischen Streifen einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{32}$$

dadurch hergestellt, dass wir die Parameter a, b, c der charakteristischen Streifen als die Coordinaten der Linienelemente einer (ab)-Ebene deuteten.

Zweite Abbildung.

Wir können nun eine *zweite Abbildung*, die ganz analoge Eigenschaften wie die gefundene hat, auf *geometrischem* Wege herstellen. Es sei dabei *zunächst* wieder vorausgesetzt, dass die vorgelegte Differentialgleichung (32) weder linear in p, q noch frei von p, q sei. Es stelle

$$\Phi(x, y, z, a, b) = 0 \tag{33}$$

wiederum eine Schar von ∞^2 Integralflächen dar, die also eine vollständige Lösung bilden.

Schnitt m. e. Ebene.

Nunmehr *schneiden wir den ganzen Raum durch eine allgemein, aber bestimmt gewählte Ebene.* Jede Integralfläche wird von der Ebene in einer Curve, ev. nur in einem Punkt, geschnitten. Allgemeiner: Jedes Integralgebilde von ∞^2 Elementen hat mit der Ebene eine Curve oder nur einen Punkt gemein.

Wählen wir in der Ebene, in der $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ gewöhnliche Punktcoordinaten bedeuten mögen, eine beliebige Curve:

$$\psi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0,$$

die nicht zufälligerweise eine Charakteristik ist, so liegt diese Curve auf einer bestimmten Integralfläche (oder doch nur auf einer discreten Anzahl von Integralflächen), wie wir in § 3 des 11. Kap., S. 502, gesehen haben. Wir construierten sie dadurch, dass wir diejenigen ∞^1 Integralflächen der vollständigen Lösung (33) auswählten, welche die vorgelegte Curve berühren. Diese ∞^1 Flächen werden von der fraglichen Integralfläche umhüllt. Die ∞^1 Flächen schneiden die gewählte Ebene in ∞^1 Curven, und diese Curven werden von der Curve

$$\psi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$$

umhüllt.

Wenn wir jetzt die Schnittcurve der gewählten Ebene mit einer Integralfläche als das Bild der Integralfläche bezeichnen, so werden die ∞^2 Integralflächen der vollständigen Lösung (33) zu Bildern ∞^2 Curven in der Ebene haben. Unter diesen Curven sind ∞^1 enthalten, die von der beliebig gewählten Curve **Bild einer Integralfl.**

$$\psi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$$

umhüllt werden. Diese ∞^1 Curven sind die Bildcurven derjenigen ∞^1 Integralflächen der vollständigen Lösung (33), deren Umhüllende gerade die Integralfläche ist, die durch die gewählte Curve $\psi = 0$ hindurchgeht und also diese Curve zur Bildcurve hat.

Bei der jetzigen Abbildung werden somit die ∞^2 Integralflächen der vollständigen Lösung (33) als gewisse ∞^2 Curven in der Schnittebene abgebildet, während eine beliebige Integralfläche als die Umhüllende von beliebigen ∞^1 dieser ∞^2 Curven abgebildet wird.

Betrachten wir zwei einander längs einer Curve, also nach § 3 des 11. Kap., Satz 3, S. 503, längs einer Charakteristik berührende allgemeine Integralflächen. Sie haben längs der Charakteristik einen charakteristischen Streifen gemein. Die Schnittebene trifft die beiden Flächen in zwei Curven, die einander berühren, also ein Linienelement gemein haben, und zwar liegt dies Linienelement offenbar in demjenigen Flächenelement des charakteristischen Streifens, dessen Punkt in der Schnittebene liegt. Wir können daher sagen, *dass jedem charakteristischen Streifen in der Ebene ein Linienelement entspricht, nämlich dasjenige, in dem der Streifen die* ($\mathfrak{x}\mathfrak{y}$)*-Ebene schneidet.* **Linienel. als Bild d. char. Streifen.**

Nehmen wir wieder in der ($\mathfrak{x}\mathfrak{y}$)-Ebene eine beliebige Curve

$$\psi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$$

an, die nicht zufälligerweise selbst eine Charakteristik ist. Sie umhüllt ∞^1 der ∞^2 Curven, in denen die Integralflächen der vollständigen Lösung die Ebene schneiden. Die durch sie gehende Integralfläche berührt die zu diesen ∞^1 Curven gehörigen Integralflächen der vollständigen Lösung längs ∞^1 Charakteristiken, hat also mit jeder einen charakteristischen Streifen gemein und zwar den Streifen, der nach dem Vorhergehenden zum Bilde dasjenige Linienelement der Curve $\psi = 0$ hat, in dem der Streifen die Ebene schneidet.

Vereinigte Linienelem. Zwei unendlich benachbarte Linienelemente in der $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$-Ebene sind insbesondere dann *vereinigt*, wenn sie auf einer Curve $\psi = 0$ gelegen sind. Da dieser Curve im Raume eine Integralfläche und den beiden Linienelementen zwei unendlich benachbarte charakteristische Streifen auf dieser Integralfläche entsprechen, so folgt, dass die beiden Streifen die Eigenschaft haben, dass jedes Flächenelement des einen mit den unendlich benachbarten Flächenelementen des anderen vereinigt liegt. Wenn umgekehrt zwei charakteristische Streifen diese letztere Eigenschaft haben, so werden sie offenbar von der Ebene in zwei vereinigten Linienelementen geschnitten. Betrachten wir insbesondere alle Linienelemente eines *Punktes* in der Schnittebene. Sie gehören zu solchen ∞^1 Curven durch den Punkt, in denen ∞^1 Integralflächen der vollständigen Lösung die Bildebene schneiden. Diese ∞^1 Flächen haben ein umhüllendes Integralgebilde, das mit der Ebene nur jenen Punkt gemein hat. Die durch die Linienelemente des Punktes gehenden charakteristischen Streifen erzeugen das Integralgebilde. Dasselbe wird im allgemeinen eine Fläche sein, kann aber auch nur eine Curve sein. Dieser Fall kann jedoch, wenn die Differentialgleichung nicht linear ist, wie wir voraussetzten, nicht für jeden Punkt in der Schnittebene eintreten, weil sonst durch jede der ∞^3 charakteristischen Curven je ∞^1 charakteristische Streifen gingen, was absurd ist, da nur ∞^3 solche Streifen vorhanden sind.

Vereinigte char. Streifen.

Punkt als Element-verein.

Unsere Betrachtungen zeigen, dass durch zwei vereinigte Linienelemente der Ebene stets zwei solche benachbarte charakteristische Streifen gehen, von denen jedes Element des einen mit den benachbarten Elementen des andern vereinigt liegt.

Wir können diese Abbildung sofort auch auf den Fall übertragen, in dem die vorgelegte partielle Differentialgleichung *linear* in p, q ist. Denn auch in diesem Falle dürfen wir voraussetzen, dass die vollständige Lösung (33) aus ∞^2 Integralflächen bestehe, und können daher genau dieselbe Betrachtung wie im allgemeinen Fall anstellen. Der einzige Unterschied besteht darin, dass jetzt *jeder* Punkt der

Lin. Diffgl.

Schnittebene, sobald man ihn als Verein auffasst, ein solches Integralgebilde liefert, das aus allen ∞^2 Elementen einer Curve, also einer Charakteristik, besteht.

In dem Falle, in dem die vorgelegte partielle Differentialgleichung frei von p, q ist, versagt dagegen unser jetziges Abbildungsverfahren, denn in diesem Falle sind die Integralgebilde auf einer Fläche verteilt und schneiden nicht sämtlich eine allgemein gewählte Ebene.

Wir sprechen daher den Satz aus:

Satz 5: *Liegt im Raume* (x, y, z) *eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung* Ergebnis.

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

vor, die nicht von p *und* q *frei ist, und werden die Linienelemente, in denen eine feste Ebene die* ∞^3 *charakteristischen Streifen schneidet, als die Bilder dieser Streifen bezeichnet, so entsprechen zwei vereinigten Linienelementen stets zwei solche unendlich benachbarte charakteristische Streifen, von denen jedes Element des einen Streifens mit den unendlich benachbarten Elementen des anderen vereinigt liegt, und umgekehrt. Jedes Integralgebilde von* ∞^2 *Elementen bildet sich als ein Elementverein in der Ebene ab. Umgekehrt ist jeder Elementverein in der Ebene, der keine charakteristische Curve ist, das Bild eines Integralgebildes von* ∞^2 *Elementen.*

Wir haben in diesem Paragraphen zwei Abbildungen der Integralgebilde, insbesondere der charakteristischen Streifen, auf Ebenen kennen gelernt. Zur Übersicht stellen wir die einander dabei entsprechenden Gebilde tabellarisch zusammen:

Übersicht über beide Abbildgn.

(ab)-Ebene.	Raum (x, y, z).	$(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$-Ebene.
1) Die ∞^3 Linienelemente $\left(a, b, \frac{db}{da}\right)$ der Ebene.	1) Die ∞^3 charakteristischen Streifen der partiellen Differentialgleichung $F(x, y, z, p, q) = 0$.	1) Die ∞^3 Linienelemente der Ebene als Schnitt der Ebene mit den charakteristischen Streifen.
2) Zwei vereinigte Linienelemente.	2) Zwei unendlich benachbarte charakteristische Streifen, von denen jedes Element des einen mit den unendlich benachbarten Elementen des anderen vereinigt liegt.	2) Zwei vereinigte Linienelemente.
3) Verein von Linienelementen.	3) Integralgebilde von ∞^2 Elementen.	3) Verein von Linienelementen.
4) Die Punkte der Ebene, aufgefasst als Elementvereine.	4) Die Integralgebilde einer gewissen vollständigen Lösung.	4) Gewisse ∞^2 Vereine in der Ebene.

Die beiden Abbildungen haben also das Folgende *gemein:* Bei jeder ist das Bild eines charakteristischen Streifens ein Linienelement, und umgekehrt. Vereinigten Linienelementen entsprechen unendlich benachbarte charakteristische Streifen, von denen jedes Element des einen mit den unendlich benachbarten des anderen vereinigt liegt. Jedem Verein in der Ebene entspricht ein Integralgebilde von ∞^2 Flächenelementen. Der *Unterschied* beider Abbildungen besteht nur darin, dass bei der einen die Integralgebilde einer gewissen vollständigen Lösung als Punkte, bei der anderen im allgemeinen als ∞^2 Curven in der Ebene abgebildet werden.

Wir können nun direct die (ab)-Ebene mit der $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$-Ebene verknüpfen: Jedem Linienelement der (ab)-Ebene entspricht im Raume ein charakteristischer Streifen, und diesem Streifen entspricht in der $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$-Ebene wieder ein Linienelement. *Jedem Linienelement der (ab)-Ebene ist also ein Linienelement der $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$-Ebene zugeordnet. Diese Zuordnung findet offenbar auch im umgekehrten Sinne statt.* Dabei entsprechen ferner zwei vereinigten Linienelementen der einen Ebene stets zwei vereinigte Linienelemente der anderen, also jedem Elementverein der einen Ebene ein Elementverein der anderen.

Entsprechen zwischen d. Linienelementen beider Ebenen.

Nach § 3 des 2. Kap. ist daher *die Zuordnung zwischen beiden Bildebenen durch eine Berührungstransformation herstellbar.*

Berührungstrf

Wir haben also gefunden:

Satz 6: *Liegt im Raume (x, y, z) eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung*

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

mit einer vollständigen Lösung, bestehend aus ∞^2 Flächen:

$$\Phi(x, y, z, a, b) = 0,$$

vor, sodass je ∞^1 dieser Flächen, die durch eine Relation

$$\omega(a, b) = 0$$

ausgewählt werden, als umhüllendes Gebilde ein allgemeines Integralgebilde von ∞^2 Elementen bestimmen, so können diese allgemeinen Integralgebilde einerseits auf eine Ebene mit den Punktcoordinaten a, b als Elementvereine und andererseits auf eine feste Ebene im Raume durch Schneiden als Elementvereine abgebildet werden. Dadurch wird zwischen beiden Ebenen eine Zuordnung der Elementvereine hergestellt. Diese Zuordnung wird durch eine B e r ü h r u n g s t r a n s f o r m a t i o n *der einen Ebene in die andere Ebene vermittelt.*

Um diese Berührungstransformation auch analytisch herzustellen, wird es genügen, wenn wir dabei die $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$-Ebene etwa als die Ebene $z = 0$ wählen, sodass wir dann direct $\mathfrak{x} = x$, $\mathfrak{y} = y$ setzen können. Die Gleichung: Anal. Bestimmung der Berührtrf.

$$\Phi(x, y, z, a, b) = 0 \tag{33}$$

stellt bei bestimmt gewählten a, b eine Integralfläche der vollständigen Lösuug dar. Ihr entspricht in der (ab)-Ebene der Punkt (a, b). In der $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$-Ebene entspricht ihr die Curve

$$\Phi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 0, a, b) = 0. \tag{34}$$

Bei der gesuchten Berührungstransformation, welche die (ab)-Ebene in die $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$-Ebene überführt, muss also der Punkt (a, b) in die Curve (34) übergehen Nach § 4 des 2. Kap. (vgl. daselbst insbes. Satz 7, S. 50, und Theorem 1, S. 54) muss sich daher die Berührungstransformation durch Auflösung des Gleichungensystems:

$$\Phi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 0, a, b) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a} + \frac{\partial \Phi}{\partial b} c = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{x}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{y}} \mathfrak{y}' = 0 \tag{35}$$

nach $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}'$ ergeben. Man erhält alsdann das Linienelement $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}')$ der $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$-Ebene, das dem Linienelement $\left(a, b, c = \frac{db}{da}\right)$ der (ab)-Ebene entspricht. In (35) soll Φ natürlich überall die Function $\Phi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 0, a, b)$ sein.

Wir wollen verificieren, dass die durch (35) bestimmte Berührungstransformation in der That die oben betrachtete Beziehung zwischen den Elementvereinen bei der Ebene darstellt: Wir wählen eine Curve

$$\omega(a, b) = 0 \tag{36}$$

in der (ab)-Ebene. Ihr entspricht im Raume die Integralfläche, die durch Elimination von a, b, c aus den vier Gleichungen hervorgeht, die wir oben mit (19) bezeichneten (S. 535), nämlich aus den Gleichungen

$$\begin{cases} \Phi(x, y, z, a, b) = 0, & \omega(a, b) = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial a} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial b} c = 0, & \dfrac{\partial \omega}{\partial a} + \dfrac{\partial \omega}{\partial b} c = 0. \end{cases} \tag{37}$$

Ferner enthält die Curve (36) die ∞^1 Linienelemente $\left(a, b, c = \frac{db}{da}\right)$, für die

$$\omega(a, b) = 0, \qquad \frac{\partial \omega}{\partial a} + \frac{\partial \omega}{\partial b} c = 0 \tag{38}$$

ist. Wollen wir die ∞^1 Linienelemente $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}')$ erhalten, die diesen Linienelementen vermöge der Berührungstransformation (35) in der $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$-Ebene entsprechen, so haben wir aus den Gleichungen (35) und (38) a, b, c zu eliminieren. Die Curve dieser ∞^1 Linienelemente $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}')$ ergiebt sich analytisch durch Elimination von a, b, c und $\mathfrak{y}'$ aus den fünf Gleichungen (35) und (38). Da nur die letzte Gleichung (35) die Grösse $\mathfrak{y}'$ enthält, so wird die Curve dadurch erhalten, dass man a, b, c aus den vier Gleichungen

$$\begin{cases} \Phi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 0, a, b) = 0, & \omega(a, b) = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial a} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial b} c = 0, & \dfrac{\partial \omega}{\partial a} + \dfrac{\partial \omega}{\partial b} c = 0 \end{cases} \tag{39}$$

fortschafft.

Andererseits schneidet die Integralfläche, die nach Elimination von a, b, c durch (37) dargestellt wird, die $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$-Ebene oder also die Ebene $z = 0$ in der Curve, die durch diese vier Gleichungen dargestellt wird, wenn man in ihnen

$x = \mathfrak{x}$, $y = \mathfrak{y}$, $z = 0$ setzt und dann a, b, c eliminiert. Aber durch die Substitution $x = \mathfrak{x}$, $y = \mathfrak{y}$, $z = 0$ gehen aus (37) gerade die Gleichungen (39) hervor.

Mithin sehen wir auch analytisch, dass die durch (35) definierte Berührungstransformation eine Curve

$$\omega(a, b) = 0$$

in die Curve der $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$-Ebene überführt, in der diese Ebene von der Integralfläche (37) geschnitten wird.

Beispiel.

Beispiel: Ein wichtiges Beispiel zur Illustration dieser Theorie haben wir in § 1 und 2 des 10. Kap. betrachtet. Damals sprachen wir (S. 432) von den Miminalgeraden

$$(40)\qquad \begin{cases} (1 - s^2) X + i(1 + s^2) Y + 2sZ + F = 0, \\ 2sX - 2isY - 2Z - F' = 0 \end{cases}$$

des Raumes (X, Y, Z). Sie sind die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung (S. 420):

$$(41)\qquad 1 + \left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial Y}\right)^2 = 0.$$

Eine allgemeine Integralfläche dieser Gleichung ist eine Developpabele, die den Kugelkreis enthält. Berühren zwei solche Flächen einander längs einer Curve, also längs einer Charakteristik, d. h. längs einer Minimalgeraden, so haben sie längs dieser Geraden einen charakteristischen Streifen gemein. Die ∞^3 charakteristischen Streifen werden also hier von den Flächenelementen gebildet, die längs der ∞^3 Minimalgeraden in den Minimalebenen (S. 429) durch die Minimalgeraden liegen. Allgemein sind die Gleichungen (40) die einer Minimaldeveloppabeln, also einer Integralfläche, sobald darin $F = F(s)$ und $F' = F'(s)$ gesetzt und s alsdann eliminiert wird (S. 432). Die erste Gleiehung (40), nämlich:

$$(1 - s^2) X + i(1 + s^2) Y + 2sZ + F = 0,$$

stellt bei beliebigen Werten von s, F die ∞^2 Minimalebenen dar. Sie bilden eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung (41). Hier sind also s, F an die Stelle von a, b getreten, während die Relation $F = F(s)$ der Gleichung $\omega(a, b) = 0$ entspricht. Wir sagten in § 2 des 10. Kap., S. 434, dass sich jede Minimalgerade (40) als Linienelement in der Ebene $Z = 0$ abbildet, nämlich als das Linienelement, dessen Punkt der Schnittpunkt der Minimalgeraden mit der Ebene $Z = 0$ ist, während die Gerade des Elementes die Schnittgerade der Ebene $Z = 0$ mit derjenigen Minimalebene ist, welche die betrachtete Minimalgerade enthält. Factisch also ist dies Linienelement der Schnitt der Ebene $Z = 0$ mit dem charakteristischen Streifen längs der Minimalgeraden. Jeder Elementverein der Ebene $Z = 0$ lieferte eine Minimaldeveloppabele im Raume, also eine Integralfläche. Diese Abbildung ist nichts anderes als der Schnitt der Ebene $Z = 0$ mit allen Integralflächen (vgl. S. 434), also die *zweite* der oben im Texte betrachteten Abbildungen. Andererseits deuteten wir s, F, also die Grössen, die den Parametern a, b des Textes entsprechen, in § 3 des 10. Kap., S. 444, als rechtwinklige Punktcoordinaten in einer Ebene. Diese Deutung liefert die *erste* Abbildung des Textes. Vermöge ihrer werden die ∞^2 Minimalebenen, also die Integralflächen der vollständigen Lösung, als die Punkte der Ebene dargestellt.

Aus unseren Entwickelungen, die eine Beziehung zwischen den ∞^3 charakteristischen Streifen der partiellen Differentialgleichung $F = 0$ und den ∞^3 Linienelementen einer Ebene lieferten, folgt, dass jeder Satz über die Elementvereine in der Ebene einen Satz über die Integralgebilde der partiellen Differentialgleichung ergiebt. Von diesem Princípe werden wir im weiteren Verlauf dieses Kapitels Gebrauch machen.

Hier wollen wir nur Einiges hervorheben: Zunächst haben wir schon oben, S. 546, erkannt, dass der folgende Satz gilt, der hier noch ausdrücklich formuliert werden möge:

Satz 7: *Alle diejenigen charakteristischen Streifen einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung:* Char. Streifen durch einen Pkt.

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

im Raume (x, y, z), die durch einen gemeinsamen Punkt allgemeiner Lage gehen, erzeugen ein Integralgebilde von ∞^2 Elementen. Dasselbe ist im Allgemeinen eine Fläche, kann sich aber auf eine Curve oder auf einen Punkt reducieren.

Hieraus folgt weiter:

Satz 8: *Alle die charakteristischen Curven einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung im Raume (x, y, z), die durch einen gemeinsamen Punkt von allgemeiner Lage gehen, erzeugen, wenn es deren unendlich viele giebt, eine Integralfläche.* Charakt. Curven durch einen Pkt.

Hieraus folgt, dass, wenn die Charakteristiken zweier unendlich benachbarter charakteristischen Streifen einander schneiden, alsdann jedes Element des einen Streifens mit den benachbarten Elementen des anderen vereinigt ist.

Betrachten wir zwei solche charakteristische Streifen, die von zwei Flächenelementen in vereinigter Lage ausgehen. Construieren wir eine Ebene, die durch die Punkte dieser beiden Flächenelemente hindurchgeht, so wird sie beide in zwei Linienelementen schneiden, die vereinigt liegen.

Benutzen wir nun diese Ebene als die Bildebene bei der zweiten Abbildung, so folgt aus Satz 5 unmittelbar der

Satz 9: *Liegen zwei Flächenelemente (x, y, z, p, q) der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung:* Char. Streifen durch vereinigte Flächenel.

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

im Raume (x, y, z) vereinigt, so liegen auch die durch diese Flächenelemente gehenden charakterischen Streifen so, dass sie einander unendlich benachbart sind und jedes Element des einen Streifens mit jedem unendlich benachbarten Element des anderen Streifens vereinigt ist.

Allerdings ist zu bemerken, dass die zum Beweise benutzte Abbildung auf einer Schnittebene bei den von p, q freien partiellen Differentialgleichungen versagt (nach S. 547). Aber in diesem Falle ist der Satz evident.

Allg. Constr. d. Integralfln.

Wenn wir nun eine beliebige Curve c im Raume wählen (siehe Fig. 92), die keine Charakteristik ist, und längs der Curve die ∞^1 Flächenelemente construieren, welche die Curve berühren und der partiellen Differentialgleichung angehören, so bilden diese ∞^1 Elemente einen Elementstreifen. Auf je zwei consecutive Elemente des Streifens können wir den Satz 9 anwenden. Mithin construieren wir die ∞^1 charakteristischen Streifen γ durch diese Elemente und erhalten dann als Inbegriff der Streifen γ ein Integralgebilde. Dies Integralgebilde enthält die von den Punkten $p, p_1, p_2 \ldots$ der Curve c ausgehenden ∞^1 Charakteristiken der Streifen γ. Diese Erzeugung der Integralflächen haben wir im Grunde schon in § 4 des 11. Kap., S. 512, kennen gelernt. Dies Ergebnis sprechen wir so aus:

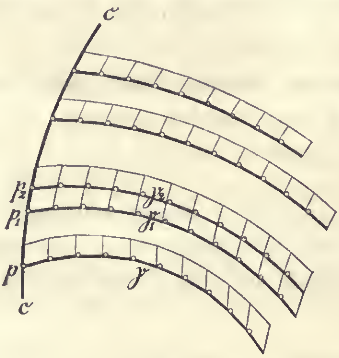

Fig. 92.

Theorem 23: *Liegt eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung im Raume (x, y, z):*

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

vor und wird aus der Schar der ∞^4 Flächenelemente (x, y, z, p, q), die der Gleichung $F = 0$ genügen, nach einem allgemeinen Gesetz eine solche Schar von ∞^1 Elementen herausgegriffen, die zwar einen Elementstreifen, aber keinen charakteristischen Streifen darstellt, so erzeugen die durch diese ∞^1 Elemente gehenden charakteristischen Streifen einen Verein von ∞^2 Elementen, der ein Integralgebilde der Differentialgleichung ist; und so lassen sich alle allgemeinen Integralgebilde von ∞^2 Elementen erzeugen.

Wir haben im Fall einer nicht linearen partiellen Differentialgleichung in § 3 des 11. Kap., S. 500, gesehen, dass die ∞^1 auf einer allgemeinen Integralfläche gelegenen charakteristischen Curven eine Umhüllende (Rückkehrcurve) besitzen. Diese Umhüllende ist eine Integralcurve der Monge'schen Gleichung, die der partiellen Differentialgleichung zugeordnet ist. Insbesondere kann die Umhüllende sich auf einen Punkt reducieren.

Hiermit haben wir die Umkehrung jener wichtigen Bemerkung gefunden, die wir auf der vorigen Seite an den Satz 8 anknüpfen konnten, sodass sich der folgende Satz ergeben hat:

Satz 10: *∞^1 charakteristische Curven der nicht linearen partiellen Differentialgleichung*

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

im Raume (x, y, z) erzeugen dann und nur dann eine Integralfläche, wenn je zwei unendlich benachbarte unter diesen Curven einander schneiden, anders ausgesprochen: wenn die ∞^1 Curven eine Umhüllende haben.

Hiermit sind wir auch zu der Art gelangt, wie Monge die Bestimmung der Integralcurven einer Monge'schen Gleichung auf die Integration der zugehörigen partiellen Differentialgleichung zurückgeführt hat, da sich der Satz ergeben hat:

Satz 11: *Liegt eine Monge'sche Gleichung im Raume (x, y, z) vor:*

$$\Omega(x, y, z;\ dx, dy, dz) = 0,$$

so findet man ihre Integralcurven, indem man die zugehörige partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

integriert und die Rückkehrcurven auf ihren Integralflächen, d. h. die Umhüllenden der Charakteristiken auf ihren Integralflächen construiert.

Ein Beispiel hierzu giebt die Art, wie wir in § 2 des 10. Kap., S. 433, die Minimalcurven bestimmten.

Bei allen diesen Sätzen ist zu bemerken, dass sie für Ausnahmestellen im Raume versagen können. Solche Ausnahmen sind jedoch wie immer dadurch zu vermeiden, dass man sich auf einen passenden Bereich beschränkt.

Schliesslich legen wir uns hier noch die Frage vor, wie die ∞^3 charakteristischen Streifen einer beliebigen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung (Anal. Defin. d. charakt. Streifen.)

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

analytisch zu definieren sind. Diese Frage lässt sich leicht beantworten: In § 4 des 11. Kap. haben wir gesehen, dass diejenigen ∞^1 Flächenelemente (x, y, z, p, q) einer nicht linearen partiellen Differentialgleichung $F = 0$, die längs einer charakteristischen Curve gelegen sind, dem System von vier simultanen gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{F_p p + F_q q} = \frac{dp}{-F_x - F_z p} = \frac{dq}{-F_y - F_z q} \tag{42}$$

genüge leisten (S. 507). Nun sind diese ∞^1 Flächenelemente gerade die eines charakteristischen Streifens, also werden die ∞^3 charakteristischen Streifen durch das System (42) definiert.

Hierbei ist natürlich zu beachten, dass die Grössen x, y, z, p, q an die Gleichung $F = 0$ gebunden sind. Wir bemerkten schon früher, dass F selbst ein Integral von (42) ist. Wenn wir z. B. q aus $F = 0$ als Function von x, y, z, p berechnen und in (42) einsetzen, so können wir das letzte Glied dieses Systems fortlassen. Die durch die verbleibenden Glieder dargestellten drei Gleichungen in x, y, z, p haben drei von einander unabhängige Integrale

$$\psi_1(x, y, z, p) = c_1, \quad \psi_2(x, y, z, p) = c_2, \quad \psi_3(x, y, z, p) = c_3,$$

die zusammen mit $F = 0$ die ∞^3 charakteristischen Streifen (c_1, c_2, c_3) darstellen.

Ist die vorgelegte partielle Differentialgleichung erster Ordnung *linear in* p, q, also von der Form:

$$F \equiv Xp + Yq - Z = 0, \tag{43}$$

so genügen ihre ∞^3 charakteristischen Streifen ebenfalls dem System (42). Denn nach S. 541 liegen auf jeder Fläche $z = \varphi(x, y)$, die dieser Gleichung genügt, ∞^1 Charakteristiken, längs deren

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} \tag{44}$$

ist. Längs einer Fortschreitungsrichtung $(dx : dy : dz)$ auf der Fläche ist nun, da $p = \varphi_x$, $q = \varphi_y$ ist:

$$dp = \varphi_{xx}\, dx + \varphi_{xy}\, dy, \qquad dq = \varphi_{xy}\, dx + \varphi_{yy}\, dy. \tag{45}$$

Da andererseits (43) durch $z = \varphi$, $p = \varphi_x$, $q = \varphi_y$ identisch erfüllt wird, so giebt die Differentiation von (43) nach x bez. y:

$$X\varphi_{xx} + Y\varphi_{xy} + (X_x + X_z p)p + (Y_x + Y_z p)q - (Z_x + Z_z p) = 0,$$
$$X\varphi_{xy} + Y\varphi_{yy} + (X_y + X_z q)p + (Y_y + Y_z q)q - (Z_y + Z_z q) = 0$$

oder also nach (43) und (44):

$$\begin{cases} X\varphi_{xx} + Y\varphi_{xy} = -F_x - F_z p, \\ X\varphi_{xy} + Y\varphi_{yy} = -F_y - F_z q. \end{cases} \tag{46}$$

Elimination von φ_{xx}, φ_{xy} und φ_{yy} aus den Gleichungen (44), (45), (46) liefert genau die obigen Gleichungen (42), da ja hier $X \equiv F_p$, $Y \equiv F_q$, also $Z = Xp + Yq \equiv F_p p + F_q q$ ist.

Ist endlich die vorgelegte partielle Differentialgleichung *frei von* p, q, also von der Form:

$$F(x, y, z) = 0,$$

so reducieren sich, wie wir auf S. 543 sahen, die ∞^3 charakteristischen Streifen auf die ∞^3 Büschel von Flächenelementen, deren Axen die

Linienelemente der *Fläche* $F = 0$ sind. Für die ∞^1 Flächenelemente (x, y, z, p, q) eines solchen Büschels haben x, y, z constante Werte, sodass $dx = 0$, $dy = 0$, $dz = 0$ ist. Ferner ist für diese Flächenelemente

$$\frac{F_x + F_z p}{F_y + F_z q} = \text{Const.},$$

woraus bei festen x, y, z durch Differentiation folgt:

$$\frac{dp}{F_x + F_z p} = \frac{dq}{F_y + F_z q}.$$

Zusammen mit

$$dx = dy = dz = 0$$

geben diese Gleichungen für ein charakteristisches Büschel gerade die Gleichungen (42), wie sie sich für den Fall darstellen, dass F frei von p und q ist.

Es hat sich somit ergeben:

Satz 12: *Jede partielle Differentialgleichung erster Ordnung* System von sim. Dffgln. f. d. char. Streifen.

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

im Raume (x, y, z) *hat* ∞^3 *charakteristische Streifen, die durch* $F = 0$ *und durch das System von vier simultanen gewöhnlichen Differentialgleichungen*

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{F_p p + F_q q} = \frac{dp}{-F_x - F_z p} = \frac{dq}{-F_y - F_z q}$$

definiert sind. Eliminiert man eine der fünf Veränderlichen x, y, z, p, q *mit Hülfe von* $F = 0$ *aus diesem System, von dem* F *selbst ein Integral ist, und integriert man alsdann das System, so ergeben drei von einander unabhängige Integrale* ψ_1, ψ_2, ψ_3 *die Gleichungen der* ∞^3 *charakteristischen Streifen in der endlichen Form:*

$$F = 0, \quad \psi_1 = \text{Const.}, \quad \psi_2 = \text{Const.}, \quad \psi_3 = \text{Const.}$$

Auf alle Betrachtungen dieses Paragraphen bezieht sich die Bemerkung, dass wir von den *singulären* Integralgebilden stets abgesehen haben.

§ 3. Existenzbeweis für die vollständige Lösung.

Der erste wirkliche Beweis dafür, dass jede partielle Differentialgleichung erster Ordnung, die durch eine analytische Gleichung dargestellt wird, eine vollständige Lösung und infolge dessen nach Lagrange's Theorie unendlich viele Integralflächen besitzt, die von willkürlichen Functionen abhängen, rührt von Cauchy her. Die Theorien von Lagrange und Monge weisen aber schon darauf hin, dass dieser Existenzbeweis darauf reduciert werden kann, nachzuweisen, dass ein gewisses System von simultanen gewöhnlichen Differentialgleichungen integrabel ist.

Vorbemerkungen. Wir wollen uns hier auf den Standpunkt stellen, dass wir als bekannt voraussetzen, dass jedes System von $n-1$ simultanen gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1 \dots x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1 \dots x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{X_n(x_1 \dots x_n)},$$

in dem die Nenner $X_1, X_2 \dots X_n$ analytische Functionen von $x_1 \dots x_n$ sind, gerade $n-1$ von einander unabhängige Integrale $u_1 \dots u_{n-1}$ hat, die selbst analytische Functionen ihrer Argumente $x_1 \dots x_n$ sind, die mit den Functionen $X_1, X_2 \dots X_n$ einen Bereich von Wertsystemen $x_1 \dots x_n$ gemein haben, innerhalb dessen sie sich alle regulär verhalten. Im Übrigen benutzen wir in diesem Paragraphen noch die einfachsten Sätze aus der Theorie der analytischen Functionen. — Da die linearen Differentialgleichungen mit Systemen simultaner gewöhnlicher Differentialgleichungen äquivalent sind, so erkennen wir, dass wir den Existenzbeweis nur für *nicht* lineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung zu führen brauchen.

Wir haben gesehen, dass, sobald die partielle Differentialgleichung

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

eine vollständige Lösung, bestehend aus ∞^2 Flächen:

$$\Phi(x, y, z, a, b) = 0,$$

hat, jede nicht singuläre Integralfläche von ∞^1 charakteristischen Streifen erzeugt wird und dass alle ∞^3 charakteristischen Streifen sowohl der Gleichung $F = 0$ als auch dem System von vier simultanen gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{F_p p + F_q q} = \frac{dp}{-F_x - F_z p} = \frac{dq}{-F_y - F_z q} \tag{47}$$

genügen und hierdurch definiert sind.

Indem wir nun beweisen wollen, dass jede partielle Differentialgleichung $F = 0$ vollständige Lösungen besitzt, nehmen wir unseren Ausgangspunkt in der Bemerkung, dass das System von vier simultanen Gleichungen (47) stets, wie auch die Gleichung $F = 0$ gegeben sein mag, die ∞^4 Elemente (x, y, z, p, q) dieser Gleichung $F = 0$ in ∞^3 Scharen von je ∞^1 Elementen zerlegt. Zunächst wollen wir beweisen, dass jede dieser Scharen von ∞^1 Elementen einen Elementstreifen bildet. Dies werden wir sogleich ausführlich darthun.

Wir setzen dabei voraus, dass $F = 0$ eine *analytische* Gleichung sei, sodass auch die Nenner in (47) analytische Functionen von x, y, z sind, die sich innerhalb eines gewissen *gemeinsamen* Bereiches regulär verhalten.

Nach unserer Vorbemerkung hat das System (47) vier von einander unabhängige Integrale, die analytische Functionen von x, y, z, p, q sind. Ein Integral ist F selbst, denn der Ausdruck Integrat. d. Systems von sim. Dffgln.

$$dF \equiv F_x dx + F_y dy + F_z dz + F_p dp + F_q dq$$

verschwindet infolge von (47) identisch. Eliminieren wir nun vermöge $F = 0$ etwa q aus dem System (47), so reduciert es sich auf ein System von *drei* Gleichungen von der Form:

$$(48) \qquad \frac{dx}{X(x, y, z, p)} = \frac{dy}{Y(x, y, z, p)} = \frac{dz}{Z(x, y, z, p)} = \frac{dp}{P(x, y, z, p)}.$$

Innerhalb eines gewissen gemeinsamen Bereiches sind nun X, Y, Z, P reguläre analytische Functionen ihrer vier Argumente x, y, z, p. Das System (48) hat drei von einander unabhängige Integrale ψ_1, ψ_2, ψ_3, die innerhalb eines Bereiches zugleich mit x, y, z, p reguläre analytische Functionen von x, y, z, p sind. Die vier Gleichungen mit den drei Parametern c_1, c_2, c_3:

$$(49) \qquad F = 0, \quad \psi_1 = c_1, \quad \psi_2 = c_2, \quad \psi_3 = c_3$$

ordnen die ∞^4 Flächenelemente (x, y, z, p, q) der Gleichung $F = 0$ in ∞^3 Scharen an, von denen jede einzelne durch die Gleichungen (49) bei gegebenen Werten der Constanten c_1, c_2, c_3 dargestellt wird.

Wir behaupten, dass diese ∞^3 Scharen von je ∞^1 Elementen sämtlich *Elementstreifen* sind, d. h. dass jedes Element dieser Schar mit den benachbarten Elementen der Schar vereinigt liegt. In der That, die ∞^1 Elemente (x, y, z, p, q) einer solchen Schar können wir dadurch analytisch darstellen, dass wir etwa q als irgend eine analytische Function einer Hülfsveränderlichen τ geben, worauf uns die vier Gleichungen (49) auch x, y, z, p als analytische Functionen von τ liefern. Die so erhaltenen Functionen x, y, z, p, q von τ genügen dann dem System (47), und es ist deshalb längs der Elemente einer jener Scharen der Ausdruck

$$dz - p dx - q dy$$

nach (47) proportional

$$(F_p p + F_q q) - p F_p - q F_q,$$

d. h. identisch gleich Null. Die Bedingung der vereinigten Lage (vgl. § 1, S. 523) ist also erfüllt.

Defin. d. char. Streifen. Somit sind wir zu ∞^3 Elementstreifen gelangt, und wir *nennen* diese Streifen in diesem Paragraphen *die charakteristischen Streifen der Gleichung* $F=0$.

Wenn wir uns auf einen Bereich beschränken, in dem die Gleichungen (49) *ein*deutig auflösbar sind, so gehört jedes innerhalb dieses Bereiches gelegene Flächenelement (x, y, z, p, q) der Gleichung $F=0$ einem und nur einem charakteristischen Streifen an. Hiermit sind insbesondere diejenigen Flächenelemente ausgeschlossen, für die alle Nenner der Gleichungen (47) verschwinden.

Wenn wir die Glieder des Systems (47) oder (48) gleich $d\tau$ setzen, so können wir uns die ∞^3 charakteristischen Streifen in der Weise bestimmt denken, dass wir unter x, y, z, p, q diejenigen analytischen Functionen von τ verstehen, die der Gleichung $F=0$ sowie dem System

$$(50)\qquad \frac{dx}{F_p}=\frac{dy}{F_q}=\frac{dz}{F_p p+F_q q}=\frac{dp}{-F_x-F_z p}=\frac{dq}{-F_y-F_z q}=d\tau$$

genügen. Dabei dürfen wir den Functionen x, y, z, p, q beliebige *Anfangswerte* x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 innerhalb des Bereiches vorschreiben. Die ∞^3 charakteristischen Streifen werden also durch fünf analytische Gleichungen von der Form:

Anal. Darst. d. char. Streifen.

$$(51)\qquad x=\mathfrak{x}(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, \tau),\ \ldots\ldots\ldots\ q=\mathfrak{q}(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, \tau)$$

definiert sein, die sich für $\tau=0$ auf $x=x_0, \ldots q=q_0$ reducieren. Die fünf Parameter $x_0 \ldots q_0$ sind natürlich nicht sämtlich wesentlich, sondern nur drei von ihnen, da es nur ∞^3 charakteristische Streifen giebt.

Beliebiger Elementstreifen. Nunmehr wählen wir innerhalb des Bereiches einen beliebigen Elementstreifen, der *kein* charakteristischer Streifen ist und etwa definiert sei durch die folgenden analytischen Gleichungen, in denen wir zur Unterscheidung x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 als Coordinaten wählen:

$$(52)\qquad x_0=\mathfrak{X}(t),\ \ y_0=\mathfrak{Y}(t),\ \ z_0=\mathfrak{Z}(t),\ \ p_0=\mathfrak{P}(t),\ \ q_0=\mathfrak{Q}(t).$$

Die Bedingung der vereinigten Lage (vgl. § 1, S. 523):

$$dz-p\,dx-q\,dy=0$$

soll also von diesen ∞^1 Elementen erfüllt sein, d. h. es soll für diese Functionen identisch

$$(53)\qquad \frac{dz_0}{dt}-p_0\frac{dx_0}{dt}-q_0\frac{dy_0}{dt}=0$$

sein. Dass andererseits die Functionen (51) die Bedingung der vereinigten Lage erfüllen, wissen wir.

Jetzt verstehen wir unter $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ ein beliebiges der ∞^1 Elemente des Elementstreifens (52) und legen durch dies Element den betreffenden charakteristischen Streifen (51). Für ein beliebiges Element (x, y, z, p, q) dieses Streifens ist dann:

∞^1 char. Streifen durch e. bel. Element-streifen.

$$(54) \qquad x = \mathfrak{x}(\mathfrak{X}(t), \ldots \mathfrak{Q}(t), \tau), \ldots\ldots q = \mathfrak{q}(\mathfrak{X}(t), \ldots \mathfrak{Q}(t), \tau),$$

sodass $x \ldots q$ analytische Functionen von t und τ werden. Lässt man t, τ sich continuierlich ändern, so erhält man hiermit die Coordinaten (x, y, z, p, q) aller ∞^2 Flächenelemente derjenigen ∞^1 charakteristischen Streifen, die durch die Flächenelemente des gewählten Elementstreifens (52) gehen.

Alle diese ∞^2 Flächenelemente genügen der vorgelegten partiellen Differentialgleichung $F = 0$. Wir behaupten, dass sie einen Elementverein bilden. Ist dies bewiesen, so liegt also in (54) ein Integralgebilde von ∞^2 Elementen vor.

Um die Behauptung zu beweisen, beachten wir, dass jedem Wertepaar t, τ ein Flächenelement (54) entspricht. Es handelt sich also darum, nachzuweisen, dass die Elemente (t, τ) und $(t + dt, \tau + d\tau)$ vereinigt liegen, d. h. die Bedingung

Nachweis d. verein. Lage.

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

erfüllen. Nun ist aber für diese beiden Elemente:

$$(55) \quad dz - p\,dx - q\,dy = \left(\frac{\partial z}{\partial t} - p\frac{\partial x}{\partial t} - q\frac{\partial y}{\partial t}\right)dt + \left(\frac{\partial z}{\partial \tau} - p\frac{\partial x}{\partial \tau} - q\frac{\partial y}{\partial \tau}\right)d\tau.$$

Hierin bedeuten x, y, z, p, q die Functionen (54) von t und τ.

Erster Teil d. Beweises.

Der Coefficient von $d\tau$ ist identisch gleich Null. Denn für die Functionen (51) von τ ist, wie wir wissen,

$$\frac{dz}{d\tau} - p\frac{dx}{d\tau} - q\frac{dy}{d\tau} \equiv 0.$$

Wenn wir in diese Functionen (51) für x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 die Werte (52) einsetzen, so bleibt nach wie vor diese Identität richtig. Also ist der Coefficient von $d\tau$ in (55) in der That identisch gleich Null.

Dass nun auch der Coefficient von dt verschwindet, ist nicht ganz so einfach zu erkennen. Wir beweisen dies so: Es ist, wenn unter x, y, z immer die Functionen (54) von t und τ verstanden werden:

Zweiter Teil d. Beweises.

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial z}{\partial t} - p\frac{\partial x}{\partial t} - q\frac{\partial y}{\partial t}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial \tau} - p\frac{\partial x}{\partial \tau} - q\frac{\partial y}{\partial \tau}\right) - \frac{\partial p}{\partial \tau}\frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial \tau}\frac{\partial y}{\partial t} + \\ + \frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial q}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial \tau}.$$

Der in der Klammer rechts stehende Ausdruck ist, wie soeben gezeigt wurde, identisch gleich Null. Da ferner die Functionen (54) die Gleichungen (50) befriedigen, so können wir schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial z}{\partial t}-p\frac{\partial x}{\partial t}-q\frac{\partial y}{\partial t}\right)\equiv(F_x+F_zp)\frac{\partial x}{\partial t}+(F_y+F_zq)\frac{\partial y}{\partial t}+F_p\frac{\partial p}{\partial t}+F_q\frac{\partial q}{\partial t}$$
$$\equiv\frac{\partial F}{\partial t}-F_z\left(\frac{\partial z}{\partial t}-p\frac{\partial x}{\partial t}-q\frac{\partial y}{\partial t}\right).$$

Für die Functionen (54) ist aber $F\equiv 0$. Also bleibt:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial z}{\partial t}-p\frac{\partial x}{\partial t}-q\frac{\partial y}{\partial t}\right)\equiv-F_z\left(\frac{\partial z}{\partial t}-p\frac{\partial x}{\partial t}-q\frac{\partial y}{\partial t}\right).$$

Hierin sind natürlich immer in F_z die Functionen (54) von t und τ eingesetzt zu denken, sodass F_z eine gewisse Function von t und τ bedeutet, *die in unserem Bereiche endlich ist.*

Die letzte Gleichung integrieren wir nun über τ von $\tau=0$ an bis zu einem beliebigen Werte von τ. Für $\tau=0$ reducieren sich x, y, z, p, q nach (51) auf x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, d. h. auf die Werte (52). Also giebt die Integration:

$$\frac{\partial z}{\partial t}-p\frac{\partial x}{\partial t}-q\frac{\partial y}{\partial t}\equiv e^{-\int_0^\tau F_z\partial\tau}\left(\frac{dz_0}{dt}-p\frac{dx_0}{dt}-q\frac{dy_0}{dt}\right).$$

Aber nach (53) ist die rechte Seite gleich Null, also auch die linke, was zu beweisen war.

Existenz eines Integralgebildes. Es ist somit gezeigt, dass die Gleichungen (54) einen Verein von ∞^2 Flächenelementen und daher ein *Integralgebilde* der vorgelegten Differentialgleichung $F=0$ darstellen. Da die Integralgleichungen (51) des Systems (50) nur dann für x, y, z constante Werte geben, wenn in (50) die Nenner von dx, dy, dz vermöge $F=0$ verschwinden, was nicht eintritt, sobald $F=0$ von p und q nicht völlig frei ist, so folgt, dass die charakteristischen Streifen (51) aus je ∞^1 Elementen längs einer *Curve*, der Charakteristik, bestehen. Den Elementstreifen (52) können wir auch stets so wählen, dass er aus ∞^1 Elementen längs einer *Curve* besteht; also folgt, dass das Integralgebilde (54) aus ∞^2 Flächenelementen längs ∞^1 charakteristischer Curven besteht und deshalb eine Integral*fläche* ist.

Um nun eine vollständige Lösung der vorgelegten partiellen Differentialgleichung $F=0$ herzustellen, können wir so verfahren:

Wir wählen im Bereiche, in dem wir uns bisher bewegt haben, eine beliebige Ebene. Durch jedes Linienelement der Ebene geht ein Flächenelement der Gleichung $F=0$. Wenn wir dies als Element $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ betrachten, so bestimmt das Gleichungensystem (51) den charakteristischen Streifen, dem dies Flächenelement angehört. Zu jedem Linienelement der Ebene gehört daher ein bestimmter durch ihn gehender charakteristischer Streifen (51).

Wählen wir in der Ebene einen Elementverein und die Curve dieses Elementvereins als die Curve des oben benutzten beliebigen Elementstreifens (52), so stellen die Gleichungen (54) die ∞^1 charakteristischen Streifen dar, die durch die Linienelemente des Elementvereins gehen und eine Integralfläche erzeugen. Wenn wir nun in der Ebene ∞^2 Elementvereine auswählen, die also alle ∞^3 Linienelemente der Ebene enthalten, so gehören zu ihnen ∞^2 Integralflächen (54), in denen alle ∞^3 charakteristischen Streifen (51) enthalten sind. Diese ∞^2 Integralflächen enthalten daher alle ∞^4 Flächenelemente der vorgelegten Differentialgleichung $F = 0$ und stellen eine *vollständige Lösung* dar. **Existenz einer vollst. Lösg.**

Es hat sich somit insbesondere ergeben:

Theorem 24: *Ist eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung in x, y, z durch eine analytische Gleichung*

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

definiert, so hat sie stets eine vollständige Lösung, bestehend aus ∞^2 Integralgebilden, die durch analytische Gleichungen zwischen x, y, z, p, q und zwei Parametern a, b dargestellt wird.

Im vorigen Kapitel zeigten wir, wie Lagrange und Monge auf den Begriff: *charakteristische Curven* geführt wurden. Da wir nun in dem gegenwärtigen Kapitel den Begriff: Fläche durch den allgemeinen Begriff: Elementverein ersetzt und demgemäss die ganze Integrationstheorie vom Standpunkt der Geometrie der Flächenelemente aus entwickelt haben, haben wir den Begriff: charakteristische Curve durch den naturgemäss zweckmässigeren Begriff: *charakteristischer Streifen* ersetzen müssen. Mit Zugrundelegung der beiden Begriffe: Element und Elementstreifen ist es uns gelungen, die Hauptsätze der Theorie in einfacher und dabei *allgemeingültiger* Weise zu formulieren.

Wenn wir nun aber auch der Ansicht sind, dass sich diese Fassung der Hauptsätze jedenfalls ihrem Inhalte nach nicht weiter verbessern lässt, so müssen wir doch auf der anderen Seite anerkennen, dass sich ihre Begründung, die wir im Vorhergehenden absichtlich an die geschichtliche Entwickelung der Theorie angeknüpft haben, zugleich knapper und schärfer formulieren lässt.

Directe Begründg. der Theorie.

Wir wollen deshalb hier in knappen Worten *eine von der ursprünglichen Entwickelung unabhängige, directe Theorie der partiellen Differentialgleichungen geben.*

Vorgelegt sei also die partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

im Raume (x, y, z). Ein jeder Elementverein, dessen Elemente der Gleichung $F = 0$ genügen, heisst ein Integralgebilde. Wir betrachten die eventuell vorhandenen Integralgebilde von ∞^2 Elementen, die Flächen darstellen. Jedem Punkte (x, y, z) eines solchen Gebildes ordnen wir durch die Gleichung:

$$dx : dy = F_p : F_q$$

eine Richtung auf dem Integralgebilde zu. Wir schliessen dabei den Fall aus, dass F_p und F_q für alle Punkte des Integralgebildes verschwinden. Da auf der Fläche

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

ist, so gelten für die dem Punkte (x, y, z) zugeordnete Richtung die drei Gleichungen

$$(56) \qquad dx = \varrho F_p, \quad dy = \varrho F_q, \quad dz = \varrho(F_p p + F_q q),$$

in denen ϱ eine unendlich kleine Grösse bedeutet. Nun ist auf dem Integralgebilde $F = 0$, und daher folgt durch Differentiation nach x:

$$(57) \qquad F_x + F_z p + F_p \frac{\partial p}{\partial x} + F_q \frac{\partial q}{\partial x} = 0,$$

woraus sich durch Substitution der Werte von F_p und F_q aus den beiden ersten Gleichungen (56) sowie mit Rücksicht darauf, dass $\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}$ ist, ergiebt:

$$\varrho(F_x + F_z p) + \left(\frac{\partial p}{\partial x}\,dx + \frac{\partial p}{\partial y}\,dy\right) = 0$$

oder:

$$(58) \qquad dp = -\,\varrho(F_x + F_z p).$$

Analog kommt:

$$(58') \qquad dq = -\,\varrho(F_y + F_z q).$$

Dies Ergebnis überrascht, denn wenn dx, dy, dz proportional Functionen von x, y, z, p, q gesetzt werden, so könnte man von vornherein erwarten, dass dadurch dp und dq proportional Functionen von x, y, z, p, q und von den *zweiten* Ableitungen von z werden. Aber die zweiten Ableitungen von z kommen hier gar nicht vor.

In den Formeln (56), (57), (58) haben wir den Satz gewonnen:

Satz 13: *Alle diejenigen Integralflächen einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung im Raume* (x, y, z):

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

die ein Element (x, y, z, p, q) *gemein haben, haben überdies ein unendlich benachbartes Element* $(x + dx, y + dy, z + dz, p + dp, q + dq)$ *gemein, für das*

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{F_p p + F_q q} = \frac{dp}{-F_x - F_z p} = \frac{dq}{-F_y - F_z q}$$

ist.

Das System

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{F_p p + F_q q} = \frac{dp}{-F_x - F_z p} = \frac{dq}{-F_y - F_z q} \tag{59}$$

ordnet nun alle ∞^4 Elemente der Gleichung $F = 0$, wie wir schon öfters ausführten, in ∞^3 Elementstreifen an, und diese Streifen heissen die charakteristischen Streifen.

Hiermit ist zunächst wenigstens für die Integral*flächen* der partiellen Differentialgleichungen ein directer Beweis für den folgenden Satz gegeben, den wir früher auf anderen Wegen fanden und der im Theorem 23 (§ 2, S. 552) enthalten ist:

Satz 14: *Liegt im Raume* (x, y, z) *eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung*

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

vor, so werden alle Integralgebilde, die Vereine von ∞^2 *Elementen sind, durch* ∞^1 *von den* ∞^3 *charakteristischen Streifen erzeugt.*

Dass dieser Satz auch für solche Integralgebilde von ∞^2 Elementen gilt, die keine Flächen, sondern Curven oder Punkte vorstellen, folgt leicht aus dem Principe der Dualität. Doch wollen wir uns bei unserer jetzigen knappen Darstellung hiermit nicht aufhalten, zumal wir es ja schon auf anderem Wege gezeigt haben, ebenso wenig damit, wie man die Richtigkeit des Satzes direct auch für den Fall beweist, in dem $F = 0$ von p und q frei ist.

Der obige *Beweis* des Satzes 14 versagt nur dann bei Gleichungen, die *nicht* frei von p und q sind, wenn für alle Elemente einer Integralfläche F_p und F_q, d. h. nach (57) alle Nenner in (59) verschwinden, also nur dann, wenn die Integralfläche singulär ist. Verbindet man nun den Satz 14 mit dem im gegenwärtigen Paragraphen gegebenen Existenzbeweis, so hat man eine directe Begründung der Theorie der partiellen

Differentialgleichungen erster Ordnung, die jedenfalls im Principe nichts zu wünschen übrig lässt*).

Gegen Cauchy's**) Begründung der Theorie äusserte seinerzeit Bertrand Bedenken, die Bonnet und Serret zu wertvollen Untersuchungen veranlassten. Wir halten es aber nicht für nötig, auf diesen Punkt einzugehen, da es uns durch ein zweckmässiges Verfahren gelungen ist, die Lücke in Cauchy's Betrachtungen von vornherein zu eliminieren.

§ 4. Über die Involutionsbeziehung.

Bez. zw. Sätzen d. Ebene u. d. Raumes.

Im zweiten Paragraphen (auf S. 551) wiesen wir schon darauf hin, dass unsere Abbildung der charakteristischen Streifen einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

auf die Linienelemente einer Ebene uns gestattet, aus jedem Satz über Elementvereine in der Ebene einen Satz über Integralgebilde abzuleiten, da vereinigten Linienelementen der Ebene unendlich benachbarte charakteristische Streifen entsprechen, von denen jedes Element des einen mit den benachbarten des anderen vereinigt ist. Dabei entgehen uns nur die eventuell vorhandenen singulären Integralgebilde.

So ist es uns bekannt, dass, wenn in der Ebene ∞^2 Elementvereine vorliegen, jeder andere Elementverein als Umhüllender von ∞^1 dieser Vereine dargestellt werden kann. (Vgl. § 4 des 2. Kap., S. 48.) Diesem Satze steht ein bekannter Satz über Integralgebilde der partiellen Differentialgleichung $F = 0$ gegenüber. Wir stellen beide Sätze zusammen:

---

*) Wir sehen uns veranlasst, ausdrücklich zu betonen, dass die hier vorgetragene Auffassung und Begründung der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zuerst von Lie, und zwar in seinen Arbeiten in den Verh. d. Ges. d. Wiss. zu Christiania aus den Jahren 1871, 1872 und 1874 entwickelt worden ist. Teilweise wurde diese Theorie sodann von Mansion als Lie'sche Theorie in seine reichhaltige Schrift: *Théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, Mém. couronné par l'Acad. de Belgique, 25. Bd., Paris 1875 (deutsche Übersetzung Berlin 1892) aufgenommen. Ferner bemerken wir, dass diese allgemeine Auffassung die Grundlage für Darboux' Preisschrift (*Mémoire sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, Mém. des savants étrang., 27. Bd., vorgelegt 1876, gedruckt Paris 1880) bildet, die im übrigen nach mehreren Richtungen wertvoll ist. Unter den übrigen sich anschliessenden Untersuchungen erwähnen wir besonders Bäcklund's Arbeiten in schwedischen Schriften und in den Math. Ann., die vom Jahre 1874 ihren Anfang nehmen. Im zweiten Bande werden wir Gelegenheit haben, jedenfalls einige von Bäcklund's Arbeiten zu besprechen.

**) Cauchy, *Note sur l'intégration des équations aux différences partielles du premier ordre à un nombre quelconque de variables.* Société philom. 1819, S. 10.

Liegt in der Ebene eine Schar von ∞^2 Elementvereinen vor, so lässt sich jeder andere Elementverein der Ebene als Umhüllender von ∞^1 dieser ∞^2 Vereine darstellen.

Liegt im Raume (x, y, z) eine Schar von ∞^2 Integralgebilden von je ∞^2 Flächenelementen der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung: Beispiel.

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

vor, so lässt sich jedes andere Integralgebilde der partiellen Differentialgleichung, das aus ∞^2 Elementen besteht (abgesehen von den etwaigen singulären), als Enveloppe von ∞^1 dieser ∞^2 Integralgebilde darstellen.

Wenn ferner ∞^2 Linienelemente $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}')$ in der $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$-Ebene gegeben sind, so sind sie durch eine Gleichung von der Form

$$\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}') = 0$$

zu definieren. Da diese Gleichung als gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung in $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ aufgefasst werden kann, so hat sie ∞^1 Elementvereine als Integralgebilde. Die ∞^2 vorgelegten Linienelemente ordnen sich also in bestimmter Weise in ∞^1 Vereinen an (vgl. § 2 des 2. Kap., S. 41). Dieser einfache Satz hat sein Analogon im Raume. So stehen einander die beiden Sätze gegenüber:

Liegt in der Ebene eine beliebige Schar von ∞^2 Linienelementen vor, so ordnen sie sich stets in bestimmter Weise zu ∞^1 Elementvereinen zusammen.

Satz 15: *Liegt im Raume (x, y, z) eine beliebige Schar von ∞^2 charakteristischen Streifen der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung* Anordng. v. ∞^2 char. Streifen.

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

vor, so ordnen sie sich stets in bestimmter Weise zu ∞^1 Integralgebilden zusammen.

An diesen letzten Satz wollen wir nachher anknüpfen. Zunächst aber führen wir einige neue Bezeichnungen ein: Die Flächenelemente (x, y, z, p, q) der partiellen Differentialgleichung $F = 0$ bilden eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit und liegen auf ∞^3 charakteristischen Streifen. Diese Streifen sind durch das System:

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{F_p p + F_q q} = \frac{dp}{-F_x - F_z p} = \frac{dq}{-F_y - F_z q} \tag{59}$$

in Verbindung mit der Gleichung $F = 0$ definiert.

Ist Ψ irgend ein Integral dieses Systems (59), so ist $f = \Psi$ eine Lösung der folgenden homogenen linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, die wir schon gelegentlich (in § 4 des 11. Kap., S. 508) aufstellten:

$$(60)\quad F_p \frac{\partial f}{\partial x} + F_q \frac{\partial f}{\partial y} + (F_p p + F_q q) \frac{\partial f}{\partial z} - (F_x + F_z p) \frac{\partial f}{\partial p} - \\ - (F_y + F_z q) \frac{\partial f}{\partial q} = 0.$$

Klammer-symbol $[Ff]$. Die linke Seite dieser Gleichung wollen wir durch das *Klammersymbol* $[Ff]$ bezeichnen. Es sei also im Folgenden:

$$(61)\quad [Ff] \equiv F_p(f_x + pf_z) + F_q(f_y + qf_z) - f_p(F_x + pF_z) - f_q(F_y + qF_z)$$

oder auch:

$$(61')\quad [Ff] \equiv (F_p f_x + F_q f_y - F_x f_p - F_y f_q) + p(F_p f_z - F_z f_p) + q(F_q f_z - F_z f_q).$$

Die Integrale $f = \Psi$ des Systems (59) sind also auch durch die homogene lineare partielle Differentialgleichung

$$[Ff] = 0$$

zu definieren. Insbesondere ist

$$[FF] \equiv 0,$$

was die bekannte Thatsache ausspricht, dass F selbst ein Integral des Systems (59) ist. Man sieht ferner sofort, dass stets $[Ff] + [fF] \equiv 0$ ist.

Der Klammerausdruck $[F\Psi]$ zweier Functionen F und Ψ von x, y, z, p, q erscheint als eine naturgemässe Verallgemeinerung des im ersten Abschnitte eingeführten Ausdruckes, den wir ebenso durch die eckigen Klammern markiert haben (siehe § 1 des 3. Kap., S. 69). Die Rechenregeln für diesen Klammerausdruck sind dieselben wie die damals angegebenen. Wir definieren nun analog dem § 2 des 3. Kap., S. 74, so:

Invol. *Zwei* ***Functionen*** *F und Ψ von x, y, z, p, q liegen in* ***Involution,*** *wenn ihr Klammerausdruck identisch verschwindet:*

$$[F\Psi] \equiv 0.$$

Dieser Definition stellen wir eine zweite an die Seite:

Zwei partielle Differentialgleichungen erster Ordnung

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \quad \Psi(x, y, z, p, q) = 0$$

liegen in Involution, wenn der Poisson'sche Klammerausdruck $[F\Psi]$ infolge von $F = 0$ und $\Psi = 0$ verschwindet).*

*) Da wir die Klammerausdrücke auf S. 69 mit den beiden Namen Lagrange und Poisson in Verbindung gebracht haben, wollen wir hier nachträglich hervorheben, dass Poisson früher als Lagrange solche Ausdrücke bez. Symbole eingeführt hat. Besonders durch Jacobi's Arbeiten ist die Wichtigkeit dieser Ausdrücke in die richtige Beleuchtung gestellt worden. Immerhin ist zu beachten, dass der *allgemeine* Involutionsbegriff bei Jacobi noch nicht vorkommt, indem er bei der Betrachtung von Functionen F, Ψ, die in der Beziehung $[F\Psi] \equiv 0$ stehen, die lästige Bedingung hinzufügt, dass F und Ψ hinsichtlich p und q von einander unabhängig sein sollen.

Nehmen wir nun an, ausser der vorgelegten partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

sei uns eine zweite Gleichung

$$\Psi(x, y, z, p, q) = 0$$

bekannt, *die mit ihr in Involution liegt.* Dann ist $[F\Psi]$ nach Definition gleich Null infolge von $F = 0$ und $\Psi = 0$. Da die Differentialgleichung $[Ff] = 0$ für f dem System (59) äquivalent ist, von dem F ein Integral ist, so ist $F = 0$, $\Psi = 0$ im Raume mit den fünf Coordinaten x, y, z, p, q eine Mannigfaltigkeit, die von Integralcurven des Systems (59) erzeugt wird (vgl. § 1 des 11. Kap., S. 490). In dem gewöhnlichen Raume (x, y, z) definieren die beiden Gleichungen Invol. v. zwei part. Diffgln.

(62) $$F = 0, \quad \Psi = 0$$

folglich eine solche Schar von ∞^3 Flächenelementen der Gleichung $F = 0$, die von charakteristischen Streifen, also von ∞^2 charakteristischen Streifen der Gleichung $F = 0$ erzeugt wird. Daher ordnen sich diese ∞^3 Elemente nach dem Satze 15 als ∞^1 Integralgebilde der Gleichung $F = 0$ an.

Wenn nun die beiden Gleichungen (62) z. B. nach p, q auflösbar sind:

$$p = P(x, y, z), \quad q = Q(x, y, z),$$

so müssen die fraglichen ∞^1 Integralgebilde Flächen sein. Andererseits bilden ∞^2 Elemente (x, y, z, p, q) nur dann einen Elementverein, wenn für ihre Schar

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

ist. Mithin ergeben sich alle Vereine von ∞^2 Elementen, die der Schar der ∞^3 Elemente $F = 0$, $\Psi = 0$ angehören, durch Integration der totalen Differentialgleichung oder Pfaff'schen Gleichung:

$$dz - P(x, y, z)\,dx - Q(x, y, z)\,dy = 0.$$

Sie muss integrabel sein (vgl. § 2 des 6. Kap., S. 194), da es ja ∞^1 Vereine von je ∞^2 Elementen giebt, in die sich die ∞^3 Elemente anordnen lassen. Sie lässt sich also auf die Form:

$$d\varphi(x, y, z) = 0$$

bringen und hat dabei die ∞^1 Integralflächen $\varphi =$ Const. und sonst keine. Diese Flächen $\varphi =$ Const. sind also die ∞^1 erwähnten Integralgebilde von $F = 0$. Sind die Integralgebilde Curven, d. h. sind die Gleichungen (62) nicht nach p, q auflösbar, so ergeben sich die Integralgebilde durch Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster

Ordnung in zwei Veränderlichen, wie man leicht erkennt. Sind sie Punkte, so ist ihre Bestimmung ohne Weiteres geleistet.

Bemerken wir aber jetzt, dass die Involutionsbeziehung $[F\Psi]=0$ der beiden Gleichungen (62) völlig symmetrisch in F und Ψ ist, da $[F\Psi]$ nur sein Vorzeichen ändert, wenn F mit Ψ vertauscht wird, so erhellt unmittelbar, dass sich die ∞^3 durch (62) definierten Elemente auch in ∞^1 Integralgebilde der Gleichung $\Psi=0$, die ja auch eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung ist, müssen anordnen lassen. Wir sahen soeben, dass sich die ∞^3 Elemente nur auf eine Art als ∞^1 Vereine anordnen. Also folgt, *dass die beiden partiellen*
Gemeins. ∞^1 Integral-gebilde. *Differentialgleichungen* (62) *mit einander ∞^1 Integralgebilde von je ∞^2 Elementen gemein haben.*

Wenn umgekehrt irgend zwei solche partielle Differentialgleichungen erster Ordnung $F=0$ und $\Psi=0$ vorliegen, die ∞^1 Integralgebilde von je ∞^2 Elementen gemein haben, so wird sich die Schar der durch

$$F=0, \quad \Psi=0$$

definierten ∞^3 Elemente in ∞^2 charakteristische Streifen der Gleichung $F=0$ zerlegen lassen, da jedes Integralgebilde von ∞^2 Elementen aus ∞^1 charakteristischen Streifen besteht (vgl. Satz 2, § 2, S. 539). Also ist dann $F=0$, $\Psi=0$ eine Mannigfaltigkeit, die dem System (59) genügt, d. h. es ist $[F\Psi]=0$ infolge von $F=0$ und $\Psi=0$. Somit ist bewiesen:

Satz 16: *Zwei partielle Differentialgleichungen erster Ordnung*

$$F(x,y,z,p,q)=0, \qquad \Psi(x,y,z,p,q)=0$$

im Raume (x, y, z) *haben dann und nur dann ∞^1 Integralgebilde von je ∞^2 Elementen gemein, wenn sie in Involution liegen, d. h. wenn* $[F\Psi]$ *infolge von* $F=0$ *und* $\Psi=0$ *verschwindet.*

Es liege nunmehr wiederum die partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$F(x,y,z,p,q)=0$$

vor, und es sei angenommen, dass uns ein *Integral* $\Psi(x,y,z,p,q)$
Invol. v. $F=0$ u. $\Psi=$ Const. des Systems (59) bekannt sei. Dasselbe sei aber nicht nur eine Function des Integrales F von (59). Die beiden Gleichungen

$$F=0, \quad \Psi=a$$

bestimmen nun für jeden Wert der Constanten a eine Schar von ∞^2 charakteristischen Streifen der partiellen Differentialgleichung $F=0$. Nach Satz 15 ordnen sie sich als ∞^1 Integralgebilde der Gleichung $F=0$ an. Da dies für jeden Wert der Constanten a gilt, so erhalten wir insgesamt ∞^2 Integralgebilde von $F = 0$. Sie enthalten *alle* ∞^4 Elemente der Gleichung $F = 0$ und stellen daher eine *vollständige Lösung von* $F = 0$ dar. Wie wir die ∞^2 Integralgebilde zu bestimmen haben, geht aus dem Obigen hervor. Hier ist eben nur die Gleichung $\Psi = a$ an die Stelle von $\Psi = 0$ getreten. Man erkennt, dass die Bestimmung auf die Integration einer integrabeln Pfaff'schen Gleichung in x, y, z zurückkommt, die noch eine willkürliche Constante a enthält.

Daher gilt der

Satz 17: *Liegt eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung*

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

im Raume (x, y, z) *vor und kennt man ein von* F *unabhängiges Integral* Ψ *des Systems*

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{F_p p + F_q q} = \frac{dp}{-F_x - F_z p} = \frac{dq}{-F_y - F_z q},$$

so findet man durch Integration einer integrabeln Pfaff'schen Gleichung in x, y, z *eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung* $F = 0$. *Die Gleichungen*

$$F = 0, \quad \Psi = a$$

bestimmen nämlich für jeden Wert der Constanten a *solche* ∞^3 *Elemente, die* ∞^2 *charakteristischen Streifen von* $F = 0$ *angehören, und diese Streifen ordnen sich in bestimmter Weise zu* ∞^1 *Integralgebilden von je* ∞^2 *Elementen an.*

Wir wollen jetzt nicht nur die eine partielle Differentialgleichung $F = 0$, sondern *die* ∞^1 *partiellen Differentialgleichungen* erster Ordnung

$$F(x, y, z, p, q) = \text{Const.}$$

ins Auge fassen, von denen jede ∞^3 charakteristische Streifen hat. Da das System (59) sich nicht ändert, wenn statt F die Function $F -$ Const. gesetzt wird, so folgt, dass alle diese ∞^4 charakteristischen Streifen eben diejenigen sind, die von diesem System von vier simultanen gewöhnlichen Differentialgleichungen (59) definiert werden. Ein Integral dieses Systems ist F selbst. Ist Ψ irgend ein Integral des Systems (59), so ist es eine Lösung f der homogenen linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung $[Ff] = 0$.

Es sei nun Ψ ein von F unabhängiges Integral des Systems (59). Alsdann liegen die beiden Gleichungen Invol. v. $F =$ Const. u. $\Psi =$ Const.

$$F = a, \quad \Psi = b$$

für jedes Wertsystem der Constanten a, b in Involution, und sie haben daher stets nach Satz 16 mit einander ∞^1 Integralgebilde von je ∞^2 Elementen gemein.

Wenn umgekehrt zwei Functionen F und Ψ von x, y, z, p, q die Eigenschaft haben, dass die beiden Gleichungen

$$F = a, \quad \Psi = b \tag{63}$$

für jedes Wertsystem der Constanten a, b mit einander ∞^1 Integralgebilde von je ∞^2 Elementen gemein haben, so enthält jedes dieser Integralgebilde insbesondere ∞^1 charakteristische Streifen von $F = a$. Die beiden Gleichungen (63) definieren daher für jedes Wertepaar der Constanten a, b stets ∞^2 charakteristische Streifen von $F = a$, d. h. Ψ muss ein *Integral* von (59) sein, sodass

$$[F\Psi] \equiv 0$$

ist. Es hat sich also ergeben:

Satz 18: *Dann und nur dann, wenn die beiden Functionen F und Ψ von x, y, z, p, q in Involution liegen, also*

$$[F\Psi] \equiv 0$$

ist, haben die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$F = a, \quad \Psi = b$$

im Raume (x, y, z) die Eigenschaft, dass sie für jedes Wertsystem der Constanten a, b mit einander ∞^1 Integralgebilde von je ∞^2 Elementen gemein haben.

Bestimmg. d. gemeins. Integralgebilde. Sind wieder F, Ψ zwei von einander unabhängige Functionen von x, y, z, p, q, die in Involution liegen:

$$[F\Psi] \equiv 0,$$

so finden wir die ∞^1 gemeinsamen Integralgebilde der beiden partiellen Differentialgleichungen

$$F = a, \quad \Psi = b \tag{63}$$

in der auf S. 567 angegebenen Weise: Nehmen wir nämlich an, dass die Gleichungen (63) nach p und q auflösbar seien, indem wir bemerken, dass sich anderenfalls die gemeinsamen Integralcurven bez. Punkte ebenfalls leicht bestimmen lassen, womit wir uns hier nicht aufhalten wollen, so werden die Auflösungen die Form haben:

$$p = P(x, y, z, a, b), \quad q = Q(x, y, z, a, b). \tag{63'}$$

Die Pfaff'sche Gleichung

$$dz - P\,dx - Q\,dy = 0$$

ist dann integrabel und liefert die ∞^1 gemeinsamen Integralflächen, etwa:

$$\omega(x, y, z, a, b) = c,$$

wobei c die Integrationsconstante bedeutet.

Nun liegen die drei Gleichungen vor:

$$F = a, \quad \Psi = b, \quad \omega(x, y, z, a, b) = c. \tag{64}$$

Sie enthalten drei willkürliche Constanten a, b, c. Eliminieren wir b und c, so geht wieder $F = a$ hervor, eliminieren wir a und c, so geht wieder $\Psi = b$ hervor. Eliminieren wir aber a und b, so kommt:

$$\omega(x, y, z, F, \Psi) = c$$

oder also eine Gleichung von der Form:

$$\Omega(x, y, z, p, q) = c.$$

Die drei partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$F = a, \quad \Psi = b, \quad \Omega = c \tag{65}$$

haben nun für jedes Wertsystem der Constanten a, b, c die Eigenschaft, dass je zwei mit einander ∞^1 Integralgebilde von je ∞^2 Elementen gemein haben. Denn dass dies z. B. für $F = a$ und $\Omega = c$ der Fall ist, folgt daraus, dass *jede* Gleichung $F = a$ mit *jeder* der ∞^1 Gleichungen $\Psi = b$ solche ∞^1 Integralgebilde gemein hat, nämlich die durch

$$\omega(x, y, z, a, b) = c \tag{66}$$

bei willkürlichem c dargestellten. Da nun die Elemente dieser gemeinsamen Integralgebilde die Gleichungen $F = a$, $\Psi = b$ erfüllen, so erfüllen alle die Integralgebilde, die bei festem c durch (65) dargestellt werden, auch die Gleichung $\omega(x, y, z, F, \Psi) = c$ oder $\Omega = c$. Die Flächen (65) sind daher Integralgebilde von $\Omega = c$ für jeden bestimmten Wert der Constanten c. Nach Satz 18 ist mithin auch:

$$[F\Omega] \equiv 0, \quad [\Psi\Omega] \equiv 0.$$

Ist ferner Φ irgend eine von F und Ψ unabhängige Function, die mit F und Ψ in Involution liegt:

$$[F\Phi] \equiv 0, \quad [\Psi\Phi] \equiv 0,$$

so werden wir sogleich zeigen, dass Φ eine Function von F, Ψ und Ω allein ist, dass also die drei folgenden Gleichungen, in denen auch γ eine Constante bedeutet:

$$F = a, \quad \Psi = b, \quad \Phi = \gamma$$

mit den drei obigen Gleichungen (65) äquivalent sind, sodass sie durch Elimination von p und q für jede Gleichung $F = a$ eine vollständige Lösung

$$\varphi(x, y, z, a, b) = \gamma$$

mit den beiden willkürlichen Constanten b, γ ergeben, die nur eine andere Form der früheren: $\omega = c$ ist.

Nachweis d. Umkehrg.

Wir haben also noch zu zeigen, dass, wenn F, Ω und Ψ drei von einander unabhängige Functionen sind, die paarweis in Involution liegen:

$$[F\Psi] \equiv 0, \quad [F\Omega] \equiv 0, \quad [\Psi\Omega] \equiv 0$$

alsdann jede Function Φ, die mit F und Ψ in Involution liegt:

$$[F\Phi] \equiv 0, \quad [\Psi\Phi] \equiv 0,$$

eine Function von F, Ψ und Ω allein ist.

Zu diesem Zweck zeigen wir zuerst, dass die beiden Gleichungen

$$(67) \qquad [Ff] = 0, \quad [\Psi f] = 0,$$

denen $f = \Phi$ genügt, von einander unabhängig sind. Wären sie nämlich von einander *abhängig*, so beständen wegen ihrer Form (vgl. S. 566) Relationen von dieser Art:

$$\Psi_p \equiv \varrho F_p, \qquad \Psi_q \equiv \varrho F_q,$$
$$\Psi_x + p\Psi_z \equiv \varrho(F_x + pF_z), \qquad \Psi_y + q\Psi_z \equiv \varrho(F_y + qF_z),$$

die sich auch in die eine

$$(68) \qquad d\Psi - \varrho\, dF \equiv (\Psi_z - \varrho F_z)(dz - p\,dx - q\,dy)$$

zusammenfassen lassen. Nun definieren die beiden Gleichungen

$$F = a, \quad \Psi = b$$

zusammen ∞^3 Elemente, für die $dF = 0$ und $d\Psi = 0$ ist. Sobald also $\Psi_z - \varrho F_z \not\equiv 0$ ist, so müsste für diese ∞^3 Elemente nach (68):

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

sein, d. h. sie müssten nach § 1, S. 523, einen Verein bilden. Wir sahen aber dort (Theorem 21, S. 528), dass es keine Vereine von ∞^3 Elementen giebt. Also wäre

$$\Psi_z - \varrho F_z \equiv 0$$

zu setzen, sodass (68) ergäbe:

$$d\Psi - \varrho\, dF \equiv 0.$$

Eine solche Relation kann aber nur dann bestehen, wenn Ψ eine Function von F allein ist, und dies widerspricht der Voraussetzung.

Die *beiden* Gleichungen in *fünf* unabhängigen Veränderlichen x, y, z, p, q

$$(67) \qquad [Ff] = 0, \quad [\Psi f] = 0$$

sind mithin unabhängig von einander und haben deshalb höchstens *drei* von einander unabhängige Lösungen. Solche sind F, Ψ und nach Voraussetzung auch Ω, da Ω mit F und Ψ in Involution liegt. Also ist jede gemeinsame Lösung Φ von (67) eine Function von F, Ψ und Ω allein, was zu beweisen war.

Hiermit ist gezeigt:

Satz 19: *Das Problem, die ∞^1 partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung* Neue Form des Integr.-probl. v. $F = \text{Const.}$

$$F(x, y, z, p, q) = a \qquad (a = \text{Const.})$$

zu integrieren, ist gelöst, sobald man zwei von F und von einander unabhängige Functionen Φ und Ψ von x, y, z, p, q kennt, die mit F und mit einander in Involution liegen:

$$[F\Phi] \equiv 0, \quad [F\Psi] \equiv 0, \quad [\Phi\Psi] \equiv 0,$$

denn dann stellen die drei Gleichungen:

$$F = a, \quad \Phi = b, \quad \Psi = c$$

eine vollständige Lösung der Gleichung $F = a$ mit den Parametern b, c dar.

An diese allgemeinen Betrachtungen schliessen wir nun einige von *speciellerer* Natur.

Liegt die partielle Differentialgleichung erster Ordnung $F = 0$ in Invol. mit $\Psi(x, y, z) = \text{Const.}$

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

vor, so wollen wir uns fragen, ob oder wann es eine Gleichung

$$\Psi(x, y, z) = a$$

giebt, die frei von p und q ist und für jeden Wert der Constanten a mit der Gleichung $F = 0$ in Involution liegt. Nach (61), S. 566, ist zu fordern, dass die Gleichung

$$F_p(\Psi_x + p\Psi_z) + F_q(\Psi_y + q\Psi_z) = 0 \tag{69}$$

eine Folge von $F = 0$ sei. Diese Gleichung ist eine lineare homogene partielle Differentialgleichung für F, die der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{dp}{\Psi_x + p\Psi_z} = \frac{dq}{\Psi_y + q\Psi_z} \tag{70}$$

äquivalent ist, in der Ψ_x, Ψ_y, Ψ_z frei von p und q sind. Letztere Gleichung hat nun die Integrale x, y, z und

$$\frac{\Psi_y + q\Psi_z}{\Psi_x + p\Psi_z}.$$

Also ergiebt sich, dass sich die Gleichung $F=0$ auf die Form

$$\frac{\Psi_y + q\Psi_z}{\Psi_x + p\Psi_z} - \Omega(x, y, z) = 0$$

Lin. part. Diffgl. bringen lassen oder von p und q frei sein muss. *Die Gleichung $F=0$ kann also jedenfalls nur linear in p und q sein.*

Dies liess sich auch von vornherein erwarten, denn soll $F=0$ mit $\Psi(x, y, z) = a$ für jeden Wert der Constanten a in Involution liegen, so müssen die beiden Gleichungen, aufgefasst als Differentialgleichungen, nach Satz 16 für jeden Wert der Constanten ∞^1 Integralgebilde von je ∞^2 Elementen gemein haben. Nun aber sind diese ∞^1 Integralgebilde bei $\Psi = a$ sicher ∞^1 Curven oder Punkte. (Vgl. § 1, S. 531.) Also müsste $F=0$ sicher ∞^2 Curven (oder Punkte) zu Integralgebilden haben, d. h. eine lineare partielle Differentialgleichung sein (siehe S. 532). Umgekehrt: Ist $F=0$ eine lineare partielle Differentialgleichung, so hat sie sicher ∞^2 Integralcurven. Ordnen wir diese Curven in ∞^1 Flächen

$$\Psi(x, y, z) = a$$

an, so hat jede partielle Differentialgleichung $\Psi = a$ mit $F=0$ gerade ∞^1 Integralcurven gemein, d. h. nach Satz 16 liegt $F=0$ mit jeder der ∞^1 Gleichungen $\Psi = a$ in Involution.

Hieraus erhellt ferner: Ist

$$X(x, y, z)p + Y(x, y, z)q - Z(x, y, z) = 0 \tag{71}$$

eine vorgelegte lineare partielle Differentialgleichung $F=0$ und liegt sie mit jeder der ∞^1 *Gleichungen*

$$\Psi(x, y, z) = a$$

in Involution, so ist jede *Fläche* $\Psi = a$ von ∞^1 Integralcurven des Systems

$$\frac{dx}{X(x, y, z)} = \frac{dy}{Y(x, y, z)} = \frac{dz}{Z(x, y, z)} \tag{72}$$

erzeugt, d. h. Ψ ist ein beliebiges Integral dieses Systems. Für jedes Integral Ψ dieses Systems ist demnach

$$[Xp + Yq - Z,\ \Psi] = 0 \tag{73}$$

infolge von $Xp + Yq - Z = 0$. Dies kann sofort auch analytisch verificiert werden: Nach (61) lautet die Gleichung (73), da Ψ nur x, y, z enthält, so:

$$X(\Psi_x + p\Psi_z) + Y(\Psi_y + q\Psi_z) = 0$$

und lässt sich infolge von (71) so schreiben:

$$X\Psi_x + Y\Psi_y + Z\Psi_z =$$

Ist Ψ ein Integral des Systems (72), so hat die lineare partielle Differentialgleichung (71) in jeder der ∞^1 Flächen $\Psi = a$ je ∞^1 Integralcurven. Jede dieser Integralcurven stellt ∞^1 charakteristische Streifen der Gleichung (71) dar (vgl. § 2, S. 542). Damit sind also die ∞^3 charakteristischen Streifen der Gleichung (71) so angeordnet, dass je ∞^1 längs einer Curve liegen und in ∞^1 Flächen je ∞^1 dieser Curven verlaufen.

Ein besonderes Interesse haben schliesslich diejenigen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, deren charakteristische Streifen sämtlich längs solcher Charakteristiken liegen, die in parallelen Ebenen

$$z = \text{Const.}$$

verlaufen. Es sind dies nach dem Vorhergehenden diejenigen linearen partiellen Differentialgleichungen (71), deren zugehöriges System (72) das Integral $\Psi \equiv z$ besitzt, d. h. für die $Z \equiv 0$ ist. Hiermit kommen wir zu den in p, q *homogenen linearen partiellen Differentialgleichungen:* Homog. lin. part. Diffgl.

$$X(x, y, z)p + Y(x, y, z)q = 0.$$

Für diese reduciert sich das ganze Integrationsproblem darauf, die in den Ebenen $z = \text{Const.}$ gelegenen Charakteristiken zu bestimmen, d. h. die gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung in x, y:

$$\frac{dx}{X(x, y, z)} = \frac{dy}{Y(x, y, z)},$$

die z nur noch als einen Parameter enthält, zu integrieren.

Sind insbesondere X und Y frei von z oder ist auch nur das Verhältnis von X zu Y frei von z, so sind die ∞^1 Charakteristiken in jeder Ebene $z = \text{Const.}$ in derselben Weise gelegen, d. h. genauer ausgedrückt: Dann sind die in der Ebene $z = 0$ gelegenen ∞^1 Charakteristiken die Projectionen der in einer beliebigen Ebene $z = \text{Const.}$ gelegenen Charakteristiken. Die Charakteristiken liegen also auf ∞^1 Cylindern, deren Erzeugende der z-Axe parallel sind. Jetzt liegt die partielle Differentialgleichung vor:

$$X(x, y)p + Y(x, y)q = 0.$$ Hom. lin. part. Diffgl. frei v. z.

Da die Gleichung frei von z ist, so folgt, dass die ∞^3 Flächenelemente der Gleichung, deren Punkte in einer beliebigen Ebene $z = \text{Const.}$ liegen, genau so verteilt sind, wie die ∞^3, deren Punkte in der bestimmten Ebene $z = 0$ liegen. Betrachten wir diese ∞^3 Elemente, deren Punkte $(x, y, 0)$ in der Ebene $z = 0$ gelegen sind. Diejenigen ∞^1 unter ihnen, die einen Punkt $(x, y, 0)$ gemein haben, bilden ein Büschel von Elementen. Die Axe des Büschels ist ein *Linien*element in der Ebene $z = 0$, und zwar ist (x, y) der Punkt dieses Linienelementes, während die Grösse $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X} = -\frac{p}{q}$ die Richtung der Geraden des Elementes angiebt. *Wir können daher die drei Grössen x, y und $-\frac{p}{q}$ als die Coordinaten x, y und y' eines Linienelementes in der Ebene auffassen*, anders ausgedrückt: Wir können statt der früheren drei Coordinaten x, y, y' der Linienelemente in der Ebene nunmehr *vier*

Homogen. Coord. d. Linienelem. d. Ebene.

Coordinaten x, y, p, q einführen, von denen die beiden letzten *homogene Coordinaten* sind. Die Benutzung solcher homogener Coordinaten für die Linienelemente in der Ebene hat eine grosse formelle Bedeutung, die wir aber erst im zweiten Bande ausführlich darlegen können. (Vgl. die Fussnote zu S. 116.)

Räumliche Deutg. einer gew. Diffgl. 1. O. in x, y.

Wir können das Letztere so zusammenfassen: *Das Problem, eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung in der Ebene:*

$$X(x, y)\, y' - Y(x, y) = 0$$

zu integrieren, ist äquivalent mit dem Problem, die gemeinsamen Integralgebilde der beiden in Involution liegenden partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung im Raume:

$$X(x, y)\, p + Y(x, y)\, q = 0, \qquad z = 0$$

zu bestimmen.

§ 5. Zur Transformationstheorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Pkttrf. i. Raum.

Eine Punkttransformation

(74) $$x_1 = X(x, y, z), \quad y_1 = Y(x, y, z), \quad z_1 = Z(x, y, z)$$

führt jede Fläche in eine Fläche und insbesondere alle Flächen, die in einem Punkte eine gemeinsame Tangentenebene haben, in ebensolche Flächen über. Der gemeinsame Punkt und die gemeinsame Tangentenebene durch den Punkt stellen zusammen ein *Flächenelement* dar. *Jedes Flächenelement geht daher bei der vorgelegten Punkttransformation wieder in ein Flächenelement über.*

Trf. d. Flächenelemente.

Um das neue Element analytisch zu bestimmen, gehen wir davon aus, dass die Fläche

(75) $$z = \varphi(x, y)$$

im Punkte (x, y, z) ein Flächenelement (x, y, z, p, q) hat, für das

(76) $$dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

ist. Die Gleichung (75) bestimmt z als Function von x und y, sodass die Gleichung (76) alsdann p und q als Functionen von x und y liefert.

Wir erhalten also z, p, q als Functionen von x, y. Es möge nun die Fläche (75) vermöge der Punkttransformation (74) in die Fläche

$$z_1 = \varphi_1(x_1, y_1) \tag{77}$$

übergehen. Dann sind x_1, y_1, z_1 nach (74) Functionen von x, y und z oder also nach (75) Functionen von x und y allein. Ferner bestimmt sich das transformierte Flächenelement $(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1)$ aus (77) und

$$dz_1 - p_1\,dx_1 - q_1\,dy_1 = 0, \tag{78}$$

sodass sich p_1, q_1 als Functionen von x_1, y_1 ergeben, die wir aber infolge von (74) und (75) als Functionen von x, y auffassen können.

Die Gleichung (78) können wir infolge von (74), da z als Function von x und y aufzufassen ist, so schreiben:

$$\begin{aligned}&\{Z_x + pZ_z - (X_x + pX_z)p_1 - (Y_x + pY_z)q_1\}\,dx + \\ &+ \{Z_y + qZ_z - (X_y + qX_z)p_1 - (Y_y + qY_z)q_1\}\,dy = 0.\end{aligned}$$

Da dx, dy von einander unabhängige Differentiale sind, so kommt einzeln:

$$\left\{\begin{aligned}&Z_x + pZ_z - (X_x + pX_z)p_1 - (Y_x + pY_z)q_1 = 0,\\ &Z_y + qZ_z - (X_y + qX_z)p_1 - (Y_y + qY_z)q_1 = 0.\end{aligned}\right. \tag{79}$$

Hieraus lassen sich p_1 und q_1 als Functionen von x, y, z, p, q berechnen.

Es kommt:

$$\left\{\begin{aligned}p_1 &= \frac{(Z_xY_y - Y_xZ_y) + (Z_zY_y - Y_zZ_y)p + (Z_xY_z - Y_xZ_z)q}{(X_xY_y - Y_xX_y) + (X_zY_y - Y_zX_y)p + (X_xY_z - Y_xX_z)q},\\ q_1 &= \frac{-(Z_xX_y - X_xZ_y) - (Z_zX_y - X_zZ_y)p - (Z_xX_z - X_xZ_z)q}{(X_xY_y - Y_xX_y) + (X_zY_y - Y_zX_y)p + (X_xY_z - Y_xX_z)q}.\end{aligned}\right. \tag{80}$$

Da diese Formeln sich ergeben, wie man auch die Fläche $z = \varphi(x, y)$ wählen mag, so folgt also, dass die *fünf* Gleichungen (74) und (80) angeben, in welches Flächenelement $(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1)$ ein *beliebiges* gegebenes Flächenelement (x, y, z, p, q) bei der vorgelegten Punkttransformation (74) übergeht. Wir nennen daher die fünf Gleichungen (74), (80), die auch umgekehrt nach x, y, z, p, q auflösbar sind, die *Erweiterung der Punkttransformation* (74). **Erweiterg. e. Pkttrf.**

Eine andere Art der Erweiterung haben wir in der Geometrie der Linienelemente, in § 5 des 10. Kap., S. 479, kennen gelernt. Hier verstehen wir unter der Erweiterung immer die soeben besprochene.

Bei der Erweiterung unserer Punkttransformation wird jedes Flächenelement (x, y, z, p, q) in ein neues $(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1)$ übergeführt. Insbesondere gehen dabei alle Flächenelemente einer Fläche $z = \varphi(x, y)$ in die Elemente der neuen Fläche $z_1 = \varphi(x_1, y_1)$ über. *Zwei Flächen-*

Andere Ableitg. der Erweiterg.

elemente, die vereinigt liegen, gehen daher in ebenfalls vereinigte Flächenelemente über. Die Gleichungen (80) kann man nun in eleganter Weise dadurch ableiten, dass man verlangt, dass p_1, q_1 solche Functionen von x, y, z, p, q sein sollen, dass die Bedingung der vereinigten Lage bei der Transformation invariant bleibt, d. h. dass eine Gleichung von der Form

$$(81) \qquad dz_1 - p_1\,dx_1 - q_1\,dy_1 = \varrho\,(dz - p\,dx - q\,dy)$$

besteht. (Vgl. § 1 S. 522.) Dabei bedeutet ϱ eine vorerst noch unbekannte Function von x, y, z. Nach (74) giebt die Forderung:

$$dZ - p_1\,dX - q_1\,dY = \varrho\,(dz - p\,dx - q\,dy).$$

Diese Gleichung, die linear und homogen in dx, dy, dz ist, zerfällt in die drei einzelnen:

$$\begin{aligned} Z_x - p_1 X_x - q_1 Y_x &= -\varrho p, \\ Z_y - p_1 X_y - q_1 Y_y &= -\varrho q, \\ Z_z - p_1 X_z - q_1 Y_z &= \quad \varrho. \end{aligned}$$

Setzt man den Wert von ϱ aus der letzten in die beiden ersten Gleichungen ein, so kommt man wieder zu den beiden Gleichungen (79), aus denen wir p_1, q_1 in der Form (80) berechneten.

Part. Dffgl. bei Pkttrf.

Liegt nun eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung vor:

$$(82) \qquad F(x, y, z, p, q) = 0,$$

so definiert sie ∞^4 Flächenelemente (x, y, z, p, q). Die Punkttransformation (82) führt, wie ihre Erweiterung lehrt, diese ∞^4 Flächenelemente in neue Flächenelemente $(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1)$ über. Wir erhalten ihren analytischen Ausdruck, indem wir aus den sechs Gleichungen (74), (80), (82) die Grössen x, y, z, p, q eliminieren. Da die ersten fünf Gleichungen (74), (80) nach x, y, z, p, q auflösbar sind, so liefert die Substitution dieser Auflösungen in (82) die gesuchte Gleichung:

$$(83) \qquad F_1(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1) = 0,$$

der die neuen ∞^4 Flächenelemente $(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1)$ genügen. Die vorgelegte Punkttransformation (74) verwandelt also jede partielle Differentialgleichung erster Ordnung (82) wieder in eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung (83). Hierbei ist, wie im Folgenden, vorausgesetzt, dass die Gleichungen (74), (80) nicht allein für allgemeine Wertsysteme (x, y, z, p, q), sondern insbesondere auch für die ∞^4 Elemente der Gleichung $F = 0$ auflösbar seien.

Wie wir sahen, gehen zwei vereinigte Flächenelemente bei der Erweiterung der Punkttransformation wieder in zwei vereinigte Elemente über. Hieraus folgt, *dass die Transformation* (74), (80) *jedes Integralgebilde der partiellen Differentialgleichung* (82) *in ein Integralgebilde der neuen partiellen Differentialgleichung* (83) *verwandelt.* Insbesondere geht jedes Integralgebilde der Gleichung (82), das aus nur ∞^1 Elementen besteht, in ein ebensolches Integralgebilde der Gleichung (83) über. Unter diesen Integralgebilden nehmen die charakteristischen Streifen eine besondere Stellung ein: sie sind die einzigen, die zugleich unendlich vielen Integralgebilden von ∞^2 Elementen angehören. Daraus folgt, *dass die ∞^3 charakteristischen Streifen der Gleichung* (82) *vermöge der Transformation* (74), (80) *in die ∞^3 charakteristischen Streifen der Gleichung* (83) *übergehen.*

Es hat sich folglich ergeben:

Satz 20: *Wird auf eine beliebige partielle Differentialgleichung erster Ordnung*

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

im Raume (x, y, z) eine vorgelegte Punkttransformation ausgeübt, so geht sie wieder in eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$F_1(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1) = 0$$

über. Dabei gehen die Flächenelemente (x, y, z, p, q) der Gleichung $F = 0$ vermöge der Erweiterung der Punkttransformation in die Flächenelemente $(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1)$ der Gleichung $F_1 = 0$ über. Ferner gehen dabei die Integralgebilde der Gleichung $F = 0$ in die der Gleichung $F_1 = 0$ und insbesondere die ∞^3 charakteristischen Streifen der Gleichung $F = 0$ in die ∞^3 charakteristischen Streifen der Gleichung $F_1 = 0$ über.

Betrachten wir insbesondere eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung — Lin. p. Diffgl. bei Pkttrf.

$$\alpha(x, y, z,)p + \beta(x, y, z)q - \gamma(x, y, z) = 0.$$

Diese partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung lassen sich durch die Eigenschaft charakterisieren, dass je ∞^1 charakteristische Streifen einer solchen Gleichung längs einer Curve liegen, sodass sich alle ∞^3 charakteristische Streifen längs ∞^2 Curven anordnen (vgl. § 2, S. 542). Bei Ausführung der Punkttransformation (74) gehen diese ∞^2 Curven wieder in ∞^2 Curven über. Die durch die Transformation hervorgehende neue partielle Differentialgleichung erster Ordnung hat daher ebenfalls die Eigenschaft, dass ihre ∞^3 charakteristischen Streifen längs ∞^2 Curven liegen, und ist daher ebenfalls linear. Analytisch geht dies aus den Formeln (80) sofort hervor.

Part. Diffgl. frei v. p, q bei Pkttrf.

Ist die partielle Differentialgleichung frei von p und q:

$$F(x, y, z) = 0,$$

so erhellt unmittelbar, dass sie durch Ausführung einer Punkttransformation (74) wieder in eine von p_1, q_1 freie partielle Differentialgleichung

$$F_1(x_1, y_1, z_1) = 0$$

übergeht.

Daher können wir den Satz aussprechen:

Satz 21: *Bei Ausführung einer Punkttransformation des Raumes (x, y, z) geht jede lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung*

$$\alpha p + \beta q - \gamma = 0$$

wieder in eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\alpha_1 p_1 + \beta_1 q_1 - \gamma_1 = 0$$

und jede von p, q freie partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$F(x, y, z) = 0$$

wieder in eine von p_1, q_1 freie partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$F(x_1, y_1, z_1) = 0$$

über.

Sind ferner

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \quad \Psi(x, y, z, p, q) = 0$$

zwei solche partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, die in Involution liegen (vgl. § 4, S. 566), so haben sie nach Satz 16, S. 568, ∞^1 gemeinsame Integralgebilde von je ∞^2 Elementen. Wenn sie vermöge der Transformation (74), (80) in die beiden Gleichungen

$$F_1(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1) = 0, \quad \Psi_1(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1) = 0$$

übergehen, so verwandeln sich diese ∞^1 gemeinsamen Integralgebilde in solche der Gleichungen $F_1 = 0$, $\Psi_1 = 0$. Nach dem soeben erwähnten Satz 16 liegen daher auch die Gleichungen $F_1 = 0$, $\Psi_1 = 0$ in Involution. *Die Involutionsbeziehung zweier partieller Differentialgleichungen erster Ordnung ist daher invariant gegenüber der Ausführung einer Punkttransformation im Raume (x, y, z).*

Invol. v. Gln. bei Pkttrf. invar.

Liegen zwei *Functionen* F und Ψ in Involution und gehen sie vermöge der Transformation (74), (80) in die Functionen F_1, Ψ_1 über, so liegt jedes Gleichungenpaar:

$$F = \text{Const.}, \quad \Psi = \text{Const.}$$

in Involution und daher auch jedes Gleichungenpaar

$$F_1 = \text{Const.}, \quad \Psi_1 = \text{Const.},$$

Invol. v. Fctn. bei Pktrf. invar.

d. h. auch F_1 und Ψ_1 liegen in Involution. *Die Involutionsbeziehung $[F\Psi] \equiv 0$ zweier Functionen F und Ψ bleibt demnach ebenfalls invariant gegenüber der Ausführung einer Punkttransformation.*

Es gilt somit der einfache, aber wichtige

Satz 22: *Bei jeder Punkttransformation des Raumes* (x, y, z) *bleibt die Involutionsbeziehung invariant, d. h. wenn zwei Gleichungen*

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \quad \Psi(x, y, z, p, q) = 0$$

oder auch zwei Functionen F *und* Ψ *in Involution liegen, wenn also* $[F\Psi]$ *entweder infolge von* $F = 0$, $\Psi = 0$ *oder identisch gleich Null ist, so gilt das Entsprechende von den durch Ausübung der Erweiterung der Punkttransformation hervorgehenden Gleichungen:*

$$F_1(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1) = 0, \quad \Psi_1(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1) = 0$$

bez. von den hervorgehenden Functionen F_1, Ψ_1. *Es ist also im ersten Falle* $[F_1 \Psi_1] = 0$ *infolge von* $F_1 = 0$, $\Psi_1 = 0$ *und im zweiten Falle* $[F_1 \Psi_1] \equiv 0$.

Wir wollen nun überhaupt die *allgemeinsten Transformationen der Elemente* betrachten, *die jedes Integralgebilde einer vorgelegten partiellen Differentialgleichung erster Ordnung* Trf. d. Elemente e. part. Diffgl.

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

wieder in ein Integralgebilde derselben Gleichung überführen.

Die Differentialgleichung definiert eine *vier*dimensionale Mannigfaltigkeit von Flächenelementen. Denken wir uns die Gleichung $F = 0$ etwa nach q auflösbar:

$$q = Q(x, y, z, p),$$

so können x, y, z, p als die Coordinaten der ∞^4 Elemente dieser Mannigfaltigkeit gebraucht werden. Beschränken wir uns auf diese ∞^4 Elemente, so ist es leicht, *alle* Transformationen anzugeben, die jedes dieser Elemente wieder in ein solches verwandelt. Wir brauchen zu diesem Zwecke nur eine beliebige Transformation der *vier* Veränderlichen x, y, z, p in x_1, y_1, z_1, p_1 aufzustellen:

$$(84)\quad x_1 = X(x, y, z, p), \quad y_1 = Y(x, y, z, p), \quad z_1 = Z(x, y, z, p),$$
$$p_1 = P(x, y, z, p).$$

Eine derartige Transformation wird aber im allgemeinen ein Integralgebilde von $F = 0$ nicht wieder in ein Integralgebilde von $F = 0$ verwandeln, denn dazu wäre notwendig — und offenbar auch zugleich hinreichend —, dass die Transformation (84) zwei vereinigt liegende Elemente der Gleichung $F = 0$ stets wieder in vereinigt liegende Elemente verwandelte.

Stellen wir uns nun die Aufgabe, alle durch analytische Gleichungen ausdrückbaren Transformationen (84) der Elemente von $F = 0$ zu finden, bei denen vereinigte Elemente in ebensolche und infolgedessen Integralgebilde in Integralgebilde übergehen. Da die charakteristischen Streifen die einzigen Elementstreifen sind, die in unendlich vielen Integralgebilden enthalten sind, so muss jeder charakteristische Streifen vermöge der Transformation (84) wieder in einen charakteristischen Streifen übergehen. Benutzen wir nun eine der in § 2 besprochenen *Abbildungen* der ∞^3 charakteristischen Streifen auf die Linienelemente einer Ebene, so muss also in der Bildebene jedes Linienelement in ein Linienelement verwandelt werden. Nun wird ferner ein Integralgebilde von ∞^2 Elementen bei der Abbildung durch einen Verein von Linienelementen in der Bildebene dargestellt. Die Transformation der Linienelemente, die durch die Abbildung aus der Transformation (84) hervorgeht, muss somit die Eigenschaft haben, in der Ebene jeden Verein von Linienelementen in einen Verein zu verwandeln, d. h. sie muss eine *Berührungstransformation in der Ebene* sein.

Abbild. auf d. Ebene.

Berührtrf. i. d. Ebene.

Umgekehrt: Wählen wir in der Bildebene irgend eine Berührungstransformation, so wird sie jedes Linienelement in ein Linienelement und jeden Verein in einen Verein verwandeln. Da jedem Linienelement ein charakteristischer Streifen der Gleichung $F = 0$ entspricht, so wird hiermit im Raume eine Transformation der ∞^3 charakteristischen Streifen hergestellt. Bei ihr gehen alle ∞^1 charakteristischen Streifen eines Integralgebildes von ∞^2 Elementen stets wieder in die ∞^1 charakteristischen Streifen eines Integralgebildes von ∞^2 Elementen über. Zwei unendlich benachbarte charakteristische Streifen also, denen die Eigenschaft zukommt, dass jedes Element des einen mit den unendlich benachbarten Elementen des anderen vereinigt liegt, gehen in zwei charakteristische Streifen derselben Art über.

Mit dieser Transformation der ∞^3 charakteristischen Streifen ist aber noch gar nicht festgestellt, wie die ∞^4 Elemente aller dieser Streifen transformiert werden sollen. Wenn ein charakteristischer Streifen in einen gewissen anderen übergeht, so können wir vielmehr noch in irgendwelcher Weise anordnen, in welches Element des letzteren ein beliebiges Element des ersteren verwandelt werden soll. Haben wir eine solche Festsetzung getroffen, so liegt eine Transformation der ∞^4 Flächenelemente von $F = 0$ vor, die jeden charakteristischen Streifen wieder in einen solchen verwandelt und die ferner je zwei unendlich benachbarte charakteristische Streifen von der oben angegebenen besonderen Art in ebensolche überführt. Daraus folgt, dass die Transformation zwei vereinigte Elemente der Gleichung $F = 0$ stets wieder in vereinigte Elemente verwandelt. Es geht demnach *jedes* Integralgebilde von $F = 0$ vermöge der Transformation in ein Integralgebilde über.

Man erkennt, dass die gesuchten und hiermit gefundenen Transformationen der Flächenelemente von $F = 0$, die jedes Integralgebilde in ein Integralgebilde verwandeln, noch in hohem Masse willkürlich sind.

Im zweiten Bande werden wir, nachdem die allgemeine Theorie der Berührungstransformationen des Raumes entwickelt worden ist, das hier nur knapp behandelte Problem in eingehender Weise besprechen. Wir werden finden, dass die allgemeinste Transformation der Elemente einer *einzelnen* partiellen Differentialgleichung erster Ordnung $F(x, y, z, p, q) = 0$, bei der jedes Integralgebilde in ein Integralgebilde übergeht, durch eine Berührungstransformation des *Raumes* vermittelt werden *kann*. Dagegen steht die Sache anders, wenn man eine Schar von ∞^1 partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$F(x, y, z, p, q) = \text{Const.}$$

ins Auge fasst. Dann ergiebt sich, dass die Berührungstransformationen des Raumes nicht die einzigen Transformationen der ∞^5 Flächenelemente des Raumes sind, die jedes Integralgebilde wieder in ein Integralgebilde verwandeln, und zwar sowohl dann, wenn man verlangt, dass jede einzelne der ∞^1 Gleichungen $F = 0$ für sich invariant bleiben soll, als auch dann, wenn man verlangt, dass nur ihre Schar invariant bleiben soll. Wenn man aber die Forderung stellt, dass die gesuchte Transformation der Flächenelemente des Raumes die Integralgebilde *jeder* partiellen Differentialgleichung erster Ordnung in die Integralgebilde der durch die Transformation hervorgehenden partiellen Differentialgleichung überführen soll, so ergiebt sich, dass nur die Berührungstransformationen des Raumes, diese aber auch sämtlich, die Forderung erfüllen*).

Kapitel 13.

Partielle Differentialgleichungen 1. O., die infinitesimale Punkttransformationen gestatten.

Im Allgemeinen kommen die Integrationstheorien der älteren Mathematiker, die sich auf gewöhnliche Differentialgleichungen beziehen, im Grunde genommen darauf hinaus, dass man, wenn auch unbewusst, solche Kategorien von Differentialgleichungen herausgriff, die eine oder mehrere bekannte infinitesimale Transformationen gestatten, und fand, dass sich dieser Umstand für die Integration nutzbar machen liess.

Diese Bemerkung war für Lie der Ausgangspunkt für weitgehende Integrationstheorien von gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen beliebiger Ordnungen. In diesen Theorien wird der Begriff: continuierliche Transformationsgruppe für die Differentialgleichungen verwertet. Aber wir beabsichtigen in diesem Werke durchaus nicht, uns mit diesen allgemeinen Theorien zu beschäftigen. Wir wollen hier

*) Siehe Lie, *Analytische Theorie der Berührungstransformationen,* Verh. d. Ges. d. Wiss. zu Christiania, Juni 1873, S. 242.

nur einige unter Lie's ersten Untersuchungen in dieser Richtung wiedergeben, die aus den Jahren 1870 und 71 stammen. Wir glauben, hierdurch dem Leser eine nützliche Vorbereitung zu dem Studium der allgemeineren Theorien zu geben, und betonen dabei noch besonders, dass sich auch diese allgemeineren Entwickelungen nach mehreren Seiten hin für die Geometrie verwerten lassen.

§ 1. Partielle Differentialgleichungen 1. O., die infinitesimale Translationen bez. Rotationen gestatten.

Vorgelegt sei eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung im Raume (x, y, z):

(1) $$F(x, y, z, p, q) = 0.$$

Sie definiert ∞^4 Flächenelemente, ∞^3 charakteristische Streifen und die von diesen erzeugten Vereine von Elementen, die Integralgebilde der Gleichung $F = 0$ sind.

Translation. Nunmehr führen wir auf den Raum (x, y, z) eine *Translation* um eine bestimmte Strecke a längs der x-Axe aus, bei der also die Punkte (x, y, z) in die Punkte

(2) $$x_1 = x + a, \qquad y_1 = y, \qquad z_1 = z$$

übergehen. Bei dieser Translation werden auch die Flächenelemente (x, y, z, p, q) in neue Elemente $(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1)$ übergeführt. Es ist einerseits begrifflich klar und kann andererseits aus den Formeln (80) des § 5, 12. Kap., S. 577, für die Erweiterung einer Punkttransformation entnommen werden, dass dabei jedes Flächenelement parallel der x-Axe um die Strecke a verschoben wird, sodass die Gleichungen

(3) $$x_1 = x + a, \quad y_1 = y, \quad z_1 = z, \quad p_1 = p, \quad q_1 = q$$

das aus dem Element (x, y, z, p, q) hervorgehende neue Element definieren. Die ∞^4 Elemente der Gleichung (1) gehen also in die ∞^4 Elemente $(x_1\, y_1, z_1, p_1, q_1)$ über, die *der* Gleichung genügen, die durch Elimination von x, y, z, p, q aus (1) vermöge (3) hervorgeht, also der Gleichung:

(4) $$F(x_1 - a, y_1, z_1, p_1, q_1) = 0.$$

Die Translation (2) führt also die partielle Differentialgleichung (1) in die partielle Differentialgleichung (4) über. Nach Satz 20, § 5 des 12. Kap., S. 579, geht dabei jedes Integralgebilde der Gleichung (1) in ein Integralgebilde der Gleichung (4) über.

Fragen wir uns, wie die vorgelegte partielle Differentialgleichung (1) beschaffen sein muss, damit jedes Integralgebilde der Gleichung (1) vermöge der Translation wieder in ein Integralgebilde *derselben* Gleichung (1) übergehe. Dazu ist notwendig und hinreichend, dass die neue Differentialgleichung (4) mit der ursprünglichen Gleichung (1), mit dem einzigen Unterschied, dass darin x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 anstelle von x, y, z, p, q stehen, identisch sei, anders ausgedrückt, dass die Erweiterung (3) der Translation jedes Element der Gleichung (1) in ein Element derselben Gleichung (1) überführe.

Part. Diffgl., die eine Translat. gestattet.

Wir sagen, dass die partielle Differentialgleichung

(1) $$F(x, y, z, p, q) = 0$$

die Translation

(2) $$x_1 = x + a, \quad y_1 = y, \quad z_1 = z$$

gestatte oder dass sie bei ihr invariant bleibe, wenn die Translation jedes Integralgebilde der Gleichung (1) *wieder in ein Integralgebilde der Gleichung* (1) *überführt oder, was dasselbe bedeutet, wenn jedes Element* (x, y, z, p, q) *der Gleichung* (1) *vermöge der Erweiterung*

(3) $$x_1 = x + a, \quad y_1 = y, \quad z_1 = z, \quad p_1 = p, \quad q_1 = q$$

der Translation (2) *in ein Element* $(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1)$ *derselben Gleichung* (1) *übergeht.*

Dies ist z. B. für die partielle Differentialgleichung

$$\sin x + \varphi(y, z, p, q) = 0$$

der Fall. Sie gestattet jede Translation von der Form:

$$x_1 = x + 2\varkappa\pi, \quad y_1 = y, \quad z_1 = z,$$

bei der $\varkappa$ eine ganze Zahl ist. Diese Differentialgleichung gestattet also eine *discrete* Anzahl von unendlich vielen Translationen.

Es giebt nun aber partielle Differentialgleichungen erster Ordnung

(1) $$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

die *alle* ∞^1 Translationen

(2) $$x_1 = x + a, \quad y_1 = y, \quad z_1 = z$$

längs der x-Axe gestatten, also bei einer *continuierlichen* Schar von ∞^1 Translationen invariant bleiben. Eine Differentialgleichung (1) hat diese Eigenschaft augenscheinlich dann und nur dann, wenn die Gleichung

∞^1 Translationen.

(4) $$F(x_1 - a, y_1, z_1, p_1, q_1) = 0$$

die willkürliche Constante a gar nicht enthält, d. h. wenn die partielle Differentialgleichung (1) *frei von* x ist und daher die Form:

$$F(y, z, p, q) = 0$$

hat.

Infin. Translat.

In diesem Falle gestattet die Differentialgleichung insbesondere auch die *infinitesimale Translation*, die durch (2) dargestellt wird, wenn die Constante a unendlich klein, gleich δt, ist:

$$x_1 = x + \delta t, \quad y_1 = y, \quad z_1 = z.$$

Bei ihr erfahren x, y, z, p, q die Incremente:

$$\delta x = \delta t, \quad \delta y = 0, \quad \delta z = 0, \quad \delta p = 0, \quad \delta q = 0. \tag{5}$$

Da ferner jede Translation (2) durch successive Ausführung infinitesimaler Translationen (5) erzeugt werden kann, so ist vorauszusehen, dass eine partielle Differentialgleichung

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

sobald sie die infinitesimale Translation (5) gestattet, auch jede *endliche* Translation (2) zulässt. Dies lässt sich rechnerisch sofort bestätigen: Bei der infinitesimalen Translation (5) geht die Differentialgleichung (1) in die Gleichung

$$F(x + \delta t, y, z, p, q) = 0$$

oder:

$$F(x, y, z, p, q) + \frac{\partial F}{\partial x}\delta t = 0$$

über. Sie soll mit $F = 0$ identisch sein, d. h. es soll

Part. Diffgl. frei von z.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

sein infolge von $F = 0$. Aber diese Bedingung ist nur dann erfüllt, wenn die Gleichung $F = 0$ *frei von* x ist. Dann aber gestattet $F = 0$ auch jede *endliche* Translation längs der x-Axe.

Die Integralgebilde der von x freien partiellen Differentialgleichung

$$F(y, z, p, q) = 0 \tag{6}$$

sind also so beschaffen, dass sie durch Translationen längs der x-Axe stets wieder in Integralgebilde derselben Gleichung übergehen. Unter diesen Integralgebilden befinden sich nun solche, die bei den Translationen längs der x-Axe stets wieder *in sich selbst* übergehen. In der That ist ja einerseits klar, dass jede Cylinderfläche:

$$z = Y(y),$$

deren Erzeugende der x-Axe parallel sind, durch die ∞^1 Translationen (2) in sich übergeführt wird, und andererseits ist diese Cylinderfläche ein Integralgebilde der Gleichung (6), wenn die Function $Y(y)$ der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung

∞^1 Integralfln. besond. Art.

$$F(y, Y, 0, Y') = 0$$

zwischen Y und y genügt. Die Integration dieser gewöhnlichen Differentialgleichung giebt ∞^1 Cylinderflächen:

$$z = Y(y, a),$$

da die Lösung Y der Gleichung eine Integrationsconstante a enthält. Jede dieser ∞^1 Integralflächen $z = Y(y, a)$ der partiellen Differentialgleichung (6) gestattet also die infinitesimale Translation (5) und damit offenbar auch jede endliche Translation längs der x-Axe.

Will man überhaupt alle Flächen $z - \varphi(x, y) = 0$ bestimmen, die bei der infinitesimalen Translation in sich verschoben werden, so hat man zu verlangen, dass der Zuwachs, den $z - \varphi$ vermöge der infinitesimalen Translation

(7) $$\delta x = \delta t, \quad \delta y = 0, \quad \delta z = 0$$

erfährt, nämlich

$$\delta z - \varphi_x \delta x - \varphi_y \delta y$$

oder $\varphi_x \delta t$, vermöge $z = \varphi$ verschwinde, d. h. da $\varphi_x = \frac{\partial z}{\partial x} = p$ ist, dass für diese Flächen

$$p = 0$$

sei. Diese Forderung liefert gerade die Cylinderflächen, deren Erzeugende der x-Axe parallel sind.

Die oben erwähnten ∞^1 Integralflächen der Gleichung

$$F(y, z, p, q) = 0,$$

von denen jede bei der infinitesimalen Translation längs der x-Axe in sich übergeht, sind daher gemeinsame Integralgebilde der beiden partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$F(y, z, p, q) = 0, \quad p = 0.$$

Nach Satz 16, § 4 des 12. Kap., S. 568, liegen also diese beiden Gleichungen in *Involution.* In der That ist hier Involut. mit $p = 0$.

$$[F(y, z, p, q), p] \equiv -pF_z,$$

der Klammerausdruck verschwindet folglich vermöge $p = 0$. Noch sei bemerkt, dass die infinitesimale Translation (7) einer beliebigen Function $f(x, y, z)$ den Zuwachs $\frac{\partial f}{\partial x} \delta t$ erteilt. Sie hat daher nach § 2 des 10. Kap., S. 442, das Symbol:

$$\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Wenn eine partielle Differentialgleichung

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

die infinitesimale Translation längs der y-Axe oder aber die infinitesimale Translation längs der z-Axe gestattet, so können wir eine ganz analoge Theorie entwickeln. Es ist ja nur die Veränderliche x

mit y bez. z zu vertauschen, um diese Fälle aus den obigen abzuleiten. Es ergiebt sich so, dass im ersten Falle $F=0$ frei von y, im zweiten frei von z sein muss, und dass die partielle Differentialgleichung ∞^1 solche Integralflächen hat, die im ersten Falle Cylinder parallel der y-Axe, im zweiten Cylinder parallel der z-Axe sind.

Part. Diffgl. m. zwei inf. Translat.

Nunmehr gehen wir über zur Betrachtung solcher partieller Differentialgleichungen erster Ordnung

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

die zwei verschiedene infinitesimale Translationen, etwa die längs der x-Axe:

$$\delta x = \delta t, \quad \delta y = 0, \quad \delta z = 0$$

und die längs der y-Axe:

$$\delta x = 0, \quad dy = \delta t, \quad \delta z = 0$$

gestatten. Diese infinitesimalen Translationen haben die Symbole

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Part. Diffgl. frei von x, y.

Nach dem Vorhergehenden muss jede Differentialgleichung $F=0$, die diese beiden Eigenschaften hat, sowohl von x als auch ganz analog von y frei sein. Sie hat somit die allgemeine Form:

(8)
$$F(z, p, q) = 0.$$

Jede infinitesimale Translation, deren Richtung parallel der (xy)-Ebene ist, hat die Form:

$$\delta x = a\delta t, \quad \delta y = b\delta t, \quad \delta z = 0,$$

wobei a, b Constanten sind. Diese infinitesimale Transformation:

$$a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y}$$

ist somit, wie wir in Analogie mit einer früher eingeführten Redeweise (vgl. § 5 des 4. Kap., S. 122, 123) sagen, *linear ableitbar* aus den beiden:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y},$$

d. h. aus den beiden infinitesimalen Translationen längs der x- bez. y-Axe. Wir bezeichnen die infinitesimale Translation daher als *abhängig* von diesen beiden. Es ist begrifflich einleuchtend, dass die von x und y freie partielle Differentialgleichung (8) auch jede infinitesimale Translation

$$a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y}$$

gestattet. Denn wir wissen, dass jedes Element der Gleichung (8) vermöge einer Translation längs der x-Axe und ebenso vermöge einer Translation längs der y-Axe wieder in ein Element derselben Gleichung (8) übergeht, also auch vermöge einer beliebigen Translation parallel der (xy)-Ebene, da die letztere Translation der Aufeinanderfolge der beiden ersteren äquivalent ist.

Jede Gleichung von der Form (8) hat daher sicher ∞^1 Cylinderflächen als Integralflächen, deren Erzeugende einer bestimmten Richtung in der (xy)-Ebene parallel laufen. Sie hat demnach sicher überhaupt ∞^2 derartige Cylinderflächen als Integralflächen. Ein Cylinder, dessen Erzeugende parallel der Geraden:

$$y + ax = 0$$

der (xy)-Ebene sind, hat allgemein die Gleichung

$$z = \Phi(y + ax),$$

sodass hier:

$$p = a\Phi', \quad q = \Phi'$$

ist. Verlangen wir, dass diese Fläche eine Integralfläche von (8) sein soll, so haben wir zu fordern:

$$F(\Phi, a\Phi', \Phi') = 0.$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung zwischen $y + ax$ und $\Phi(y + ax)$. Sie giebt, und zwar offenbar durch *Quadratur*, eine Function Φ von $y + ax$, die ausser $y + ax$ noch eine willkürliche Constante b enthält. So ergeben sich ∞^2 Cylinderflächen ∞^2 Integralfln. durch Quadrat.

$$z = \Phi(y + ax, b)$$

als Integralflächen von (8). Sie bilden eine *vollständige Lösung* der Gleichung (8) mit den Parameter a und b. Aus dieser vollständigen Lösung lassen sich alle Integralgebilde der Gleichung (8) nach Lagrange durch Differentiation und Elimination ableiten. Das Integrationsproblem der Differentialgleichung (8) ist somit auf eine *Quadratur* zurückgeführt.

Wir heben hervor, dass die ∞^1 Integralflächen, die Cylinder mit Erzeugenden parallel der Geraden

$$y + ax = 0$$

in der (xy)-Ebene sind, zu den Integralflächen derjenigen partiellen Differentialgleichung gehören, deren ∞^4 Elemente Geraden parallel dieser Geraden enthalten, d. h. zu den Integralflächen der Gleichung

$$\frac{p}{q} = a$$

oder:

$$p - aq = 0,$$

während

$$\frac{\partial f}{\partial x} - a\frac{\partial f}{\partial y}$$

das Symbol der infinitesimalen Translation parallel jener Geraden

$$y + ax = 0$$

Invol. mit $\frac{p}{q} = a$.

ist. Die Gleichung (8) liegt also nach Satz 16, § 4 des 12. Kap., S. 568, in *Involution* mit jeder der ∞^1 Gleichungen

$$\frac{p}{q} = a.$$

In der That ist auch

$$\left[F(z, p, q), \frac{p}{q}\right] \equiv 0.$$

Part. Diffgl. mit zwei inf. Translat.

Wir wollen das Ergebnis so zusammenfassen:

Satz 1: *Gestattet eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung*

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

im Raume (x, y, z) *zwei von einander unabhängige infinitesimale Translationen*

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y},$$

so ist sie frei von x, y, *also von der Form:*

$$F(z, p, q) = 0$$

und liegt mit der Gleichung

$$\frac{p}{q} = a$$

für jeden Wert der Constanten a *in Involution. Durch eine Quadratur ergiebt sich eine vollständige Lösung der Gleichung und damit die allgemeine Lösung.*

Dieser einfache Satz wird im dritten Paragraphen eine tiefere Bedeutung erhalten, und deshalb haben wir ihn formuliert.

Rotation.

Um ein anderes Beispiel ins Auge zu fassen, betrachten wir eine *Rotation* um die z-Axe. Dabei sei r der Abstand des Punktes (x, y, z) von der z-Axe und φ der Winkel dieses Abstandes mit der (xz)-Ebene, sodass φ, z, r als *cylindrische* Coordinaten der Punkte (x, y, z) benutzt werden können. In diesen Coordinaten lauten die Gleichungen einer Rotation um die z-Axe:

$$\varphi_1 = \varphi + a, \quad z_1 = z, \quad r_1 = r.$$

Es ist denkbar, dass eine partielle Differentialgleichung die Eigenschaft hat, dass jedes ihrer Integralgebilde vermöge dieser Rotation wieder in ein Integralgebilde der Gleichung übergeht. Insbesondere ist es ferner denkbar, dass eine partielle Differentialgleichung $F = 0$ die Eigenschaft hat, dass ihre Integralgebilde bei *allen* ∞^1 Rotationen um die z-Axe unter einander vertauscht werden. Unter diesen Rotationen ist insbesondere eine *infinitesimale Rotation* enthalten, nämlich die, bei der φ, r, z die Incremente Infin. Rotation.

$$(9) \qquad \delta\varphi = \delta t, \quad \delta z = 0, \quad \delta r = 0$$

erfahren.

Wenn die Integralgebilde der partiellen Differentialgleichung $F = 0$ bei dieser infinitesimalen Rotation unter einander vertauscht werden, so sagen wir, *dass die Gleichung die infinitesimale Rotation gestatte, oder auch, dass sie bei ihr invariant bleibe.*

Gestattet die Differentialgleichung $F = 0$ die infinitesimale Rotation um die z-Axe, so gehen auch bei jeder *endlichen* Rotation um die z-Axe ihre Integralgebilde in einander über, denn jede endliche Rotation um diese Axe lässt sich durch successive Ausführung infinitesimaler erzeugen. Analytisch wird dies übrigens durch die folgende Betrachtung dargethan:

Zwischen den Coordinaten x, y, z und φ, z, r der Punkte des Raumes bestehen die Beziehungen:

$$(10) \qquad \varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}, \quad z = z, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Die vorgelegte partielle Differentialgleichung erster Ordnung $F = 0$ lässt sich nun auch in den cylindrischen Coordinaten φ, z, r ausdrücken. Zu diesem Zwecke müssen die Grössen x, y, z, p, q durch φ, z, r und

$$\frac{\partial r}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial r}{\partial z}$$

ausgedrückt werden. Die Gleichungen (10) zeigen, wie sich φ, z, r als Functionen von x, y, z darstellen, und daraus folgt, wenn r als Function von φ und z aufgefasst wird:

$$dr = \frac{\partial r}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial r}{\partial z} dz$$

oder wegen (10):

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x dx + y dy) = \frac{\partial r}{\partial \varphi} \cdot \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} + \frac{\partial r}{\partial z} dz.$$

Setzen wir hierin $dz = p dx + q dy$ ein und verlangen das Bestehen der Gleichung für jedes Wertepaar dx, dy, so folgt:

$$(10') \qquad \frac{\partial r}{\partial \varphi} = \frac{yp - xq}{xp + yq} \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{xp + yq}.$$

Vermöge der fünf Gleichungen (10) und (10′) haben wir nun x, y, z, p, q aus der Differentialgleichung $F = 0$ zu eliminieren, um die Form dieser

Differentialgleichung in den cylindrischen Coordinaten φ, z, r zu erhalten. Es möge sich ergeben:

$$\Omega\left(\varphi, z, r, \frac{\partial r}{\partial \varphi}, \frac{\partial r}{\partial z}\right) = 0.$$

Analogie mit e. früheren Probl.

Da sich die infinitesimale Rotation in den cylindrischen Coordinaten in der Form (9) darstellt und da $\Omega = 0$ diese infinitesimale Rotation gestatten soll, so sehen wir, dass das jetzt vorliegende Problem analytisch genau dieselbe Eigenschaft hat wie das auf S. 586 behandelte, bei dem eine partielle Differentialgleichung

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

vorlag, die bei der infinitesimalen Translation

$$\delta x = \delta t, \quad \delta y = 0, \quad \delta z = 0$$

invariant sein sollte, denn die Gleichungen dieser infinitesimalen Translation, geschrieben in x, y, z, haben genau die Form der Gleichungen der infinitesimalen Rotation (9) geschrieben in φ, z, r.

Daher können wir die damaligen analytischen Ergebnisse sofort auf den jetzigen Fall übertragen. Daraus folgt, dass die Gleichung $\Omega = 0$ frei von φ sein muss, also die Form hat:

$$\Omega\left(z, r, \frac{\partial r}{\partial \varphi}, \frac{\partial r}{\partial z}\right) = 0,$$

und dass sie sicher ∞^1 Integralflächen von der Form

$$r = Z(z)$$

besitzt. In der That giebt $r = Z(z)$ in $\Omega = 0$ eingesetzt die Bedingung:

$$\Omega(z, Z, 0, Z') = 0,$$

und dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung zwischen Z und z. Ihre Lösung enthält eine willkürliche Constante a:

(11) $$r = Z(z, a).$$

Während früher (S. 587) die ∞^1 Flächen $z = Y(y, a)$ gemeinsame Integralflächen von $F = 0$ und $p = 0$ waren, sind jetzt die ∞^1 Flächen

$$r = Z(z, a)$$

gemeinsame Integralflächen der beiden Gleichungen

$$\Omega\left(z, r, \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \frac{\partial r}{\partial z}\right) = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial \varphi} = 0,$$

denn der damaligen Grösse p oder $\frac{\partial z}{\partial x}$ entspricht in den cylindrischen Coordinaten φ, z, r die Grösse $\frac{\partial r}{\partial \varphi}\cdot$ Die beiden soeben angegebenen partiellen Differentialgleichungen liegen nach Satz 16, § 4 des 12. Kap., S. 568, in *Involution.*

Infolge der Bedeutung der cylindrischen Coordinaten stellt die Gleichung (11) ∞^1 *Rotationsflächen* dar, deren Axe die z-Axe ist. Die Gleichung $\Omega = 0$ ist in den ursprünglichen Veränderlichen x, y, z die vorgelegte partielle Differentialgleichung ∞^1 Rotat.-fln als Integralfln.

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

während die Gleichung $\frac{\partial r}{\partial \varphi} = 0$, die, wie wir sahen, mit ihr in *Involution* liegt, in den ursprünglichen Veränderlichen x, y, z infolge von (10′) in der Form Invol. mit $-yp+xq=0$

$$-yp + xq = 0$$

geschrieben werden kann.

Da ferner

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = z$$

ist, so ist für die infinitesimale Rotation (9), bei der nur φ um δt geändert wird:

$$\delta x = -r\sin\varphi\,\delta\varphi = -y\,\delta t, \qquad \delta y = r\cos\varphi\,\delta\varphi = x\,\delta t, \qquad \delta z = 0.$$

Die infinitesimale Rotation um die z-Axe hat also in den gewöhnlichen Punktcoordinaten x, y, z das Symbol:

$$-y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Wenn daher eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung $F = 0$ *die infinitesimale Rotation*

$$-y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}$$

gestattet, so liegt sie mit der partiellen Differentialgleichung

$$-yp + xq = 0$$

in Involution und hat also mit ihr ∞^1 *Integralflächen gemein, nämlich* ∞^1 *Rotationsflächen, deren Axe die* z*-Axe ist und die sich durch eine Quadratur bestimmen lassen.*

Nun nehmen wir an, *die partielle Differentialgleichung* Part. Diffgl. m. inf. Rot. u. inf. Translat.

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

gestatte sowohl eine infinitesimale Rotation um die z*-Axe als auch eine infinitesimale Translation längs der* z*-Axe,* also die beiden infinitesimalen Transformationen mit den Symbolen:

$$-y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Führen wir wieder die cylindrischen Coordinaten φ, z, r vermöge (10) ein, so stellen sich diese beiden infinitesimalen Transformationen so dar:

$$\delta\varphi = \delta t, \quad \delta z = 0, \quad \delta r = 0$$

bez.

$$\delta\varphi = 0, \quad \delta z = \delta t, \quad \delta r = 0.$$

Sie haben also in den cylindrischen Coordinaten φ, z, r genau die Form, wie in den gewöhnlichen Coordinaten x, y, z die infinitesimalen Translationen längs der x- und y-Axe (vgl. S. 588). Ferner wird $F = 0$, geschrieben in den Coordinaten φ, z, r, die Form

$$\Omega\left(\varphi, z, r, \frac{\partial r}{\partial \varphi}, \frac{\partial r}{\partial z}\right) = 0$$

annehmen, die aus $F = 0$ vermöge (10) und (10′) hervorgeht. Unser Problem hat jetzt genau dieselbe analytische Form wie das auf S. 588 u. s. w. behandelte, das zu dem Satze 1 führte. Daraus können wir zunächst entnehmen, dass $\Omega = 0$ sowohl von φ als auch von z frei sein muss:

$$\Omega\left(r, \frac{\partial r}{\partial \varphi}, \frac{\partial r}{\partial z}\right) = 0,$$

ferner, da jetzt statt p und q die Grössen $\frac{\partial r}{\partial \varphi}$ und $\frac{\partial r}{\partial z}$ zu gebrauchen sind, dass $\Omega = 0$ mit jeder der ∞^1 partiellen Differentialgleichungen:

$$\frac{\frac{\partial r}{\partial \varphi}}{\frac{\partial r}{\partial z}} = a \tag{12}$$

Vollst. Lösg. durch Quadrat. in Involution liegt. Sie hat mit jeder ∞^1 Integralflächen gemein, die sich durch *Quadratur* angeben lassen:

$$r = \Phi(z + a\varphi, b).$$

Alle diese ∞^2 Flächen bilden eine vollständige Lösung, sodass also das Integrationsproblem der Gleichung auf nur eine Quadratur reduciert ist. Die Gleichung (12) hat, geschrieben in x, y, z, nach den Gleichungen (10′) die Form

$$yp - xq = a.$$

Da wir damals sahen, dass $F = 0$ auch jede aus den beiden infinitesimalen Translationen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ linear ableitbare gestattet, so folgt, dass die jetzige Differentialgleichung jede aus

$$-y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}$$

linear ableitbare infinitesimale Transformation, d. h. jede *infinitesimale Schraubung längs der z-Axe:* Infin. Schraubg.

$$y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} + a\frac{\partial f}{\partial z}$$

gestattet. Die ∞^2 Integralflächen der vollständigen Lösung sind, gedeutet im ursprünglichen Raum (x, y, z), *Schraubenflächen.* Setzt man $\varphi =$ Const., d. h. schneidet man die Flächen mit Ebenen durch die z-Axe, so ergeben sich die ∞^1 Curven

$$r = \Phi(z + \text{Const.}, b),$$

die mit der Curve

$$r = \Phi(z, b)$$

congruent sind, sodass jede der Flächen durch Schraubung einer solchen Curve längs der z-Axe entsteht.

Analoge Theorien lassen sich für solche partielle Differentialgleichungen $F = 0$ entwickeln, die zwei *infinitesimale projective Transformationen* von der Form Inf. proj. Trf.

$$ax\frac{\partial f}{\partial x} + by\frac{\partial f}{\partial y} + cz\frac{\partial f}{\partial z}$$

oder

$$\delta x = ax\delta t, \quad \delta y = by\delta t, \quad \delta z = cz\delta t$$

gestatten. Dabei benutzt man die neuen Veränderlichen

$$\mathfrak{x} = \log x, \quad \mathfrak{y} = \log y, \quad \mathfrak{z} = \log z,$$

vermöge deren sich diese infinitesimalen projectiven Transformationen in der Form:

$$\delta\mathfrak{x} = a\delta t, \quad \delta\mathfrak{y} = b\delta t, \quad \delta\mathfrak{z} = c\delta t$$

darstellen. Diese Form ist ganz analog der Form

$$\delta x = a\delta t, \quad \delta y = b\delta t, \quad \delta z = c\delta t$$

einer infinitesimalen *Translation* in den gewöhnlichen Coordinaten x, y, z, und dies giebt einen Weg, die angedeutete Theorie zu entwickeln. Hieraus kann man, wie wir ohne Beweis erwähnen, z. B. ableiten, dass, wenn die Gleichung $F = 0$ zwei der angegebenen infinitesimalen projectiven Transformationen gestattet, alsdann eine vollständige Lösung und damit die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung $F = 0$ *durch eine Quadratur* gefunden werden kann.

§ 2. Partielle Differentialgleichungen 1. O., die eine infinitesimale Transformation gestatten.

Nachdem wir im ersten Paragraphen einige wichtige und lehrreiche Beispiele besprochen haben, gehen wir jetzt dazu über, ganz allgemein die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zu besprechen, die eine bekannte infinitesimale Punkttransformation gestatten.

Zu diesem Zwecke ist es zunächst nötig, die Ausführungen in § 5 des vorigen Kapitels über die Erweiterung einer Punkttransformation zu vervollständigen.

Inf. Trf. Bei einer *infinitesimalen Punkttransformation im Raume* (x, y, z) gehen die Punkte (x, y, z) in unendlich benachbarte Punkte (x_1, y_1, z_1) über. x_1, y_1, z_1 unterscheiden sich also nur unendlich wenig von x, y, z, und wir können daher die infinitesimale Punkttransformation allgemein in der Form schreiben:

$$(13)\quad x_1 = x + \xi(x, y, z)\,\delta t + \cdots,\qquad y_1 = y + \eta(x, y, z)\,\delta t + \cdots,$$
$$z_1 = z + \zeta(x, y, z)\,\delta t + \cdots,$$

wobei δt eine unendlich kleine Grösse bedeuten soll und die rechten Seiten als Reihen nach ganzen positiven Potenzen von δt aufzufassen sind, oder wie wir kürzer sagen, Potenzreihen nach δt sind. Die Coordinaten x, y, z erfahren also, wenn man die höheren Potenzen von δt vernachlässigt, die Incremente:

$$(13')\quad \delta x = \xi(x, y, z)\,\delta t,\qquad \delta y = \eta(x, y, z)\,\delta t,\qquad \delta z = \zeta(x, y, z)\,\delta t.$$

Eine Function f von x, y, z geht bei Ausführung der infinitesimalen Transformation in die Function $f(x_1, y_1, z_1)$ über oder also nach (13) in:

$$f(x + \xi\delta t,\ y + \eta\delta t,\ z + \zeta\delta t).$$

Hierfür können wir aber schreiben:

$$f(x, y, z) + \left(\xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta\frac{\partial f}{\partial z}\right)\delta t + \cdots,$$

wobei die Glieder höherer Ordnung in δt nur angedeutet sind. Wenn wir die höheren Potenzen von δt vernachlässigen, so ergiebt sich also für den Zuwachs δf, den $f(x, y, z)$ bei Ausführung der infinitesimalen Transformation (13) erfährt, der Ausdruck:

$$\delta f = \left(\xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta\frac{\partial f}{\partial z}\right)\delta t.$$

Wie früher (vgl. § 2 des 10. Kap., S. 442) bezeichnen wir daher den Ausdruck

$$Uf \equiv \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z}$$

als das *Symbol der infinitesimalen Punkttransformation* (13). Ist es gegeben, so sind ξ, η, ζ und also auch die Formeln (13′) bekannt. Symbole Uf.

Liegen mehrere infinitesimale Transformationen

$$U_i f \equiv \xi_i \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_i \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_i \frac{\partial f}{\partial z} \quad (i = 1, 2 \cdots r)$$

vor, so sagen wir wie früher (§ 5 des 4. Kap., S. 122, 123), dass sie von einander *unabhängig* sind, sobald *keine* lineare Relation mit constanten Coefficienten $c_1, c_2 \ldots c_r$: Unabh. inf. Trfn.

$$c_1 U_1 f + c_2 U_2 f + \cdots + c_r U_r f \equiv 0$$

zwischen ihnen besteht. Andernfalls heissen sie von einander abhängig. Ist insbesondere $U_r f$ von der Form:

$$U_r f \equiv c_1 U_1 f + \cdots + c_{r-1} U_{r-1} f,$$

in der $c_1 \ldots c_{r-1}$ *Constanten* bedeuten, so sagen wir, *dass die infinitesimale Transformation $U_r f$ aus $U_1 f \ldots U_{r-1} f$ linear ableitbar ist.* Lin. ableitb. inf. Trfn.

Den an der ebengenannten Stelle eingeführten *Klammerausdruck* Klammerausdruck.

$$U_1(U_2 f) - U_2(U_1 f)$$

zweier infinitesimaler Transformationen werden wir auch in diesem Kapitel benutzen. Er ist, wie früher auseinandergesetzt wurde, wiederum linear und homogen in $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ und stellt daher ebenfalls eine infinitesimale Punkttransformation dar.

Wie wir in § 5 des vorigen Kapitels eine beliebige Punkttransformation durch Hinzunahme der Transformation, die p und q dabei erfahren, erweitert haben, so lässt sich auch insbesondere *die infinitesimale Punkttransformation Uf oder* (13) *oder* (13′) *erweitern.* Dabei wenden wir das damals auf S. 578 angegebene Verfahren an. Wir fordern also: Erweitg. d. inf. Trf.

$$(14) \begin{cases} d(z + \zeta \delta t + \cdots) - p_1 d(x + \xi \delta t + \cdots) - q_1 d(y + \eta \delta t + \cdots) = \\ \qquad = \varrho(dz - p\,dx - q\,dy). \end{cases}$$

Die Grösse ϱ bedeutet eine noch unbekannte Function von x, y, z.

Bei einer infinitesimalen Punkttransformation Uf werden die Flächenelemente (x, y, z, p, q) in unendlich benachbarte $(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1)$ übergeführt. Daher werden sich p_1, q_1 unendlich wenig von p, q unterscheiden und also als Potenzreihen nach δt die Form haben:

$$(15) \quad p_1 = p + \pi(x, y, z, p, q)\,\delta t + \cdots, \quad q_1 = q + \varkappa(x, y, z, p, q)\,\delta t + \cdots,$$

sodass, bei Vernachlässigung der höheren Potenzen von δt, die Coordinaten p, q die Incremente erfahren:

$$(15') \qquad \delta p = \pi \delta t, \quad \delta q = \varkappa \delta t.$$

Unsere Aufgabe ist es, die Functionen π und $\varkappa$ von x, y, z, p, q aus der Forderung (14) zu ermitteln.

Setzen wir die Werte (15) in (14) ein, so steht links eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von δt. Dies muss also auch rechts der Fall sein. Daraus folgt, dass ϱ eine Potenzreihe nach δt ist. Da links das von δt freie Glied den Wert $dz - p dx - q dy$ hat, so folgt ferner, dass diese Reihe für ϱ mit dem Gliede Eins beginnen muss:

$$\varrho = 1 + \sigma(x, y, z, p, q)\,\delta t + \cdots.$$

Setzen wir diesen Wert, in dem σ noch unbekannt ist, ebenfalls in (14) ein, und vergleichen wir darauf die mit der ersten Potenz von δt behafteten Glieder auf beiden Seiten der Gleichung, so kommt (vgl. § 2 des 4. Kap., S. 93):

$$(16) \quad d\zeta - p\,d\xi - q\,d\eta - \pi\,dx - \varkappa\,dy = \sigma(dz - p\,dx - q\,dy).$$

Hierfür können wir nach (13′) und (15′) auch schreiben:

$$(16') \quad d\delta z - p d\delta x - q d\delta y - \delta p \cdot dx - \delta q \cdot dy = \sigma(dz - p\,dx - q\,dy).$$

Beiläufig sei angemerkt, dass sich diese Gleichung kürzer so schreiben lässt:

$$(16'') \qquad \delta(dz - p\,dx - q\,dy) = \sigma(dz - p\,dx - q\,dy).$$

Benutzen wir die Form (16) dieser Gleichung und vergleichen wir darin die Coefficienten von dx, dy, dz auf beiden Seiten, so erhalten wir, da x, y, z von einander unabhängige Veränderliche sind, die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \zeta_x - p\xi_x - q\eta_x - \pi &= -\sigma p, \\ \zeta_y - p\xi_y - q\eta_y - \varkappa &= -\sigma q, \\ \zeta_z - p\xi_z - q\eta_z \qquad &= \quad \sigma. \end{aligned}$$

Setzen wir den Wert von σ aus der letzten Gleichung in die beiden ersten ein, so können wir aus diesen π und $\varkappa$ berechnen. Es kommt:

$$(17) \qquad \begin{cases} \pi = \zeta_x + p\zeta_z - p(\xi_x + p\xi_z) - q(\eta_x + p\eta_z), \\ \varkappa = \zeta_y + q\zeta_z - p(\xi_y + q\xi_z) - q(\eta_y + q\eta_z). \end{cases}$$

Hiermit sind die ersten Glieder in den Entwickelungen:

$$p_1 = p + \pi \delta t + \cdots, \qquad q_1 = q + \varkappa \delta t + \cdots$$

berechnet. Um die Formeln kürzer zu schreiben, wollen wir, wenn

u eine beliebige Function von x, y, z ist, zur Abkürzung unter $\frac{du}{dx}$ und $\frac{du}{dy}$ die Ausdrücke verstehen:

$$\frac{du}{dx} \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{du}{dy} \equiv \frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Dann lauten die Formeln (17) so:

$$(17') \qquad \begin{cases} \pi = \frac{d\zeta}{dx} - p\frac{d\xi}{dx} - q\frac{d\eta}{dx}, \\ \varkappa = \frac{d\zeta}{dy} - p\frac{d\xi}{dy} - q\frac{d\eta}{dy}, \end{cases}$$

sodass sich als Incremente von p und q diese ergeben:

$$(18) \qquad \begin{cases} \delta p = \left(\frac{d\zeta}{dx} - p\frac{d\xi}{dx} - q\frac{d\eta}{dx}\right)\delta t, \\ \delta q = \left(\frac{d\zeta}{dy} - p\frac{d\xi}{dy} - q\frac{d\eta}{dy}\right)\delta t. \end{cases}$$

In dieser Art lassen sich die Formeln wohl am besten dem Gedächtnis einprägen. Dabei hat man dann immer zu beachten, dass z bei der Differentiation nach x bez. y als Function von x und y mit den partiellen Differentialquotienten p und q betrachtet wird.

Die Gleichungen (13′) und (18) stellen zusammen *die Erweiterung der infinitesimalen Punkttransformation* Uf dar. Bei ihr erfährt eine Function $f(x, y, z, p, q)$ den Zuwachs, der, abgesehen vom Factor δt, den Wert hat:

$$U'f \equiv \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta\frac{\partial f}{\partial z} + \pi\frac{\partial f}{\partial p} + \varkappa\frac{\partial f}{\partial q}.$$

$U'f$ ist also das *Symbol der Erweiterung* der infinitesimalen Punkttransformation Uf. Symbol. d. Erweitg.

Liegt eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

im Raume (x, y, z) vor, ist also, geometrisch ausgesprochen, eine Schar von ∞^4 Flächenelementen (x, y, z, p, q) gegeben, so sagen wir, *dass sie die infinitesimale Punkttransformation* Uf *gestatte oder dass sie bei ihr invariant bleibe,* wenn das Flächenelement Part. Diffgl., die Uf gestattet.

$$(x + \delta x,\ y + \delta y,\ z + \delta z,\ p + \delta p,\ q + \delta q),$$

das vermöge der Erweiterung (13′), (18) der infinitesimalen Punkttransformation aus einem beliebigen Element (x, y, z, p, q) der Schar $F = 0$ hervorgeht, stets auch zur Schar der ∞^4 Elemente gehört und also die Gleichung $F = 0$ erfüllt. In diesem Falle muss die Gleichung:

$$F(x + \delta x,\ y + \delta y,\ z + \delta z,\ p + \delta p,\ q + \delta q) = 0$$

oder also die Gleichung:

$$F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z + F_p \delta p + F_q \delta q = 0$$

infolge von $F = 0$ und infolge der fünf Gleichungen (13'), (18) bestehen. Es muss also die Gleichung:

$$U'F \equiv \xi \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \frac{\partial F}{\partial y} + \zeta \frac{\partial F}{\partial z} + \pi \frac{\partial F}{\partial p} + \varkappa \frac{\partial F}{\partial q} = 0 \tag{19}$$

infolge von $F = 0$ bestehen, wenn π, $\varkappa$ die oben berechneten Functionen (17) von x, y, z, p, q bedeuten.

Die lineare homogene partielle Differentialgleichung (19) ist dem System von vier gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta} = \frac{dp}{\pi} = \frac{dq}{\varkappa} \tag{20}$$

äquivalent. Dieses ist integriert, sobald man vier von einander unabhängige Integrale u_1, u_2, u_3, u_4 des Systems kennt. Da ξ, η, ζ frei von p, q sind, so bilden die beiden Gleichungen

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta}$$

für sich ein System. Sind $u(x, y, z)$ und $v(x, y, z)$ zwei von einander unabhängige Integrale dieses letzteren Systems, so sind sie zugleich Lösungen der linearen homogenen partiellen Differentialgleichung

$$Uf \equiv \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

sowie der Differentialgleichung (19). Sobald man also noch zwei von u, v sowie von einander unabhängige Integrale w_1, w_2 des Systems (20) kennt, so hat man in einer beliebigen Function $\Omega(u, v, w_1, w_2)$ die allgemeinste Lösung der linearen homogenen partiellen Differentialgleichung (19) vor sich.

Wenn nun die Differentialgleichung erster Ordnung

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

die infinitesimale Transformation Uf gestattet, d. h. wenn $U'F$ infolge von $F = 0$ verschwindet, so geht dies auf zwei Arten an: Zunächst ist es denkbar, dass jedes Element (x, y, z, p, q) der Schar $F = 0$ von ∞^4 Elementen einzeln bei der Erweiterung $U'f$ invariant bleibt. Dies tritt ein, wenn $\delta x, \delta y, \delta z, \delta p, \delta q$ sämtlich für jedes Element der Schar $F = 0$ verschwinden. Alle derartigen Elemente (x, y, z, p, q) müssen also den fünf Gleichungen

Ausnahmefall.

$$\xi(x,y,z)=0,\quad \eta(x,y,z)=0,\quad \zeta(x,y,z)=0,$$
$$\pi(x,y,z,p,q)=0,\quad \varkappa(x,y,z,p,q)=0$$

genügen. Es ist nun aber unmöglich, dass es wirklich ∞^4 Elemente (x, y, z, p, q) giebt, die diese Gleichungen befriedigen, wie man aus der Form (17) von π und $\varkappa$ erkennt.

Mithin wird die Differentialgleichung $F=0$ die infinitesimale Transformation Uf nur dann gestatten, wenn $U'f$ ein allgemeines Element (x, y, z, p, q) der Schar $F=0$ in ein unendlich benachbartes Element der Schar $F=0$ verwandelt. Dann ist $F=0$ eine Integralgleichung des Systems (20) und wird somit durch eine Relation Allgem. Fall.

$$\Omega(u, v, w_1, w_2)=0$$

zwischen den vier Integralen u, v, w_1, w_2 dargestellt (vgl. § 1 des 11. Kap., S. 490). Umgekehrt: Jede derartige Gleichung $\Omega=0$ ist eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, die Uf gestattet.

Liegt z. B. die infinitesimale Rotation um die z-Axe vor, deren Symbol ist (vgl. § 1, S. 593): Beispiel.

$$Uf \equiv -y\frac{\partial f}{\partial x}+x\frac{\partial f}{\partial y},$$

so sind u, v Integrale des Systems

$$\frac{dx}{-y}=\frac{dy}{x}=\frac{dz}{0}.$$

Daher kann hier

$$u\equiv x^2+y^2,\quad v\equiv z$$

gesetzt werden. Ferner ist hier, da $\xi\equiv -y,\ \eta\equiv x,\ \zeta\equiv 0$ ist, nach (17)

$$U'f\equiv -y\frac{\partial f}{\partial x}+x\frac{\partial f}{\partial y}-q\frac{\partial f}{\partial p}+p\frac{\partial f}{\partial q},$$

also das System (20):

$$\frac{dx}{-y}=\frac{dy}{x}=\frac{dz}{0}=\frac{dp}{-q}=\frac{dq}{p}.$$

Zwei Integrale dieses Systems sind $u\equiv x^2+y^2$, $v\equiv z$. Offenbar sind

$$w_1\equiv p^2+q^2,\quad w_2\equiv px+qy$$

zwei von einander und von u und v unabhängige Integrale. Ferner giebt es nur ∞^1 Elemente, die bei $U'f$ einzeln invariant bleiben, nämlich die Elemente, für die $x=y=p=q=0$ ist. Also folgt:

Die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, die bei der infinitesimalen Rotation um die z-Axe invariant bleiben, haben die allgemeine Form:

$$\Omega(x^2 + y^2,\ z,\ p^2 + q^2,\ px + qy) = 0.$$

Liegt eine continuierliche Schar von ∞^1 Punkttransformationen im Raume (x, y, z) vor:

$$(21)\qquad x_1 = X(x, y, z, a),\quad y_1 = Y(x, y, z, a),\quad z_1 = Z(x, y, z, a),$$

Gruppe von ∞^1 Trfn.

deren Parameter a ist, so sei mit T_a die zum Parameterwerte a gehörige Transformation der Schar bezeichnet. Alsdann bilden diese ∞^1 Transformationen T_a eine *Gruppe*, wenn die Aufeinanderfolge zweier beliebiger Transformationen T_a, T_b der Schar stets wieder einer Transformation T_c der Schar äquivalent ist (vgl. § 1 des 4. Kap., S. 90). Erweitert man die ∞^1 Transformationen T_a der Gruppe, so ist es klar, dass auch die Erweiterungen eine Gruppe bilden. Enthält die Gruppe der T_a die *infinitesimale Punkttransformation:*

Inf. Trf. d. Gruppe.

$$(22)\qquad \delta x = \xi(x, y, z)\,\delta t,\quad \delta y = \eta(x, y, z)\,\delta t,\quad \delta z = \zeta(x, y, z)\,\delta t,$$

so enthält die Erweiterung der Gruppe auch die infinitesimale Transformation in x, y, z, p, q, die durch Erweiterung dieser infinitesimalen Punkttransformation hervorgeht. Durch wiederholte Ausführung dieser Erweiterung der infinitesimalen Transformation kann man dann auch die Erweiterungen der endlichen Transformationen wieder erzeugen und damit die Erweiterung der vorgelegten Gruppe herstellen. Man vergleiche hierzu die Ausführungen auf S. 91. Die Gruppe (21) heisst eine *eingliedrige Gruppe.*

Eingliedr. Gruppe.

Es seien

$$(21')\qquad p_1 = P(x, y, z, p, q, a),\quad q_1 = Q(x, y, z, p, q, a)$$

die beiden Gleichungen, die durch die Erweiterung der allgemeinen Transformation T_a hinzutreten. Ferner sei die infinitesimale Transformation (22) in der im Text angegebenen Art erweitert, sodass zu (22) noch hinzutritt:

$$(22')\qquad \delta p = \pi(x, y, z, p, q)\,\delta t,\quad \delta q = \varkappa(x, y, z, p, q)\,\delta t.$$

Alsdann giebt, wie gesagt, die unendlich oftmalige Wiederholung der infinitesimalen Transformation in x, y, z, p, q, die durch (22) und (22′) dargestellt wird, die endliche Transformation (21), (21′). Den ausführlichen Nachweis hierfür übergehen wir. Die Sache ist jedenfalls begrifflich naheliegend.

Invar. Glg.

Eine Gleichung

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

oder, geometrisch ausgesprochen, eine Schar von ∞^4 Flächenelementen gestattet dann und nur dann alle endlichen Transformationen der eingliedrigen Gruppe (21), (21′), wenn sie die infinitesimale Transformation (22), (22′) dieser Gruppe gestattet. Dies beruht eben darauf, dass jede endliche Transformation der Gruppe durch unendlich oftmalige Wiederholung der infinitesimalen Transformation (22), (22′) entsteht.

Invar. Gleichgn.-System.

Entsprechend gestattet ein System von r Gleichungen ($r < 5$):

$$F_1(x, y, z, p, q) = 0,\ \cdots\ F_r(x, y, z, p, q) = 0$$

oder also eine Schar von ∞^{5-r} Elementen sämtliche Transformationen der eingliedrigen Gruppe (21), (21′) dann und nur dann, wenn sie die infinitesimale Transformation (22), (22′) zulässt, d. h. wenn das Gleichungensystem

$$\xi \frac{\partial F_i}{\partial x} + \eta \frac{\partial F_i}{\partial y} + \zeta \frac{\partial F_i}{\partial z} + \pi \frac{\partial F_i}{\partial p} + \varkappa \frac{\partial F_i}{\partial q} = 0$$
$$(i = 1 \cdots r)$$

vermöge $F_1 = 0, \cdots F_r = 0$ besteht.

Hieraus folgt weiter, wenn nicht jedes einzelne Element der Schar $F_1 = 0, \cdots F_r = 0$ für sich bei $U'f$ in Ruhe bleibt, dass diese invarianten Scharen analytisch durch eine oder mehrere Relationen zwischen den vier von einander unabhängigen Lösungen u, v, w_1, w_2 der linearen partiellen Differentialgleichung

$$U'f \equiv \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z} + \pi \frac{\partial f}{\partial p} + \varkappa \frac{\partial f}{\partial q} = 0$$

dargestellt wird. (Vgl. hierzu § 5 des 11. Kap., S. 516.)

Man kann beweisen, dass, sobald die beiden von p, q freien Lösungen u, v von $U'f = 0$ bekannt sind, die beiden anderen Lösungen w_1, w_2 durch Quadratur gefunden werden können. Dies wird nachher, S. 607, bewiesen werden.

Wenn wir in die infinitesimale Punkttransformation

$$Uf \equiv \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z}$$

oder

(23) $\delta x = \xi(x, y, z)\,\delta t, \quad \delta y = \eta(x, y, z)\,\delta t, \quad \delta z = \zeta(x, y, z)\,\delta t$

neue Veränderliche $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ einführen, die mit den ursprünglichen x, y, z durch die auch nach x, y, z auflösbaren Gleichungen: Neue Veränd. in inf. Trf.

(24) $\mathfrak{x} = \mathfrak{X}(x, y, z), \quad \mathfrak{y} = \mathfrak{Y}(x, y, z), \quad \mathfrak{z} = \mathfrak{Z}(x, y, z)$

verknüpft sind, so können wir dies so auffassen, als ob wir die Punkte (x, y, z) des Raumes auf ein neues Coordinatensystem $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ beziehen wollen. (Vgl. § 3 des 4. Kap., S. 114, sowie § 4 des 8. Kap., S. 335.) Nun erfahren $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ bei der infinitesimalen Transformation Uf oder (23) die Incremente:

$$\delta\mathfrak{x} = (\mathfrak{X}_x \xi + \mathfrak{X}_y \eta + \mathfrak{X}_z \zeta)\,\delta t,$$
$$\delta\mathfrak{y} = (\mathfrak{Y}_x \xi + \mathfrak{Y}_y \eta + \mathfrak{Y}_z \zeta)\,\delta t,$$
$$\delta\mathfrak{z} = (\mathfrak{Z}_x \xi + \mathfrak{Z}_y \eta + \mathfrak{Z}_z \zeta)\,\delta t,$$

die wir mit Hülfe des Symbols Uf wegen (24) auch so schreiben können:

$$\delta\mathfrak{x} = U\mathfrak{x} \cdot \delta t, \quad \delta\mathfrak{y} = U\mathfrak{y} \cdot \delta t, \quad \delta\mathfrak{z} = U\mathfrak{z} \cdot \delta t.$$

In den neuen Veränderlichen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ hat also die infinitesimale Punkttransformation das Symbol:

(25) $$\mathfrak{U}f = U\mathfrak{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} + U\mathfrak{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}} + U\mathfrak{z} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}.$$ Neues Symbol.

Sind nun $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ *insbesondere* die beiden oben (S. 600) erwähnten Lösungen von $Uf = 0$, d. h. zwei von einander unabhängige Functionen $\mathfrak{x}(x, y, z)$, $\mathfrak{y}(x, y, z)$, für die

$$U\mathfrak{x} \equiv \xi \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} + \eta \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial z} \equiv 0,$$
$$U\mathfrak{y} \equiv \xi \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x} + \eta \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial z} \equiv 0$$

ist, und ist $\mathfrak{z}$ eine Function von x, y, z, die der Gleichung

$$U\mathfrak{z} \equiv \xi \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x} + \eta \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z} \equiv 1$$

genügt, so sind $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ von einander unabhängig, da die Determinante der letzten drei Gleichungen von Null verschieden ist, weil in der letzten Gleichung rechts Eins steht. Wir können daher diese Functionen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ als die neuen Veränderlichen anstelle von x, y, z benutzen.

Die wirkliche Bestimmung der Functionen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ erfordert die Integration der Gleichung $Uf = 0$ oder des äquivalenten Systems von zwei simultanen gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta}.$$

Hat man aber $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ bestimmt, so erfordert die Bestimmung von $\mathfrak{z}$ nur eine Quadratur. In der That, da $U\mathfrak{z} \equiv 1$ sein soll, so muss $\mathfrak{z}$ so als Function von x, y, z bestimmt werden, dass

(26) $$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta} = d\mathfrak{z}$$

wird. Nun sind

$$\mathfrak{x}(x, y, z) = a, \qquad \mathfrak{y}(x, y, z) = b$$

nach Voraussetzung bekannte Integrale dieses Systems. Vermöge derselben können wir etwa x, y als Functionen von z und den beiden Constanten a, b in das System (26) einführen. Insbesondere reduciert sich dann die letzte Gleichung

$$\frac{dz}{\zeta} = d\mathfrak{z},$$

da ζ von $\mathfrak{z}$ frei ist, auf eine Gleichung von der Form:

$$\varphi(z, a, b)\, dz = d\mathfrak{z}$$

und hieraus folgt:

$$\mathfrak{z} = \int \varphi(z, a, b)\, dz.$$

Führt man die Quadratur aus und setzt alsdann für a, b wieder ihre Werte $\mathfrak{x}(x, y, z)$, $\mathfrak{y}(x, y, z)$ ein, so hat man die gesuchte Function $\mathfrak{z}(x, y, z)$ gefunden. Dies Ergebnis entspricht einem analogen Satz in § 2 des 4. Kap., S. 105.

Wir wollen nun $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$, für die

$$U\mathfrak{x} \equiv 0, \qquad U\mathfrak{y} \equiv 0, \qquad U\mathfrak{z} \equiv 1$$

ist, als neue Veränderliche in die infinitesimale Transformation Uf einführen. Nach (25) lautet das Symbol $\mathfrak{U}f$ der hervorgehenden infinitesimalen Transformation einfach so:

$$\mathfrak{U}f \equiv \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}.$$

Es ist also

$$\delta \mathfrak{x} = 0, \quad \delta \mathfrak{y} = 0, \quad \delta \mathfrak{z} = \delta t$$

die gesuchte infinitesimale Transformation. Sind $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ Cartesische Punktcoordinaten, so ist dies eine *infinitesimale Translation.* Hiermit ist der einfache, aber wichtige Satz bewiesen:

Satz 2: *Jede infinitesimale Punkttransformation in x, y, z:* Reduct. auf inf. Translat.

$$Uf \equiv \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z}$$

lässt sich durch Einführung passender neuer Veränderlicher $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ auf die Form einer infinitesimalen Translation

$$\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$$

bringen.

Dieser Satz ist analog dem Satz 11, § 4 des 4. Kap., S. 120, über die Reduction einer infinitesimalen Berührungstransformation der Ebene auf eine infinitesimale Translation durch Einführung neuer Veränderlicher vermöge einer Berührungstransformation.

Liegt nun eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung Part. Diffgl., die Uf gestattet.

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

vor, die eine infinitesimale Punkttransformation

$$Uf \equiv \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z}$$

gestattet, so können wir uns vorstellen, dass wir in Uf und in $F = 0$ Neue Veränderl. anstelle von x, y, z die soeben besprochenen neuen Veränderlichen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ einführen, wodurch Uf in

$$\mathfrak{U}f \equiv \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$$

übergeht. Die Einführung der neuen Veränderlichen kann, wie gesagt, so aufgefasst werden, als ob wir die Punkte (x, y, z) des Raumes auf ein neues Coordinatensystem $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ beziehen, wobei also die Punkte selbst und damit auch die Flächenelemente nicht geändert werden. Wie sich die Coordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ des Flächenelementes (x, y, z, p, q) im neuen System durch die ursprünglichen Coordinaten x, y, z, p, q ausdrücken, lehren die Gleichungen (24), die $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ als Functionen von x, y, z geben, sowie die beiden Gleichungen, die durch Erweiterung der Transformation (24) in der in § 5 des 12. Kap., S. 577, Formeln (80), gelehrten Weise zu ihnen hinzutreten. Wenn wir nun die alten Coordinaten x, y, z, p, q umgekehrt durch die neuen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ ausdrücken, so können wir durch Substitution dieser Werte in $F = 0$ sofort auch die alte partielle Differentialgleichung $F = 0$ im neuen Coordinatensystem darstellen. Wir gelangen dadurch zu einer partiellen Differentialgleichung:

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = 0.$$

Bei unserer Auffassung der Einführung der neuen Coordinaten ist es klar, dass $\mathfrak{F} = 0$ genau dieselben ∞^4 Elemente definiert wie $F = 0$, nur eben ausgedrückt in einem anderen Coordinatensystem. Da nun $F = 0$ die infinitesimale Punkttransformation Uf gestattet, so folgt, dass $\mathfrak{F} = 0$ die infinitesimale Punkttransformation

$$\mathfrak{U}f \equiv \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$$

gestattet.

In § 1, S. 588, fanden wir nun, dass eine partielle Differentialgleichung

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = 0$$

nur dann die infinitesimale Transformation $\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$ gestattet, wenn $\mathfrak{F} = 0$ *frei von* $\mathfrak{z}$ ist. Dies können wir auch direct analytisch bestätigen, da die Erweiterung von $\mathfrak{U}f$ nach den Formeln (17) auf S. 598 ebenfalls die Form

$$\mathfrak{U}'f \equiv \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$$

hat und also $\mathfrak{F} = 0$ eine Integralgleichung des Systems

$$\frac{d\mathfrak{x}}{0} = \frac{d\mathfrak{y}}{0} = \frac{d\mathfrak{z}}{1} = \frac{d\mathfrak{p}}{0} = \frac{d\mathfrak{q}}{0}$$

sein muss, von dem $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ vier Integrale sind.

Die Bestimmung von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ erforderte, wie hervorgehoben wurde, die Integration der Gleichung $Uf = 0$ oder des äquivalenten Systems:

(27) $$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta}.$$

Die infinitesimale Transformation Uf erteilt jedem Punkt (x, y, z) des Raumes eine Fortschreitungsrichtung $(\delta x : \delta y : \delta z)$, nämlich die Richtung $(\xi : \eta : \zeta)$. Die Curven nun, die in jedem ihrer Punkte diese zugeordnete Richtung zur Tangente haben, sind also die, längs deren sich die Punkte bei der infinitesimalen Transformation Uf bewegen. Wir nennen sie die *Bahncurven der infinitesimalen Transformation* Uf. Andererseits sind sie nach § 1 des 11. Kap., S. 486, gerade die Integralcurven des Systems (27). Da aber $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ die Integrale von (27) sind, so stellen Bahncurven

$$\mathfrak{x} = \text{Const.}, \qquad \mathfrak{y} = \text{Const.}$$

die Bahncurven dar. Mithin folgt: Sobald die ∞^2 Bahncurven der infinitesimalen Punkttransformation Uf bekannt sind, kennt man auch die beiden Functionen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$. Dann bestimmt sich $\mathfrak{z}$ nach dem Obigen (S. 604) durch eine Quadratur.

Das Ergebnis unserer Betrachtungen wird daher durch den folgenden Satz ausgedrückt:

Satz 3: *Liegt eine infinitesimale Punkttransformation Uf im Raume (x, y, z) vor, deren ∞^2 Bahncurven bekannt sind, so ist es immer möglich, durch Quadratur und ausführbare Operationen solche neue Veränderliche $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ einzuführen, dass Uf die Form* Ergebnis.

$$\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$$

annimmt. Gleichzeitig nimmt jede partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

die Uf gestattet, die von $\mathfrak{z}$ freie Form

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = 0$$

an.

Mit dem Vorhergehenden ist auch gezeigt, *dass man die homogene lineare partielle Differentialgleichung $U'f = 0$ oder das äquivalente System* Integr. v. $U'f = 0$.

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta} = \frac{dp}{\pi} = \frac{dq}{\varkappa}$$

durch eine Quadratur vollständig integrieren kann, sobald man die von p, q freie Gleichung $Uf = 0$ oder das zugehörige System

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta}$$

integriert hat. Denn wenn wir wieder unter $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ unabhängige Integrale dieses letzteren Systems verstehen und dann $\mathfrak{z}$ wie oben durch eine Quadratur so bestimmen, dass $U\mathfrak{z} \equiv 1$ wird, so nimmt Uf die Form

$$\mathfrak{U}f \equiv \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$$

an, und $\mathfrak{U}'f$ hat, wie gesagt, genau dieselbe Form. Hier ist also das der Gleichung $\mathfrak{U}'f = 0$ äquivalente System das folgende:

$$\frac{d\mathfrak{x}}{0} = \frac{d\mathfrak{y}}{0} = \frac{d\mathfrak{z}}{1} = \frac{d\mathfrak{p}}{0} = \frac{d\mathfrak{q}}{0}.$$

Seine Integrale sind $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}$. Dabei ist $\mathfrak{p} = \frac{d\mathfrak{z}}{d\mathfrak{x}}$, $\mathfrak{q} = \frac{d\mathfrak{z}}{d\mathfrak{y}}$. Da aber $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ als Functionen von x, y, z bekannt sind, so sind hiernach auch die beiden Integrale $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ bekannte Functionen von x, y, z, p, q. Es ist selbstverständlich, dass $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ auch Lösungen von $U'f = 0$ sind, denn $U'f$ geht ja durch Einführung von $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ als neues Coordinatensystem gerade in $\mathfrak{U}'f$ über.

Weitere Reduct. d. Integration. Nehmen wir wiederum an, die vorgelegte partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

gestatte die bekannte infinitesimale Punkttransformation

$$Uf \equiv \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z},$$

und es seien ferner die ∞^2 Bahncurven

$$\mathfrak{x}(x, y, z) = \text{Const.}, \qquad \mathfrak{y}(x, y, z) = \text{Const.}$$

von Uf bekannt. Wir haben gesehen, dass es dann durch eine Quadratur gelingt, $\mathfrak{z}(x, y, z)$ so zu bestimmen, dass die vorgelegte partielle Differentialgleichung $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ die von $\mathfrak{z}$ freie Form:

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = 0$$

annimmt. *Hiermit ist das Integrationsproblem der Gleichung $F = 0$ erheblich erleichtert.* Denn das System von vier simultanen gewöhnlichen Differentialgleichungen, das die charakteristischen Streifen bestimmt (vgl. § 2 des 12. Kap., Formel (42), S. 553), nimmt hier die Form an:

$$\frac{d\mathfrak{x}}{\mathfrak{F}_\mathfrak{p}} = \frac{d\mathfrak{y}}{\mathfrak{F}_\mathfrak{q}} = \frac{d\mathfrak{z}}{\mathfrak{p}\mathfrak{F}_\mathfrak{p} + \mathfrak{q}\mathfrak{F}_\mathfrak{q}} = \frac{d\mathfrak{p}}{-\mathfrak{F}_\mathfrak{x}} = \frac{d\mathfrak{q}}{-\mathfrak{F}_\mathfrak{y}}.$$

Zunächst lässt sich hieraus etwa $\mathfrak{q}$ und $d\mathfrak{q}$ dadurch fortschaffen, dass man $\mathfrak{q}$ aus $\mathfrak{F} = 0$ als Function von $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p}$ berechnet und einsetzt. In dem dann verbleibenden System, das wir so schreiben:

$$\frac{d\mathfrak{x}}{\mathfrak{F}_\mathfrak{p}} = \frac{d\mathfrak{y}}{\mathfrak{F}_\mathfrak{q}} = \frac{d\mathfrak{p}}{-\mathfrak{F}_\mathfrak{x}} = \frac{d\mathfrak{z}}{\mathfrak{p}\mathfrak{F}_\mathfrak{p} + \mathfrak{q}\mathfrak{F}_\mathfrak{q}},$$

in dem also immer $\mathfrak{q}$ als Function von $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p}$ aufzufassen ist, tritt $\mathfrak{z}$ in den ersten drei Gliedern gar nicht auf. Demnach kann man sich zunächst auf das System von *zwei* gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{d\mathfrak{x}}{\mathfrak{F}_\mathfrak{p}} = \frac{d\mathfrak{y}}{\mathfrak{F}_\mathfrak{q}} = \frac{d\mathfrak{p}}{-\mathfrak{F}_\mathfrak{x}}$$

in $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p}$ allein beschränken. Sind $\lambda(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p})$ und $\mu(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p})$ zwei von einander unabhängige Integrale des letzteren Systems, so eliminiert man etwa $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{p}$ aus dem vorhergehenden System vermöge $\lambda = a$, $\mu = b$ und bestimmt $\mathfrak{z}$ als Function von $\mathfrak{x}$ und von den beiden Constanten a, b durch eine Quadratur. Setzt man alsdann für a und b wieder λ und μ ein, so ist das System in $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{z}$ vollständig integriert. Damit sind also auch die charakteristischen Streifen bestimmt.

Da die neue Differentialgleichung

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = 0$$

die infinitesimale Transformation $\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$ gestattet, so liegt hier dasselbe analytische Problem vor, das wir in § 1, S. 588, in geometrischer Einkleidung erwähnten. Die damaligen analytischen Ergebnisse können wir daher auf den jetzigen Fall übertragen. Unsere Differentialgleichung $\mathfrak{F} = 0$ hat hiernach ∞^1 solche Integralflächen, die durch Gleichungen zwischen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ allein dargestellt werden und von denen jede vermöge $\mathfrak{U}f$ in sich übergeht, indem jede von ∞^1 Bahncurven der infinitesimalen Transformation $\mathfrak{U}f$ erzeugt wird. Kehren wir zu den ursprünglichen Coordinaten x, y, z zurück, so sehen wir, dass die partielle Differentialgleichung

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

unter anderen ∞^1 solche Integralflächen besitzt, die durch eine Gleichung zwischen $\mathfrak{x}(x, y, z)$ und $\mathfrak{y}(x, y, z)$ dargestellt werden, wobei $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die Integrale des Systems

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta}$$

sind. Diese ∞^1 Flächen sind daher von Bahncurven $\mathfrak{x} = \text{Const.}$, $\mathfrak{y} = \text{Const.}$ der infinitesimalen Transformation Uf erzeugt und gehören zu den Integralflächen der linearen homogenen partiellen Differentialgleichung

$$Uf \equiv \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Schreiben wir eine Integralfläche dieser Gleichung in der Form $z = \varphi(x, y)$, so genügt sie der äquivalenten linearen partiellen Differentialgleichung (vgl. § 1 des 11. Kap.):

$$\xi p + \eta q - \zeta = 0.$$

Also folgt, dass die vorgelegte partielle Differentialgleichung $F = 0$ mit dieser linearen partiellen Differentialgleichung ∞^1 Integralflächen gemein hat und somit nach Satz 16, § 4 des 12. Kap., S. 568, mit ihr in *Involution* liegt. **Invol. mit $\xi p + \eta q = \zeta$.**

Wir können dies Ergebnis auch *direct* ableiten:

Die partielle Differentialgleichung erster Ordnung **Zweiter Beweis f. d. Invol.**

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

gestattet die infinitesimale Punkttransformation

$$Uf \equiv \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z}$$

dann und nur dann, wenn

$$U'F = 0$$

ist vermöge $F = 0$ (vgl. S. 600).

Es ist andererseits nach Formel (61), § 4 des 12. Kap., S. 566, da ξ, η, ζ frei von p, q sind:

$$\begin{aligned}[F, \xi p + \eta q - \zeta] \equiv F_p\{\xi_x p + \eta_x q - \zeta_x + p(\xi_z p + \eta_z q - \zeta_z)\} + \\ + F_q\{\xi_y p + \eta_y q - \zeta_y + q(\xi_z p + \eta_z q - \zeta_z)\} - \\ - (F_x + pF_z)\xi - (F_y + qF_z)\eta.\end{aligned}$$

Nach den Formeln (17) auf S. 598 sind die in den beiden geschweiften Klammern stehenden Ausdrücke gleich $-\pi$ und $-\varkappa$, sodass kommt:

$$\begin{aligned}[F, \xi p + \eta q - \zeta] &\equiv -\xi F_x - \eta F_y - (\xi p + \eta q)F_z - \pi F_p - \varkappa F_q \\ &\equiv -(\xi p + \eta q - \zeta)F_z - \{\xi F_x + \eta F_y + \zeta F_z + \pi F_p + \varkappa F_q\}.\end{aligned}$$

Der in der geschweiften Klammer stehende Ausdruck ist nichts anderes als $U'F$. Also hat sich ergeben:

$$(28) \qquad [F, \xi p + \eta q - \zeta] \equiv -(\xi p + \eta q - \zeta)F_z - U'F.$$

Der erste Ausdruck rechts verschwindet infolge von $\xi p + \eta q - \zeta = 0$. Sobald $F=0$ die infinitesimale Transformation Uf gestattet, also $U'F = 0$ infolge von $F = 0$ ist, zeigt diese Formel (28), dass die Gleichungen

$$F = 0, \quad \xi p + \eta q - \zeta = 0$$

in Involution liegen, also auch nach Satz 16, § 4 des 12. Kap., S. 568, mit einander ∞^1 Integralgebilde gemein haben.

Der folgende Satz ist hiermit auf zwei Wegen bewiesen:

Satz 4: *Gestattet die partielle Differentialgleichung erster Ordnung*

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

die infinitesimale Punkttransformation

$$\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z},$$

so liegt sie mit der linearen partiellen Differentialgleichung

$$\xi p + \eta q - \zeta = 0$$

in Involution nnd hat also mit ihr ∞^1 Integralgebilde gemein.

Einige Beispiele hierzu haben wir schon im ersten Paragraphen besprochen. Hier wollen wir ein anderes interessantes Beispiel betrachten.

Beispiel. **Beispiel:** Wir wollen uns vorerst die Aufgabe stellen, *alle Liniencomplexe zu bestimmen, die eine infinitesimale Rotation um die z-Axe* *gestatten*, die also so beschaffen sind, dass jede Complexgerade vermöge der infinitesimalen Rotation, die ja überhaupt jede Gerade in eine Gerade verwandelt, wieder in eine Complexgerade übergeht. Das Symbol der infinitesimalen Rotation ist: Complex, d. eine inf Rotat. gestattet

$$-y\frac{\partial f}{\partial x}+x\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Die Gerade mit den Liniencoordinaten r, s, ϱ, σ:

$$x = rz+\varrho, \quad y = sz+\sigma \tag{29}$$

wird durch die Rotation in eine unendlich benachbarte Gerade verwandelt, deren Liniencoordinaten $r+\delta r$, $s+\delta s$, $\varrho+\delta\varrho$, $\sigma+\delta\sigma$ seien. Dann muss:

$$\delta x = r\delta z + z\delta r + \delta\varrho, \quad \delta y = s\delta z + z\delta s + \delta\sigma$$

oder also, da hier $\delta x = -y\delta t$, $\delta y = x\delta t$, $\delta z = 0$ ist:

$$-y\delta t = z\delta r + \delta\varrho, \quad x\delta t = z\delta s + \delta\sigma$$

sein. Setzen wir hierin wieder $x = rz+\varrho$, $y = sz+\sigma$ ein, so lauten die Gleichungen:

$$-(sz+\sigma)\delta t = z\delta r + \delta\varrho, \quad (rz+\varrho)\delta t = z\delta s + \delta\sigma.$$

Da z längs der Geraden (29) willkürlich ist, so folgt hieraus einzeln:

$$\delta r = -s\delta t, \quad \delta s = r\delta t,$$
$$\delta\varrho = -\sigma\delta t, \quad \delta\sigma = \varrho\delta t.$$

Ein Liniencomplex, also eine Schar von ∞^3 Geraden (r, s, ϱ, σ), die etwa durch

$$\psi(r, s, \varrho, \sigma) = 0$$

dargestellt wird, gestattet die infinitesimale Rotation um die z-Axe, wenn

$$\psi_r\delta r + \psi_s\delta s + \psi_\varrho\delta\varrho + \psi_\sigma\delta\sigma = 0$$

oder also

$$-s\psi_r + r\psi_s - \sigma\psi_\varrho + \varrho\psi_\sigma = 0$$

infolge von $\psi = 0$ ist. Dies kann offenbar nicht so eintreten, dass jede einzelne Gerade (r, s, ϱ, σ) des Complexes für sich bei der Rotation fest bleibt, weil keine ∞^3 derartige Geraden vorhanden sind, sondern nur so, dass jede Gerade des Complexes in eine andere Gerade des Complexes übergeht. Demnach ergiebt sich der allgemeinste Liniencomplex von der gesuchten Art durch Nullsetzen einer Lösung der homogenen linearen partiellen Differentialgleichung:

$$-s\frac{\partial\psi}{\partial r} + r\frac{\partial\psi}{\partial s} - \sigma\frac{\partial\psi}{\partial\varrho} + \varrho\frac{\partial\psi}{\partial\sigma} = 0.$$

Integration giebt sofort als den gesuchten allgemeinsten Liniencomplex, der eine infinitesimale Rotation um die z-Axe gestattet, diesen: Allg. Form d. Complexes.

$$\Psi(r^2+s^2,\ \varrho^2+\sigma^2,\ s\varrho - r\sigma) = 0.$$

Dieser Complex ordnet jedem Punkt einen Complexkegel zu. Fassen wir diesen Kegel als Elementarkegel auf, so bestimmt der Complex eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung (nach Satz 3, § 1 des 7. Kap., S. 260), und zwar sind die Charakteristiken der Differentialgleichung Haupttangentencurven auf den Integralflächen (nach Satz 26, § 5 des 7. Kap., S. 308). Es ist klar, dass die infinitesimale Rotation um die z-Axe jeden Elementarkegel in einen Elementarkegel überführt, d. h. *dass die fragliche partielle Differentialgleichung erster Ordnung die infinitesimale Rotation um die z-Axe gestattet.* Sie ordnet sich daher der auf S. 602 bestimmten allgemeinen Form unter. Dies lässt sich auch analytisch verificieren.

Zugeh. Diffgln.

Unter den Liniencomplexen, die eine infinitesimale Rotation um die z-Axe gestatten und die sich nach den Formeln (38) und (40) des § 3, 7. Kap., S. 283, 284, auch so schreiben lassen:

$$(30) \quad \Psi\left(\frac{dx^2+dy^2}{dz^2},\ \frac{(xdz-zdx)^2+(ydz-zdy)^2}{dz^2},\ \frac{xdy-ydx}{dz}\right)=0,$$

giebt es ∞^4, die *vom zweiten Grade* sind, nämlich die folgenden:

$$A(dx^2+dy^2)+B\{(xdz-zdx)^2+(ydz-zdy)^2\}+C(xdy-ydx)^2+ \\ +D(xdy-ydx)dz+Edz^2=0.$$

Unter diesen ∞^4 Complexen giebt es wieder ∞^3 *tetraedrale* Complexe. Dies kann man von vornherein daraus schliessen, dass es ∞^2 Tetraeder giebt, deren Ecken bei der infinitesimalen Rotation um die z-Axe invariant bleiben, sowie daraus, dass eine Gerade vermöge der projectiven Transformationen, die ein solches Tetraeder fest lassen und zu denen jene Rotation gehört, in die Geraden eines tetraedralen Complexes übergeführt wird, nach Satz 1, § 1 des 8. Kap., S. 317. Dass in der That ∞^2 invariante Tetraeder vorhanden sind, folgt daraus, dass die Rotationen um die z-Axe die imaginären Kreispunkte in der (xy)-Ebene sowie alle Punkte der z-Axe invariant lassen. Als die Ecken eines derartigen Tetraeders kann man daher die beiden Kreispunkte und zwei beliebige Punkte der z-Axe wählen. Zu diesem Tetraeder gehören ∞^1 tetraedrale Complexe (S. 311, § 1 des 8. Kap.). Unter den ∞^4 Complexen zweiten Grades (30) sind also in der That gerade ∞^3 tetraedrale Complexe vorhanden. Die zu diesen ∞^3 tetraedalen Complexen gehörigen ∞^3 partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung gestatten sämtlich die infinitesimale Rotation um die z-Axe.

§ 3. Partielle Differentialgleichungen 1. O., die zwei vertauschbare infinitesimale Transformationen gestatten.

Nunmehr wenden wir uns zu den Integrationsvereinfachungen, die sich ermöglichen lassen, sobald die vorgelegte partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

zwei bekannte und von einander unabhängige infinitesimale Punkttransformationen gestattet. Es seien

$$U_1 f \equiv \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_1 \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$U_2 f \equiv \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_2 \frac{\partial f}{\partial z}$$

die Symbole dieser beiden infinitesimalen Transformationen. Dass wir voraussetzen, dass $U_2 f$ von $U_1 f$ unabhängig sei, hat darin seinen Grund, dass mit $U_1 f$ an sich auch jede infinitesimale Transformation Const. $U_1 f$ die Gleichung $F = 0$ invariant lässt.

Es sind *zwei verschiedene Fälle* denkbar, die getrennt behandelt werden sollen: Wie wir wissen, sind die Bahncurven von $U_1 f$ bez. $U_2 f$ die Integralcurven des Systems (vgl. § 2, S. 607): **Zwei Fälle.**

$$\frac{dx}{\xi_1} = \frac{dy}{\eta_1} = \frac{dz}{\zeta_1}$$

bez. des Systems:

$$\frac{dx}{\xi_2} = \frac{dy}{\eta_2} = \frac{dz}{\zeta_2}.$$

Entweder fallen die ∞^2 Bahncurven von $U_1 f$ mit den ∞^2 Bahncurven von $U_2 f$ zusammen oder nicht. Der erstere Fall tritt dann und nur dann ein, wenn die beiden soeben angegebenen Systeme sich nicht wesentlich von einander unterscheiden, d. h. wenn die Verhältnisse von ξ_1, η_1, ζ_1 dieselben wie die von ξ_2, η_2, ζ_2 sind. In diesem Falle unterscheiden sich ξ_2, η_2, ζ_2 nur um einen gemeinsamen Factor ϱ von ξ_1, η_1, ζ_1, d. h. in diesem Falle hat $U_2 f$ die Form: **Gemeinsame Bahncurven.**

$$U_2 f \equiv \varrho U_1 f.$$

Die Grösse ϱ ist dabei eine Function von x, y, z und nicht bloss eine Constante, da sonst $U_2 f$ von $U_1 f$ abhängig wäre.

Fassen wir zunächst den Fall *gleicher* Bahncurven ins Auge. Es mögen dabei $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ drei solche neue Veränderliche, also von einander unabhängige Functionen von x, y, z sein, in denen $U_1 f$ nach Satz 2 des § 2, S. 605, die Form

$$\mathfrak{U}_1 f \equiv \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$$

annimmt. Es ist klar, dass $U_2 f$ in den neuen Veränderlichen dann und nur dann, wenn $U_1 f$ und $U_2 f$ die Bahncurven mit einander gemein haben, die Form

$$\mathfrak{U}_2 f \equiv \varrho \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$$

erhält, in der ϱ die Function von $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ bedeutet, die aus der obigen Function ϱ von x, y, z durch Einführung der neuen Veränderlichen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ hervorgeht.

Zwei von einander unabhängige infinitesimale Punkttransformationen $U_1 f$ und $U_2 f$ im Raume (x, y, z) lassen sich mithin dann und nur dann durch Einführung passender neuer Veränderlicher $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ *gleichzeitig* auf die Form

$$U_1 f = \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}, \qquad U_2 f = \varrho \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}} \qquad (\varrho \neq \text{Const.})$$

bringen, wenn $U_1 f$ und $U_2 f$ dieselben Bahncurven haben.

Kanon. Veränderl. Diese Veränderlichen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ nennen wir hier *kanonische* Veränderliche. Die partielle Differentialgleichung erster Ordnung $F = 0$, die $U_1 f$ und $U_2 f$ gestattet, möge in den neuen Veränderlichen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ die Form

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = 0$$

haben. Alsdann muss $\mathfrak{F} = 0$ nach Voraussetzung die beiden infinitesimalen Punkttransformationen

$$\mathfrak{U}_1 f \equiv \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}, \qquad \mathfrak{U}_2 f \equiv \varrho(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$$

gestatten. Wie in Satz 3, § 2, S. 607, erkennen wir aus der Form von $\mathfrak{U}_1 f$, dass $\mathfrak{F} = 0$ frei von $\mathfrak{z}$ ist, d. h. die Form hat:

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = 0.$$

Da ferner die Erweiterung von $\mathfrak{U}_2 f$ nach (17), § 2, S. 598, ergiebt:

$$\mathfrak{U}_2' f \equiv \varrho \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}} + (\varrho_{\mathfrak{x}} + \mathfrak{p} \varrho_{\mathfrak{z}}) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{p}} + (\varrho_{\mathfrak{y}} + \mathfrak{q} \varrho_{\mathfrak{z}}) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{q}},$$

so muss, weil $\mathfrak{F} = 0$ auch $\mathfrak{U}_2' f$ gestatten soll, nach (19), § 2, S. 600, auch

$$(\varrho_{\mathfrak{x}} + \mathfrak{p} \varrho_{\mathfrak{z}}) \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{p}} + (\varrho_{\mathfrak{y}} + \mathfrak{q} \varrho_{\mathfrak{z}}) \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{q}} = 0$$

sein infolge von $\mathfrak{F} = 0$. Ist ϱ nicht frei von $\mathfrak{z}$, so hat also $\mathfrak{F} = 0$ die Form:

$$\frac{(\varrho_{\mathfrak{x}} + \mathfrak{p} \varrho_{\mathfrak{z}})}{(\varrho_{\mathfrak{y}} + \mathfrak{q} \varrho_{\mathfrak{z}})} - \omega(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = 0$$

und $\mathfrak{z}$ tritt hierin nur scheinbar auf. Wenn $\varrho_{\mathfrak{z}} \equiv 0$ ist, so hat $\mathfrak{F} = 0$ die Form

$$\varrho_{\mathfrak{y}} \mathfrak{p} - \varrho_{\mathfrak{x}} \mathfrak{q} - \omega(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0.$$

$\mathfrak{F} = 0$ ist also jedenfalls linear in $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$. Daraus folgt, dass auch die ursprüngliche partielle Differentialgleichung $F = 0$, die ja rückwärts durch Einführung von x, y, z, also vermöge einer Punkttransformation, hervorgeht, linear in p, q sein muss, nach Satz 21, § 5 des 12. Kap., S. 580.

Hiermit hat sich ergeben:

Satz 5: *Wenn eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung* Lineare p. Diffgl.

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

im Raume (x, y, z) *zwei von einander unabhängige infinitesimale Punkttransformationen mit denselben Bahncurven gestattet, so ist sie in* p, q *linear.*

Wir wollen von jetzt ab von den *linearen* partiellen Differentialgleichungen völlig absehen. Für diese lassen sich zwar analoge Integrationstheorien ableiten, wie wir sie in der Folge für die nicht linearen entwickeln. Da wir aber in diesem Kapitel doch nur Beispiele und keine erschöpfende Theorie vortragen wollen, so erscheint es uns angebracht, *uns hier auf die nicht linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zu beschränken.*

Aus dem Satze 5 folgt dann, dass wir immer vorauszusetzen haben, *dass* $U_1 f$ *und* $U_2 f$ *verschiedene Bahncurven haben.*

Aber es sind auch jetzt noch zwei Fälle von einander zu trennen. Im gegenwärtigen Paragraphen behandeln wir den einen, im nächsten Paragraphen den anderen Fall.

Der Fall, den wir hier in diesem Paragraphen erledigen wollen, ist der, *dass die nicht lineare partielle Differentialgleichung*

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

zwei vertauschbare und von einander unabhängige infinitesimale Punkttransformationen $U_1 f$ *und* $U_2 f$ *gestatte.* In Analogie mit § 5 des 4. Kap., S. 125, möge nämlich die Redeweise eingeführt werden, dass zwei infinitesimale Transformationen $U_1 f$ und $U_2 f$ in x, y, z *vertauschbar* seien, wenn der Klammerausdruck (siehe § 2, S. 597), also der Ausdruck Vertauschb. inf. Trfn.

$$U_1(U_2 f) - U_2(U_1 f) \equiv 0 \tag{31}$$

ist für alle Werte der Veränderlichen x, y, z und für alle Functionen f von x, y, z. Der begriffliche Grund für diese Bezeichnung spielt hier nicht weiter ein, und wir unterlassen es daher, hierauf weiter einzugehen.

Nach Satz 2 des § 2, S. 605, giebt es nun solche drei von einander unabhängige Functionen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ von x, y, z, bei deren Verwertung als neuer Veränderlicher $U_1 f$ die Form Neue Veränderl.

$$\mathfrak{U}_1 f \equiv \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} \tag{32}$$

erhält. In jenem Satz hatten wir zwar die Form $\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$ hergestellt, aber es ist klar, dass die Vertauschung von $\mathfrak{x}$ mit $\mathfrak{z}$ die vorliegende Form ergiebt. In den neuen Veränderlichen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ wird $U_2 f$ eine neue Form

$$(33) \qquad \mathfrak{U}_2 f \equiv \xi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} + \eta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}} + \zeta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$$

annehmen. Wie in § 5 des 4. Kap., S. 124, bei Gelegenheit des Klammerausdruckes infinitesimaler Berührungstransformationen (vgl. daselbst Formel (59′)) erhellt auch hier, dass der Klammerausdruck von $U_1 f$ und $U_2 f$ bei Einführung der neuen Veränderlichen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ in den Klammerausdruck von $\mathfrak{U}_1 f$ und $\mathfrak{U}_2 f$ übergeht, also nach (31) auch

$$\mathfrak{U}_1(\mathfrak{U}_2 f) - \mathfrak{U}_2(\mathfrak{U}_1 f) \equiv 0$$

ist. Nach (32) und (33) kommt somit:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \mathfrak{x}} \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} + \frac{\partial \eta}{\partial \mathfrak{x}} \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}} + \frac{\partial \zeta}{\partial \mathfrak{x}} \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}} \equiv 0,$$

d. h. *die Coefficienten* ξ, η, ζ *in* $\mathfrak{U}_2 f$ *sind frei von* $\mathfrak{x}$. Weil $U_1 f$ und $U_2 f$ verschiedene Bahncurven haben, darf $\mathfrak{U}_2 f$ nach S. 613 *nicht* die Form $\xi \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}}$ haben. Daher sind η und ζ nicht beide identisch gleich Null. Es giebt nun zwei von einander unabhängige Functionen $\bar{\mathfrak{y}}$ und $\bar{\mathfrak{z}}$ von $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$, für die

$$(34) \qquad \begin{cases} \eta(\mathfrak{y}, \mathfrak{z}) \dfrac{\partial \bar{\mathfrak{y}}}{\partial \mathfrak{y}} + \zeta(\mathfrak{y}, \mathfrak{z}) \dfrac{\partial \bar{\mathfrak{y}}}{\partial \mathfrak{z}} = 1, \\ \eta(\mathfrak{y}, \mathfrak{z}) \dfrac{\partial \bar{\mathfrak{z}}}{\partial \mathfrak{y}} + \zeta(\mathfrak{y}, \mathfrak{z}) \dfrac{\partial \bar{\mathfrak{z}}}{\partial \mathfrak{z}} = 0 \end{cases}$$

ist. In den Grössen $\mathfrak{x}, \bar{\mathfrak{y}}, \bar{\mathfrak{z}}$, die ja von einander unabhängig sind und deshalb als neue Veränderliche nunmehr benutzt werden dürfen, hat $\mathfrak{U}_1 f$ nach wie vor die Form $\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}}$, während $\mathfrak{U}_2 f$ nach der Formel (25) des § 2, S. 603, übergeht in:

$$\mathfrak{U}_2 \mathfrak{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} + \mathfrak{U}_2 \bar{\mathfrak{y}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{\mathfrak{y}}} + \mathfrak{U}_2 \bar{\mathfrak{z}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{\mathfrak{z}}}.$$

Es sind aber $\mathfrak{U}_2 \bar{\mathfrak{y}}$ und $\mathfrak{U}_2 \bar{\mathfrak{z}}$, da $\bar{\mathfrak{y}}$ und $\bar{\mathfrak{z}}$ frei von $\mathfrak{x}$ sind, gerade die linken Seiten von (34), sodass also $\mathfrak{U}_2 f$ in

$$\mathfrak{U}_2 \mathfrak{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} + \frac{\partial f}{\partial \bar{\mathfrak{y}}}$$

übergeht. Es ist $\mathfrak{U}_2 \mathfrak{x} \equiv \xi(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})$, und hierin sind $\mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ durch $\bar{\mathfrak{y}}, \bar{\mathfrak{z}}$ auszudrücken. In den Veränderlichen $\mathfrak{x}, \bar{\mathfrak{y}}, \bar{\mathfrak{z}}$ haben $U_1 f$ und $U_2 f$ somit die Form:

$$U_1 f = \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}}, \qquad U_2 f = \alpha(\bar{\mathfrak{y}}, \bar{\mathfrak{z}}) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} + \frac{\partial f}{\partial \bar{\mathfrak{y}}}.$$

Nunmehr setzen wir

$$\bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} + \omega(\bar{\mathfrak{y}}, \bar{\mathfrak{z}}),$$

wobei wir uns die Wahl der Function ω vorbehalten. Da $\bar{\mathfrak{x}}, \bar{\mathfrak{y}}, \bar{\mathfrak{z}}$ von einander unabhängig sind, können wir sie weiterhin als neue Veränderliche benutzen. Es ist aber $U_1\bar{\mathfrak{x}} = 1$, $U_1\bar{\mathfrak{y}} = 0$, $U_1\bar{\mathfrak{z}} = 0$, sodass $U_1 f$ in den Veränderlichen $\bar{\mathfrak{x}}, \bar{\mathfrak{y}}, \bar{\mathfrak{z}}$ die Form

$$U_1 f = \frac{\partial f}{\partial \bar{\mathfrak{x}}}$$

erhält. Ferner ist

$$U_2\bar{\mathfrak{x}} = \alpha + \frac{\partial \omega}{\partial \bar{\mathfrak{y}}}, \qquad U_2\bar{\mathfrak{y}} = 1, \qquad U_2\bar{\mathfrak{z}} = 0.$$

Wenn wir daher ω so als Function von $\bar{\mathfrak{y}}, \bar{\mathfrak{z}}$ wählen, dass

$$\alpha(\bar{\mathfrak{y}}, \bar{\mathfrak{z}}) + \frac{\partial \omega}{\partial \bar{\mathfrak{y}}} \equiv 0$$

wird, so nimmt $U_2 f$ in den Veränderlichen $\bar{\mathfrak{x}}, \bar{\mathfrak{y}}, \bar{\mathfrak{z}}$ die Form an:

$$U_2 f = \frac{\partial f}{\partial \bar{\mathfrak{y}}}.$$

Bezeichnen wir die zuletzt eingeführten Veränderlichen $\bar{\mathfrak{x}}, \bar{\mathfrak{y}}, \bar{\mathfrak{z}}$ der Bequemlichkeit halber wieder mit $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$, so können wir hiernach den Satz aufstellen:

Kanon. Form v. vertauschb. inf. Trfn. mit versch. Bahnc.

Satz 6: *Wenn die beiden infinitesimalen Punkttransformationen $U_1 f$ und $U_2 f$ im Raume (x, y, z) von einander unabhängig sind, ferner verschiedene Bahncurven haben und drittens mit einander vertauschbar sind, d. h. wenn drittens auch*

$$U_1(U_2 f) - U_2(U_1 f) \equiv 0$$

ist, so giebt es drei von einander unabhängige Functionen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ von x, y, z, die als solche neue Veränderliche benutzt werden können, in denen $U_1 f$ und $U_2 f$ die Form:

$$U_1 f = \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}}, \qquad U_2 f = \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}}$$

annehmen.

Part. Diffgl. i. d. neuen Veränderl.

In diesen neuen Veränderlichen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$, in denen $U_1 f$ und $U_2 f$ die Form

$$\mathfrak{U}_1 f \equiv \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}}, \qquad \mathfrak{U}_2 f \equiv \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}}$$

haben, möge die partielle Differentialgleichung erster Ordnung $F = 0$, die $U_1 f$ und $U_2 f$ gestattet, die Form

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = 0$$

haben. Da $\mathfrak{F} = 0$ jetzt $\mathfrak{U}_1 f$ und $\mathfrak{U}_2 f$ gestattet, so ist $\mathfrak{F} = 0$ frei von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$, also von der Form

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{z}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = 0.$$

Solche Gleichungen haben wir schon in § 1, S. 588, betrachtet, wobei wir allerdings die Veränderlichen statt mit $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ mit x, y, z bezeichneten und als Cartesische Punktcoordinaten deuteten. Wir fanden, dass diese Gleichungen durch eine *Quadratur* integrierbar sind (vgl. Satz 1, S. 590). Wir erinnern an die damaligen Ergebnisse, indem wir für den Augenblick, um das Gefundene anschaulich aussprechen zu können, $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ als rechtwinklige Punktcoordinaten in einem neuen Raume deuten wollen, was offenbar gestattet ist. (Vgl. hiermit die Auseinandersetzungen in § 4 des 8. Kap., S. 336.)

Wir haben gesehen, dass $\mathfrak{F} = 0$ mit jeder Gleichung

$$\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{q}} = a \qquad (a = \text{Const.})$$

in Involution liegt oder, was dasselbe sagt, mit ihr ∞^1 Integralflächen gemein hat. Es sind dies solche Cylinder, deren Erzeugende der Geraden

$$\mathfrak{y} + a\mathfrak{x} = 0$$

in der $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$-Ebene parallel laufen. Ist

$$\mathfrak{z} = \Phi(\mathfrak{y} + a\mathfrak{x})$$

die Gleichung eines dieser Cylinder, so muss, wie wir ebenfalls sahen, die Function Φ von $\mathfrak{y} + a\mathfrak{x}$ der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\text{(35)} \qquad \mathfrak{F}(\Phi, a\Phi', \Phi') = 0$$

genügen, die eben durch eine Quadratur integriert werden kann, wodurch sich ∞^1 Integralflächen ergeben mit der Gleichung:

$$\text{(36)} \qquad \mathfrak{z} = \Phi(\mathfrak{y} + a\mathfrak{x}, b).$$

Wenn man auch die Constante a willkürlich lässt, so stellt diese Gleichung eine vollständige Lösung von $\mathfrak{F} = 0$ dar.

Da die Differentialgleichung $\mathfrak{F} = 0$ die infinitesimale Translation $\mathfrak{U}_1 f \equiv \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}}$ gestattet, so führt diese jede Integralfläche in eine Integralfläche über. Es ist klar, dass sie eine Cylinderfläche in eine Cylinderfläche von derselben Richtung verwandelt. Da nun die ∞^1 Integralflächen, die zugleich der Gleichung

$$\text{(37)} \qquad \frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{q}} = a$$

genügen, die einzigen Integralflächen sind, die Cylinder von der durch

$$\mathfrak{y} + a\mathfrak{x} = 0$$

bestimmten Richtung sind, so folgt, dass $\mathfrak{U}_1 f$ jeden dieser Cylinder wieder in einen solchen verwandelt. Die Schar der ∞^1 Cylinder also, die durch (36) bei festem a dargestellt werde, gestattet $\mathfrak{U}_1 f$. Wenn man also (36) nach b auflöst, sodass die in Rede stehenden ∞^1 Cylinder durch eine Gleichung

$$\omega(\mathfrak{z}, \mathfrak{y} + a\mathfrak{x}) = \text{Const.} \tag{38}$$

dargestellt werden, so muss auch

$$\omega + \mathfrak{U}_1 \omega \, \delta t = \text{Const.}$$

diese ∞^1 Cylinder darstellen, mit anderen Worten: $\mathfrak{U}_1 \omega$ muss eine Function von ω allein sein:

$$\mathfrak{U}_1 \omega = \varphi(\omega). \tag{39}$$

Hierbei ist φ nicht identisch gleich Null, da sonst $\mathfrak{U}_1 f$ jeden einzelnen der ∞^1 Cylinder für sich invariant liesse, was offenbar nur dann der Fall wäre, wenn die Richtung der Cylinder mit der Richtung der Translation $\mathfrak{U}_1 f$ übereinstimmte. Letzteres tritt aber bei beliebiger Wahl der Constanten a nicht ein. Dass wir hierbei den Fall, in dem die Cylinder Ebenen parallel der $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$-Ebene vorstellen, ausser Acht lassen dürfen, erhellt sofort. Die ∞^1 Flächen (38) lassen sich mit Hülfe einer beliebigen Function W von ω auch so schreiben:

$$W(\omega) = \text{Const.},$$

da hieraus wieder $\omega = \text{Const.}$ folgt. Aber jetzt ist nach (39):

$$\mathfrak{U}_1 W \equiv W'(\omega)\, \mathfrak{U}_1 \omega = W'(\omega) \cdot \varphi(\omega).$$

Da $\varphi(\omega) \not\equiv 0$ ist, so kann $W(\omega)$ so gewählt werden, dass

$$W'(\omega) \cdot \varphi(\omega) \equiv 1$$

wird. Also hat sich ergeben: *Die partiellen Differentialgleichungen*

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{z}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = 0, \quad \frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{q}} = a$$

haben für einen beliebigen Wert der Constanten a stets mit einander solche ∞^1 Integralflächen

$$W(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, a) = \text{Const.}$$

gemein, dass

$$\mathfrak{U}_1 W \equiv 1$$

ist.

Von diesem analytisch ausgesprochenen Ergebnis können wir nun auch dann Gebrauch machen, wenn wir $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ nicht mehr, wie es soeben vorübergehend geschah, als rechtwinklige Punktcoordinaten in einem neuen Raume deuten, sondern die andere bisher immer gebrauchte Auffassung wiederum einführen, nach der die Grössen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ nur ein neues und eventuell krummliniges Coordinatensystem im ursprünglichen Raume (x, y, z) definieren.

Vermeidg. d. Reduct. auf d. kanon. Form.

Aus unseren Ergebnissen können wir schliessen, dass die vorgelegte partielle Differentialgleichung $F = 0$, die $U_1 f$ und $U_2 f$ gestattet, auch *ohne die Reduction auf kanonische Veränderliche*, also direct vermöge einer Quadratur integriert werden kann. Dies liegt darin, dass sich die Gleichung

$$\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{q}} = a$$

in den ursprünglichen Coordinaten x, y, z direct aufstellen lässt. Um zunächst dies zu zeigen, bemerken wir, dass $\mathfrak{F} = 0$, da diese Gleichung frei von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ ist, *jede* infinitesimale Transformation von der Form

$$\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} - a \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}} \qquad (a = \text{Const.})$$

gestattet, wie aus § 2, S. 600, sofort hervorgeht. Hieraus könnten wir ja auch rückwärts nach Satz 4 des § 2, S. 610, wieder schliessen, dass $\mathfrak{F} = 0$ mit

$$\mathfrak{p} - a\mathfrak{q} = 0$$

oder

$$\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{q}} = a$$

in Involution liegt und also mit dieser Gleichung ∞^1 Integralflächen gemein hat. Nun aber kann die infinitesimale Transformation

$$\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} - a \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}}$$

auch so geschrieben werden:

$$\mathfrak{U}_1 f - a\,\mathfrak{U}_2 f.$$

Sie hat also in den ursprünglichen Veränderlichen x, y, z das Symbol

$$U_1 f - a\,U_2 f \qquad (a = \text{Const.}).$$

Die vorgelegte partielle Differentialgleichung $F = 0$ gestattet daher $U_1 f - a\,U_2 f$ für jeden Wert der Constanten a. Dies kann auch direct erkannt werden. Denn nach (19) in § 2, S. 600, ist:

$$U_1' F = 0, \qquad U_2' F = 0$$

infolge von $F = 0$. Nach Formel (28) des § 2, S. 610, ist deshalb auch wegen der auf S. 613 angegebenen Form von $U_1 f$ und $U_2 f$ infolge von $F = 0$:

$$[F, \xi_1 p + \eta_1 q - \zeta_1] = -(\xi_1 p + \eta_1 q - \zeta_1) F_z$$
$$[F, \xi_2 p + \eta_2 q - \zeta_2] = -(\xi_2 p + \eta_2 q - \zeta_2) F_z,$$

d. h. auch:

$$(40) \qquad [F, (\xi_1 p + \eta_1 q - \zeta_1) - a(\xi_2 p + \eta_2 q - \zeta_2)] =$$
$$= -\{(\xi_1 p + \eta_1 q - \zeta_1) - a(\xi_2 p + \eta_2 q - \zeta_2)\} F_z.$$

Nun ist aber $U_1'f - a\,U_2'f$ die Erweiterung von:

$$U_1f - a\,U_2f \equiv \left(\xi_1\frac{\partial f}{\partial x} + \eta_1\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_1\frac{\partial f}{\partial z}\right) - a\left(\xi_2\frac{\partial f}{\partial x} + \eta_2\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_2\frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

Der Vergleich von (40) mit der Formel (28) des § 2, S. 610, lehrt also, dass

$$U_1'F - a\,U_2'F = 0$$

infolge von $F = 0$ ist, d. h. $F = 0$ gestattet

$F = 0$ gestattet $U_1 f - a\,U_2 f$.

$$U_1f - a\,U_2f \qquad (a = \text{Const.}).$$

Aus Satz 4, § 2, S. 600, folgt nun, wie auch aus (40) erkannt werden kann, dass $F = 0$ in Involution liegt mit jeder der ∞^1 Gleichungen

$$(\xi_1 p + \eta_1 q - \zeta_1) - a(\xi_2 p + \eta_2 q - \zeta_2) = 0$$

oder:

(41) $$\frac{\xi_1 p + \eta_1 q - \zeta_1}{\xi_2 p + \eta_2 q - \zeta_2} = a \qquad (a = \text{Const.}).$$

Dies folgt also daraus, dass $F = 0$ die infinitesimale Transformation $U_1f - a\,U_2f$ gestattet, genau ebenso wie die Involution von $\mathfrak{F} = 0$ mit

$$\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{q}} = a$$

daraus, dass $\mathfrak{F} = 0$ die infinitesimale Transformation $\mathfrak{U}_1f - a\,\mathfrak{U}_2f$ gestattet. Man übersieht, dass die Gleichung (41) gerade diejenige ist, aus der (37) bei Einführung der neuen Veränderlichen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ hervorgeht.

Aus unserem auf S. 619 formulierten Ergebnis folgt nunmehr, dass die Gleichung $F = 0$ mit der Gleichung (41) für jeden Wert der Constanten a solche ∞^1 Integralflächen

(42) $$\Omega(x, y, z, a) = \text{Const.}$$

gemein hat, für die

$$U_1\Omega \equiv 1$$

ist. Hiernach lässt sich Ω direct durch Quadratur berechnen, denn die Flächen (42) müssen als Integralflächen von $F = 0$ der Gleichung

$$F\left(x, y, z, -\frac{\Omega_x}{\Omega_z}, -\frac{\Omega_y}{\Omega_z}\right) = 0,$$

als Integralflächen von (41) der Gleichung

$$\frac{\xi_1\Omega_x + \eta_1\Omega_y + \zeta_1\Omega_z}{\xi_2\Omega_x + \eta_2\Omega_y + \zeta_2\Omega_z} = a$$

und wegen $U_1\Omega \equiv 1$ der Gleichung:

$$\xi_1\Omega_x + \eta_1\Omega_y + \zeta_1\Omega_z = 1$$

genügen. Ω_x, Ω_y, Ω_z berechnen sich somit aus den drei Gleichungen:

$$(43) \qquad \begin{cases} F\left(x, y, z, -\dfrac{\Omega_x}{\Omega_z}, -\dfrac{\Omega_y}{\Omega_z}\right) = 0, \\ \xi_1 \Omega_x + \eta_1 \Omega_y + \zeta_1 \Omega_z = 1, \\ \xi_2 \Omega_x + \eta_2 \Omega_y + \zeta_2 \Omega_z = \dfrac{1}{a}. \end{cases}$$

Da die partielle Differentialgleichung $F = 0$ nach Voraussetzung nicht linear ist, so lassen sich Ω_x, Ω_y, Ω_z aus den drei Gleichungen (43) stets bestimmen, denn nur die beiden letzten Gleichungen (43) sind linear und sind von einander unabhängig, da $U_1 f$ und $U_2 f$ verschiedene Bahncurven haben. Ω bestimmt sich hiernach durch eine *Quadratur* als Function von x, y, z und einer Constanten a. Nun stellt (42) eine vollständige Lösung von $F = 0$ vor, und damit ist die Integration von $F = 0$ erledigt.

Bestimmung einer vollst. Lösg. durch Quadrat.

Unser Ergebnis ist hiernach dieses:

Satz 7: *Gestattet die nicht lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung im Raume* (x, y, z):

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

zwei bekannte und von einander unabhängige infinitesimale Punkttransformationen, die vertauschbar sind, so lässt sie sich durch eine Quadratur integrieren.

Wir geben ein Beispiel zu diesen Theorien:

Beispiel.

Beispiel: Ein Liniencomplex, dem diejenigen ∞^3 Geraden

$$(44) \qquad x = rz + \varrho, \quad y = sz + \sigma$$

angehören, deren Liniencoordinaten r, s, ϱ, σ der Bedingung

$$(45) \qquad \psi(r, s, \varrho, \sigma) = 0$$

genügen, gestattet, wie wir in § 2, S. 611, sahen, die infinitesimale Rotation um die z-Axe:

$$-y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y},$$

wenn seine Gleichung die Form hat:

$$(46) \qquad \Psi(r^2 + s^2, \varrho^2 + \sigma^2, s\varrho - r\sigma) = 0.$$

Er gestattet auch die infinitesimale Translation

$$\frac{\partial f}{\partial z}$$

längs der z-Axe, wenn infolge seiner Gleichung (45) auch die Gleichungen

$$0 = r\delta t + \delta r \cdot z + \delta\varrho,$$
$$0 = s\delta t + \delta s \cdot z + \delta\sigma,$$

die aus (44) durch Variation von r, s, ϱ, σ und z hervorgehen, oder also die Gleichungen

$$\delta r = 0, \quad \delta\varrho = -r dt, \quad \delta s = 0, \quad \delta\sigma = -s\delta t$$

richtig sind. Es muss also dann

$$-r\frac{\partial\psi}{\partial\varrho} - s\frac{\partial\psi}{\partial\sigma} = 0$$

sein infolge von $\psi = 0$. Da die Gleichung $\psi = 0$ unmöglich die beiden Gleichungen $r = 0$, $s = 0$ nach sich ziehen kann, so muss $\psi = 0$ daher die Form

$$W(r, s, s\varrho - r\sigma) = 0$$

haben. Vergleich mit (46) lehrt, dass ein Liniencomplex dann und nur dann die beiden vertauschbaren infinitesimalen Transformationen

$$U_1 f \equiv \frac{\partial f}{\partial z}, \quad U_2 f \equiv -y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}$$

gestattet, wenn seine Gleichung die Form hat:

(47) $$W(r^2 + s^2, s\varrho - r\sigma) = 0.$$

Mit Hülfe von (44) und der aus (44) folgenden Gleichungen

$$dx = r\,dz, \quad dy = s\,dz$$

finden wir die Monge'sche Gleichung eines solchen Complexes:

(48) $$W\left(\frac{dx^2 + dy^2}{dz^2}, \quad \frac{x\,dy - y\,dx}{dz}\right) = 0.$$

Die zugehörige partielle Differentialgleichung erster Ordnung, die sich nach Satz 3 des § 1, 7. Kap., S. 260, berechnen lässt und nicht linear ist, gestattet die beiden obigen infinitesimalen Transformationen $U_1 f$, $U_2 f$, die vertauschbar sind. Insbesondere ist der Complex (47) *quadratisch*, wenn seine Monge'sche Gleichung (48) die Form hat:

(49) $$A(dx^2 + dy^2) + B(x\,dy - y\,dx)^2 + C(x\,dy - y\,dx)dz + D\,dz^2 = 0.$$

Die zugehörige partielle Differentialgleichung erster Ordnung hat nach dem angegebenen Satze die Form:

(50) $$\begin{cases} F \equiv (4BD - C^2)(xp + yq)^2 + 4AD(p^2 + q^2) + 4AC(xq - yp) + \\ \qquad + 4AB(x^2 + y^2) + 4A^2 = 0. \end{cases}$$

Sie lässt sich nach der oben angegebenen Methode durch eine Quadratur integrieren, indem sich Ω_x, Ω_y, Ω_z nach (43) berechnen lassen, sodass $\Omega = \text{Const.}$ durch eine Quadratur gefunden werden kann.

Andeutung anderer Beispiele.

Ein zweites Beispiel sei hier kurz angedeutet:

Wir betrachten ein räumliches Viereck, z. B. das aus der x-Axe, y-Axe und den unendlich fernen Geraden der (xz)-Ebene und der (yz)-Ebene gebildete. Es giebt ∞^1 Flächen zweiten Grades:

$$xy + \text{Const. } z = 0,$$

die dieses Viereck enthalten. Wir wählen zwei von diesen Flächen aus, etwa:

$$(51) \qquad xy + az = 0, \qquad xy + bz = 0,$$

und construieren alle ∞^3 Geraden, deren vier Schnittpunkte mit den beiden Flächen ein constantes Doppelverhältnis bilden. Diese Geraden bilden einen Complex, zu dessen Monge'scher Gleichung eine gewisse partielle Differentialgleichung erster Ordnung zugeordnet ist. Diese partielle Differentialgleichung, die nicht linear ist, gestattet nun zwei bekannte vertauschbare infinitesimale Transformationen. Dies sieht man so ein: Alle infinitesimalen projectiven Transformationen von der Form

$$Uf \equiv \alpha x \frac{\partial f}{\partial x} + \beta y \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma z \frac{\partial f}{\partial z},$$

denen wir schon in § 3 des 8. Kap., S. 334, begegneten, lassen die Coordinatenaxen und die unendlich fernen Geraden der Coordinatenebenen in Ruhe und also auch das ausgewählte räumliche Viereck. Sie führen deshalb jede Fläche zweiten Grades, die dieses Viereck enthält, in eine ebensolche über. Insbesondere aber bleiben die beiden Flächen (51) bei Uf invariant, wenn die Gleichungen

$$y\,\delta x + x\,\delta y + a\,\delta z = 0, \qquad y\,\delta x + x\,\delta y + b\,\delta z = 0$$

infolge von (51) bestehen. Dabei ist $\delta x = \alpha x \delta t$, $\delta y = \beta y \delta t$, $\delta z = \gamma z \delta t$, sodass zu fordern ist, dass die Gleichungen:

$$(\alpha + \beta)xy + a\gamma z = 0, \qquad (\alpha + \beta)xy + b\gamma z = 0$$

infolge der entsprechenden Gleichungen (51) bestehen, d. h. dass

$$\alpha + \beta = \gamma$$

ist. Also lässt die infinitesimale Transformation:

$$Uf \equiv \alpha x \frac{\partial f}{\partial x} + \beta y \frac{\partial f}{\partial y} + (\alpha + \beta) z \frac{\partial f}{\partial z}$$

beide Flächen (51) in Ruhe, wie auch die Constanten α, β gewählt sein mögen. Uf ist linear ableitbar aus den beiden infinitesimalen Transformationen:

$$(52) \qquad U_1 f \equiv x \frac{\partial f}{\partial x} + z \frac{\partial f}{\partial z}, \qquad U_2 f \equiv y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z},$$

die mit einander vertauschbar sind. Da sie überdies projectiv sind, so führen sie jede Gerade, die mit den beiden Flächen (51) ein constantes Doppelverhältnis bildet, in Geraden über, die mit diesen beiden Flächen dasselbe constante Doppelverhältnis bilden. Der oben construierte Liniencomplex bleibt also bei $U_1 f$ und $U_2 f$ invariant, mithin auch die zugehörige partielle Differentialgleichung erster Ordnung. Diese lässt sich also nach Satz 7 durch eine Quadratur integrieren. Stellt man die Form dieser partiellen Differentialgleichung auf, so findet man, dass sie ziemlich compliciert ist. Um so erheblichere Bedeutung hat daher unser Ergebnis, dass sich ihre Integrierbarkeit durch eine Quadratur von vornherein feststellen lässt.

Dies Beispiel giebt zugleich einen Hinweis, wie man viele andere hierhergehörige Beispiele construieren kann. Man wählt zwei vertauschbare infinitesimale projective Transformationen $U_1 f$ und $U_2 f$ aus und führt sie und die von ihnen erzeugten endlichen Transformationen auf eine beliebig gewählte Schar von ∞^1 Geraden aus. Dadurch erhält man eine Schar von ∞^3 Geraden, d. h. einen Liniencomplex, der $U_1 f$ und $U_2 f$ gestattet. Auch die zugehörige partielle Differentialgleichung erster Ordnung gestattet alsdann $U_1 f$ und $U_2 f$ und ist folglich nach Satz 7 durch eine Quadratur integrierbar.

§ 4. Partielle Differentialgleichungen 1. O. mit zwei nicht vertauschbaren infinitesimalen Transformationen.

Das Problem, eine vorgelegte partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

zu integrieren, deckt sich nach Lagrange und Monge mit dem Problem, das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen zu integrieren, das die charakteristischen Streifen liefert, denn sobald diese Streifen bekannt sind, liefert das Theorem 23, § 2 des 12. Kap., S. 552, die allgemeinen Integralgebilde ohne weiteres. Das in Rede stehende System geht aus den vier Gleichungen

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{F_p p + F_q q} = \frac{dp}{-F_x - F_z p} = \frac{dq}{-F_y - F_z q}$$

dadurch hervor, dass man vermöge $F = 0$ eine der fünf Veränderlichen x, y, z, p, q, etwa q, als Function der übrigen ausdrückt und hierin einführt. Dadurch ergiebt sich ein System von *drei* simultanen gewöhnlichen Differentialgleichungen in *vier* Veränderlichen x, y, z, p:

$$(53) \quad \frac{dx}{X(x, y, z, p)} = \frac{dy}{Y(x, y, z, p)} = \frac{dz}{Z(x, y, z, p)} = \frac{dp}{P(x, y, z, p)}.$$

Kennt man nun ein Integral dieses Systems, so ist das Integrationsproblem der Gleichung $F = 0$ dadurch gefördert (vgl. § 4 des 12. Kap.). Wenn auf der anderen Seite eine oder mehrere infinitesimale Transformationen bekannt sind, die $F = 0$ gestattet, so ist das Integrationsproblem dadurch ebenfalls gefördert, was jedenfalls in einigen Beispielen aus den Ergebnissen des vorigen Paragraphen einleuchtet.

Man kann sich endlich denken, *dass gleichzeitig ein Integral des Systems* (53), *sowie gewisse infinitesimale Transformationen, die $F = 0$ gestattet, von vornherein bekannt seien.* Die Frage ist dann die, welche Vorteile man in einem vorgelegten Falle aus diesen bekannten Umständen zu ziehen vermag. Integr.-Probleme.

Es stellt sich somit eine grosse Anzahl interessanter Probleme, die sämtlich rationell behandelt und endgültig erledigt werden können. Äusserliche Rücksichten nötigen uns jedoch, hier nur eine geringere Anzahl solcher Probleme ins Auge zu fassen. Die im vorigen Paragraphen behandelten Integrationsprobleme sind natürlich ebenfalls hierher gehörige Beispiele.

Ehe wir an die Vorführung weiterer Beispiele gehen, schicken wir den Beweis eines wichtigen Satzes voraus.

Zu diesem Zwecke sei

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

eine vorgelegte partielle Differentialgleichung erster Ordnung. Ferner gestatte sie die infinitesimale Punkttransformation

Eine bek. inf. Trf. Uf u. ein bek. Integral J.

$$Uf \equiv \xi(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial z},$$

und überdies sei $J(x, y, z, p, q)$ ein von F unabhängiges Integral des Systems von simultanen Differentialgleichungen (53), dass die ∞^3 charakteristischen Streifen von $F = 0$ definiert.

Es giebt nach Satz 2, § 2, S. 605, solche drei von einander unabhängige Functionen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ von x, y, z, die als neue Coordinaten benutzt werden können, in denen Uf die Form

$$\mathfrak{U}f \equiv \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$$

annimmt. In den neuen Coordinaten wird die Differentialgleichung $F = 0$ eine von $\mathfrak{z}$ freie Form haben, da sie $\mathfrak{U}f$ gestattet (vgl. S. 607):

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = 0.$$

In den neuen Coordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ der Flächenelemente nehme das Integral J die Form

$$\mathfrak{J}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q})$$

an. Nun ist $\mathfrak{J}$ ein Integral des Systems, das die charakteristischen Streifen von $\mathfrak{F} = 0$ definiert. Die beiden Gleichungen

$$\mathfrak{F} = 0, \quad \mathfrak{J} = a \tag{54}$$

bestimmen also für jeden Wert der Constanten a solche ∞^3 Elemente $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ der Gleichung $\mathfrak{F} = 0$, die ∞^2 charakteristische Streifen der Gleichung $\mathfrak{F} = 0$ bilden. Ferner führt die infinitesimale Punkttransformation $\mathfrak{U}f$ jedes Integralgebilde in ein Integralgebilde, also auch jeden charakteristischen Streifen in einen charakteristischen Streifen über.

Wenn wir wollen, können wir $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ auch als Cartesische Punktcoordinaten in einem neuen Raume $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ deuten. Alsdann hat die partielle Differentialgleichung $\mathfrak{F} = 0$ im Raume $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ die Eigenschaft, dass jeder ihrer ∞^3 charakteristischen Streifen durch die infinitesimale Translation $\mathfrak{U}f$ längs der $\mathfrak{z}$-Axe wieder in einen solchen Streifen übergeht.

Da die beiden Gleichungen (54), wie gesagt, ∞^2 charakteristische Streifen von $\mathfrak{F} = 0$ definieren, so folgt mithin, dass auch die beiden Gleichungen:

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = 0, \qquad \mathfrak{J}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z} + \delta t, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = a + b\delta t$$

für jedes Wertsystem der Constanten a und b gerade ∞^2 charakteristische Streifen von $\mathfrak{F} = 0$ definieren. Sie lassen sich auch so schreiben:

$$(55)\quad \mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = 0, \quad \mathfrak{J}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}) + \frac{\partial \mathfrak{J}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q})}{\partial \mathfrak{z}} \delta t = a + b\delta t.$$

Mithin folgt, da auch (54) für jeden Wert von a insgesamt ∞^2 charakteristische Streifen darstellt, dass die *drei* Gleichungen, die durch Zusammenfassung von (54) und (55) hervorgehen, nämlich diese:

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = 0, \qquad \mathfrak{J}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = a, \qquad \frac{\partial \mathfrak{J}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q})}{\partial \mathfrak{z}} = b,$$

im allgemeinen für jedes Wertsystem der Constanten a und b solche ∞^2 Elemente von $\mathfrak{F} = 0$ darstellen, die ∞^1 charakteristische Streifen der Gleichung $\mathfrak{F} = 0$ bilden. Jedenfalls ist

$$\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial \mathfrak{z}}$$

ein Integral des Systems (53). Dies Integral lässt sich anders schreiben. Bei der infinitesimalen Translation $\mathfrak{U}f$ werden $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ gar nicht geändert. Es ist also auch die Erweiterung

$$\mathfrak{U}'f \equiv \mathfrak{U}f \equiv \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}.$$

(Vgl. § 2, Formeln (17), S. 598.) Daher ist $\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial \mathfrak{z}}$ nichts anderes als

$$\mathfrak{U}'\mathfrak{J}.$$

Deuten wir nun $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ wieder wie gewöhnlich als neue Punktcoordinaten der Punkte (x, y, z) des ursprünglichen Raumes, so sind $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ die Coordinaten der Flächenelemente (x, y, z, p, q) im neuen Coordinatensystem. Die Flächenelemente werden dann vermöge der Erweiterung $U'f$ von Uf unter einander transformiert. In den neuen Veränderlichen nimmt Uf die Form $\mathfrak{U}f$ und demgemäss die Erweiterung $U'f$ die Form $\mathfrak{U}'f$ an. In den ursprünglichen Coordinaten x, y, z, p, q der Flächenelemente hat ferner das Integral $\mathfrak{J}$ die Form $J(x, y, z, p, q)$. Also hat $\mathfrak{U}'\mathfrak{J}$ in den ursprünglichen Coordinaten die Form $U'J$.

Wir haben daher gefunden:

Satz 8: *Ist* $U'J$ ist ein Integral.

$$Uf \equiv \xi(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial z}$$

eine infinitesimale Punkttransformation des Raumes (x, y, z), *bei der die partielle Differentialgleichung erster Ordnung*

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

invariant bleibt, und ist ferner $J(x, y, z, p, q)$ *ein Integral des Systems von drei gewöhnlichen Differentialgleichungen, das die charakteristischen Streifen der Gleichung* $F = 0$ *definiert, so ist auch*

$$U'J$$

ein Integral dieses Systems. $U'f$ *bedeutet dabei die Erweiterung von* Uf, *die durch Mitberücksichtigung der Incremente, die* p *und* q *erfahren, hervorgeht.*

Durch nochmalige Anwendung dieses Satzes auf $U'J$ statt J ergiebt sich, dass auch $U'(U'J)$ ein Integral des Systems ist, u. s. w. Wohlbemerkt aber kann es vorkommen, dass $U'J$, auch wenn J von F unabhängig ist, kein von F und J unabhängiges neues Integral vorstellt. Es ist überdies dabei zu beachten, dass zwischen x, y, z, p, q immer die Relation $F = 0$ besteht. Es kann z. B. $U'J$ eine Constante werden, oder auch, es kann $U'J =$ Const. dieselben ∞^3 charakteristischen Streifen wie $J =$ Const. darstellen, u. s. w.

Wir gehen nunmehr dazu über, einige der oben allgemein gekennzeichneten Integrationsprobleme zu behandeln und in der Hauptsache zu erledigen.

Zwei bek. inf. Trfn. $U_1 f$ u. $U_2 f$.

Nehmen wir an, *die vorgelegte partielle Differentialgleichung erster Ordnung*

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

gestatte die beiden bekannten und von einander unabhängigen infinitesimalen Punkttransformationen:

$$U_1 f \equiv \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_1 \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$U_2 f \equiv \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_2 \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Ebenso, wie wir es in § 3, S. 602, erkannten, können wir auch hier einsehen, dass $F = 0$ alsdann auch jede infinitesimale Punkttransformation von der Form gestattet:

$$a U_1 f - U_2 f,$$

in der a eine beliebige Constante bedeutet. Wir ziehen diese Form hier aus äusseren Gründen der früheren Form $U_1 f - a U_2 f$ vor. Nach Formel (41), S. 621, oder auch nach Satz 4, § 2, S. 610, liegt also $F = 0$ mit jeder Gleichung von der Form

(56) $$J \equiv \frac{\xi_2 p + \eta_2 q - \zeta_2}{\xi_1 p + \eta_1 q - \zeta_1} = a \qquad (a = \text{Const.})$$

in Involution. Es ist folglich $[FJ] = 0$ infolge von $F = 0$, d. h. *es ist J ein Integral des Systems* (53). Dieses Integral J ist nicht bloss **Integral J.** eine Constante, denn sonst würde aus der Form (56) von J folgen, dass $U_1 f$ und $U_2 f$ entgegen der Voraussetzung von einander abhängig wären. Es ist ferner J nicht von F abhängig, sobald die Gleichung $F = 0$ selbst nicht linear ist. *Wir wollen in der Folge wie im vorigen Paragraphen immer voraussetzen, dass die vorgelegte Gleichung $F = 0$ nicht linear sei.*

Nach Satz 8 sind nun auch

$$U_1' J, \quad U_2' J$$

Integrale des Systems (53). Hierbei sind verschiedene Fälle denkbar, je nachdem sich hierdurch neue Integrale des Systems (53) ergeben oder nicht.

Um die Discussion zu erleichtern, führen wir solche neue Veränderliche $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ ein, in denen $U_1 f$ nach Satz 2, § 2, S. 605, die Form:

$$\mathfrak{U}_1 f \equiv \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$$

annimmt, während $F = 0$ dabei eine von $\mathfrak{z}$ freie und nach Voraussetzung *nicht* lineare Form

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = 0$$

erhält und $U_2 f$ etwa in:

$$\mathfrak{U}_2 f \equiv \alpha(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} + \beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}} + \gamma(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$$

übergeht. α und β sind *nicht* beide identisch gleich Null, da $\mathfrak{U}_1 f$ und $\mathfrak{U}_2 f$ und folglich auch $U_1 f$ und $U_2 f$ sonst dieselben Bahncurven hätten, d. h. die partielle Differentialgleichung nach Satz 5 des § 3, S. 615, linear wäre, was wir ausdrücklich ausgeschlossen haben. In $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ hat das Integral $\mathfrak{J}$ die Form:

(57) $$\mathfrak{J} \equiv \alpha \mathfrak{p} + \beta \mathfrak{q} - \gamma.$$

Die Erweiterung von $\mathfrak{U}_1 f$ giebt wieder:

$$\mathfrak{U}_1' f \equiv \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}},$$

sodass

(58) $$\mathfrak{U}_1' \mathfrak{J} \equiv \frac{\partial \alpha}{\partial \mathfrak{z}} \mathfrak{p} + \frac{\partial \beta}{\partial \mathfrak{z}} \mathfrak{q} - \frac{\partial \gamma}{\partial \mathfrak{z}}$$

wird. Wir gehen nun über zur Betrachtung der einzelnen Fälle.

Erster Fall: $U_1' J = 0$.

Erstens wollen wir annehmen, dass $U_1' J$ entweder identisch oder infolge von $F = 0$ verschwinde. Da $\mathfrak{U}_1' \mathfrak{J}$ linear in $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ ist, während $\mathfrak{F} = 0$ nach Voraussetzung nicht linear ist, so muss hier

$$\mathfrak{U}_1' \mathfrak{J} \equiv 0$$

sein. Es ist also nach (58), da α, β, γ frei von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ sind:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \mathfrak{z}} \equiv 0, \quad \frac{\partial \beta}{\partial \mathfrak{z}} \equiv 0, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial \mathfrak{z}} \equiv 0,$$

sodass α, β, γ nur $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ enthalten und $\mathfrak{U}_2 f$ die Form hat:

$$\mathfrak{U}_2 f \equiv \alpha(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} + \beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}} + \gamma(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}.$$

Hier ist nun augenscheinlich:

$$\mathfrak{U}_1(\mathfrak{U}_2 f) - \mathfrak{U}_2(\mathfrak{U}_1 f) \equiv 0,$$

d. h. auch $U_1 f$ und $U_2 f$ sind mit einander *vertauschbar*. Diesen Fall haben wir im vorigen Paragraphen schon vollständig erledigt. Wir fanden im Satze 7 (S. 622), dass das Integrationsproblem der partiellen Differentialgleichung auf eine einzige *Quadratur* hinauskommt.

Zweiter Fall: $U_1' J = \text{Const.}$

Zweitens sei vorausgesetzt, dass $U_1' J$ an sich oder infolge von $F = 0$ gleich einer von Null verschiedenen Constanten sei. Da mit $U_1 f$ auch Const. $U_1 f$ die Gleichung $F = 0$ invariant lässt, so können wir hier voraussetzen, dass insbesondere

$$U_1' J \equiv -1$$

oder also $\mathfrak{U}_1' \mathfrak{J} \equiv -1$ sei. Da $\mathfrak{F} = 0$ nach Voraussetzung nicht linear in $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ ist, so folgt hier aus (58):

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \mathfrak{z}} \equiv 0, \quad \frac{\partial \beta}{\partial \mathfrak{z}} \equiv 0, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial \mathfrak{z}} \equiv 1.$$

α, β sind also frei von $\mathfrak{z}$, während γ die Form:

$$\gamma \equiv \mathfrak{z} + \lambda(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$$

hat. Nun ist:

$$\mathfrak{U}_1 f \equiv \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}, \quad \mathfrak{U}_2 f \equiv \alpha(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} + \beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}} + (\mathfrak{z} + \lambda(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}.$$

Hier giebt der Klammerausdruck:

$$\mathfrak{U}_1(\mathfrak{U}_2 f) - \mathfrak{U}_2(\mathfrak{U}_1 f) \equiv \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}} \equiv \mathfrak{U}_1 f. \tag{59}$$

Daher ist auch in den ursprünglichen Veränderlichen:

$$U_1(U_2 f) - U_2(U_1 f) \equiv U_1 f. \tag{59'}$$

Wenn umgekehrt $F = 0$ zwei infinitesimale Punkttransformationen $U_1 f$ und $U_2 f$ gestattet, die in dieser Beziehung zu einander stehen, so lässt sich $U_1 f$ durch Einführung passender neuer Veränderlicher $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ auf die Form

$$\mathfrak{U}_1 f \equiv \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$$

bringen. Erhält $U_2 f$ dabei die Form:

$$\mathfrak{U}_2 f \equiv \alpha(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} + \beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}} + \gamma(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}},$$

so ist

$$\mathfrak{U}_1(\mathfrak{U}_2 f) - \mathfrak{U}_2(\mathfrak{U}_1 f) \equiv \frac{\partial \alpha}{\partial \mathfrak{z}} \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} + \frac{\partial \beta}{\partial \mathfrak{z}} \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}} + \frac{\partial \gamma}{\partial \mathfrak{z}} \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}};$$

da dies nach (59′) oder also nach (59) die Form $\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$ haben soll, so folgt rückwärts, dass α und β frei von $\mathfrak{z}$ sind, während γ die Form

$$\gamma = \mathfrak{z} + \lambda(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$$

hat. Es wird demnach auch

$$\mathfrak{U}_1' \mathfrak{J} \equiv -1.$$

Wir kommen also von der Annahme (59′) wieder rückwärts zu der ursprünglichen Annahme, dass $U_1' J$ an sich oder infolge von $F = 0$ eine nicht verschwindende Constante sei.

Um nun im vorliegenden Fall das Integrationsproblem zu behandeln, führen wir abermals *neue* Veränderliche ein. Dabei ist zu beachten, dass α und β, wie gesagt (S. 629), nicht beide identisch gleich Null sind. Deshalb giebt es stets zwei von einander unabhängige Functionen $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}_1$ von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ allein, die den Bedingungen Neue Veränd.

$$\mathfrak{U}_2 \mathfrak{x}_1 \equiv \alpha \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial \mathfrak{x}} + \beta \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial \mathfrak{y}} = \mathfrak{x}_1,$$

$$\mathfrak{U}_2 \mathfrak{y}_1 \equiv \alpha \frac{\partial \mathfrak{y}_1}{\partial \mathfrak{x}} + \beta \frac{\partial \mathfrak{y}_1}{\partial \mathfrak{y}} = \mathfrak{y}_1$$

genügen. Ferner sei

$$\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z} + \mu(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$$

gesetzt. Nun wählen wir $\mu(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ so, dass

$$\mathfrak{U}_2 \mathfrak{z}_1 \equiv \alpha \frac{\partial \mu}{\partial \mathfrak{x}} + \beta \frac{\partial \mu}{\partial \mathfrak{y}} + \mathfrak{z} + \lambda = \mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z} + \mu,$$

also:

$$\alpha \frac{\partial \mu}{\partial \mathfrak{x}} + \beta \frac{\partial \mu}{\partial \mathfrak{y}} = \mu - \lambda$$

wird. Eine solche Function μ giebt es stets. Also wird sich $\mathfrak{U}_2 f$ in den neuen Veränderlichen nach (25), § 2, S. 603, so darstellen:

$$\mathfrak{U}_2 f = \mathfrak{x}_1 \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_1} + \mathfrak{y}_1 \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}_1} + \mathfrak{z}_1 \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}_1}.$$

Ausserdem ist $\mathfrak{U}_1 \mathfrak{x}_1 \equiv 0$, $\mathfrak{U}_1 \mathfrak{y}_1 = 0$, $\mathfrak{U}_1 \mathfrak{z}_1 \equiv 1$, sodass $\mathfrak{U}_1 f$ die Form

$$\mathfrak{U}_1 f = \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}_1}$$

annimmt. Auch in den neuen Veränderlichen $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{z}_1$ hat $\mathfrak{F} = 0$ eine von $\mathfrak{z}_1$ freie Form:

$$\mathfrak{F}_1(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{q}_1) = 0,$$

weil die Differentialgleichung auch in den neuen Veränderlichen $\mathfrak{U}_1 f$ gestatten muss. Ferner ist hier $\mathfrak{J}$ nach (56) auf die Form gebracht:

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{x}_1 \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{y}_1 \mathfrak{q}_1 - \mathfrak{z}_1.$$

Da nun die Erweiterung giebt:

$$\mathfrak{U}_1' f = \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}_1}, \quad \mathfrak{U}_2' f = \mathfrak{x}_1 \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_1} + \mathfrak{y}_1 \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}_1} + \mathfrak{z}_1 \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}_1},$$

so ist:

$$\mathfrak{U}_1' \mathfrak{J} = -1, \quad \mathfrak{U}_2' \mathfrak{J} = \mathfrak{x}_1 \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{y}_1 \mathfrak{q}_1 - \mathfrak{z}_1 = \mathfrak{J}.$$

Im vorliegenden Falle liefert also die wiederholte Anwendung des Satzes 8 *kein* neues Integral. Aber $\mathfrak{F}_1 = 0$ sollte noch $\mathfrak{U}_2 f$ gestatten. Also muss

$$\mathfrak{U}_2' \mathfrak{F}_1 = 0$$

sein infolge von $\mathfrak{F}_1 = 0$. Dies giebt:

$$\mathfrak{x}_1 \frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial \mathfrak{x}_1} + \mathfrak{y}_1 \frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial \mathfrak{y}_1} = 0,$$

d. h. $\mathfrak{F}_1 = 0$ hat die Form:

$$\mathfrak{F}_1\left(\frac{\mathfrak{x}_1}{\mathfrak{y}_1}, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{q}_1\right) = 0.$$

Die Integration dieser partiellen Differentialgleichung erster Ordnung bietet, wie wir nicht weiter ausführen wollen, genau dieselben Schwierigkeiten wie die einer partiellen Differentialgleichung von der Form:

$$\Omega\left(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1, \frac{\mathfrak{p}_1}{\mathfrak{q}_1}\right) = 0.$$

Wir zeigten aber, dass eine solche Gleichung, die ja auch auf eine *lineare* Form gebracht werden kann, mit der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$:

$$\Omega(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1, -\mathfrak{y}_1') = 0$$

identisch ist. (Siehe § 4 des 12. Kap., S. 576.) Umgekehrt ist klar, dass die Integration *jeder* Gleichung $\omega(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_1') = 0$ auf das ursprünglich gestellte Problem zurückkommt.

Diese Reduction des Problems auf das der Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung kann nun auch ohne

Einführung der neuen Veränderlichen direct geleistet werden. Zu diesem Zwecke bestimmt man aus den beiden Gleichungen:

$$F = 0, \quad J \equiv \frac{\xi_2 p + \eta_2 q - \zeta_2}{\xi_1 p + \eta_1 q - \zeta_1} = a$$

die Grössen p und q als Functionen von x, y, z:

$$p = P(x, y, z, a), \quad q = Q(x, y, z, a),$$

die ausserdem die Constante a enthalten. Für eine Integralfläche muss

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

sein. Man hat also die totale Differentialgleichung in x, y, z

$$dz - P\,dx - Q\,dy = 0$$

zu integrieren, die sich durch Multiplication mit einem gewissen Factor integrabel machen lassen muss. Ist dieser Factor bestimmt, so ist nur noch eine Quadratur nötig, um aus der letzten Gleichung eine vollständige Lösung

$$\Omega(x, y, z, a) = b$$

abzuleiten. Aus der Reduction auf kanonische Veränderliche, die wir oben vornahmen, folgt, dass die Bestimmung des Integrabilitätsfactors sich nicht weiter als auf die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung zurückführen lässt.

So gelangen wir zu dem

Satz 9: *Weiss man von einer nicht linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung*

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

im Raume (x, y, z), *dass sie zwei bekannte infinitesimale Punkttransformationen* $U_1 f$ *und* $U_2 f$ *gestattet, die in der Beziehung*

$$U_1(U_2 f) - U_2(U_1 f) \equiv U_1 f$$

stehen, so lässt sich ihre Integration mit Hülfe dieser Umstände auf die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung zurückführen. Eine weitere Reduction ist unmöglich.

Hiermit sind die Fälle erledigt, in denen $U_1' J$ an sich oder infolge von $F = 0$ eine Constante ist. Es bleiben also die Fälle übrig, in denen $U_1' J$ eine wirkliche Function und daher ein Integral von (53) ist. Es kann von J abhängig sein oder nicht.

Drittens setzen wir mithin voraus, dass $U_1' J$ eine Function von J allein sei und zwar entweder an sich oder infolge von $F = 0$. **Dritter Fall:** $U_1' J = \varphi(J)$.

Wie allgemein auf S. 629 denken wir uns auch hier $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ als neue Veränderliche eingeführt. Nach (58) ist also jetzt anzunehmen, dass

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \mathfrak{z}}\mathfrak{p} + \frac{\partial \beta}{\partial \mathfrak{z}}\mathfrak{q} - \frac{\partial \gamma}{\partial \mathfrak{z}} = \varphi(\alpha\mathfrak{p} + \beta\mathfrak{q} - \gamma) \tag{60}$$

sei, wo also φ eine Function von $\alpha\mathfrak{p} + \beta\mathfrak{q} - \gamma$ bedeutet, und zwar soll diese Relation entweder identisch oder infolge von $\mathfrak{F} = 0$ bestehen. Da α und β nicht beide Null sind (nach S. 629), so muss, da auch $\mathfrak{F} = 0$ nicht linear in $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ ist, die Function φ eine lineare Function ihres Argumentes sein:

$$\varphi \equiv \varkappa(\alpha\mathfrak{p} + \beta\mathfrak{q} - \gamma) + c. \tag{61}$$

Hierin bedeuten $\varkappa$ und c Constanten. Der Fall $\varkappa = 0$ ist schon früher erledigt. Es ist deshalb

$$\varkappa \neq 0$$

anzunehmen. Aus (60) und (61) folgt nun:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \mathfrak{z}} \equiv \varkappa\alpha, \quad \frac{\partial \beta}{\partial \mathfrak{z}} \equiv \varkappa\beta, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial \mathfrak{z}} \equiv \varkappa\gamma - c,$$

und zwar müssen diese Gleichungen an sich, nicht nur infolge von $\mathfrak{F} = 0$, bestehen, weil sie frei von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ sind. Hieraus ergiebt sich weiter

$$\alpha \equiv \lambda(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\, e^{\varkappa\mathfrak{z}}, \quad \beta \equiv \mu(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\, e^{\varkappa\mathfrak{z}}, \quad \gamma \equiv \nu(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\, e^{\varkappa\mathfrak{z}} + c.$$

Es ist also:

$$\mathfrak{U}_1 f \equiv \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}, \quad \mathfrak{U}_2 f \equiv e^{\varkappa\mathfrak{z}}\left(\lambda\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} + \mu\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}} + \nu\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}\right) + c\,\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}.$$

Nun ist, da λ, μ, ν frei von $\mathfrak{z}$ sind:

$$\mathfrak{U}_1(\mathfrak{U}_2 f) - \mathfrak{U}_2(\mathfrak{U}_1 f) \equiv \varkappa\mathfrak{U}_2 f - \varkappa c\,\mathfrak{U}_1 f \quad (\varkappa \neq 0).$$

Also ist auch in den ursprünglichen Veränderlichen x, y, z:

$$U_1(U_2 f) - U_2(U_1 f) \equiv \varkappa U_2 f - \varkappa c\, U_1 f \quad (\varkappa \neq 0).$$

Wir wissen aber, dass, wenn $F = 0$ die beiden infinitesimalen Punkttransformationen $U_1 f$ und $U_2 f$ gestattet, alsdann auch jede von $U_1 f$ und $U_2 f$ abhängige infinitesimale Punkttransformation

$$\text{Const. } U_1 f + \text{Const. } U_2 f$$

die Gleichung $F = 0$ invariant lässt (siehe § 3, S. 620, 621). Sie gestattet daher auch

$$\overline{U}_1 f \equiv U_2 f - c\, U_1 f.$$

Also können wir $U_1 f$ und $U_2 f$ durch $U_1 f$ und $\overline{U}_1 f$ ersetzen. Es ist aber:

$$U_1(\overline{U}_1 f) - \overline{U}_1(U_1 f) \equiv U_1(U_2 f) - c\, U_1(U_1 f) - U_2(U_1 f) + c\, U_1(U_1 f),$$

also in unserem Falle:

$$U_1(\overline{U}_1 f) - \overline{U}_1(U_1 f) \equiv \varkappa U_2 f - \varkappa c U_1 f \equiv \varkappa \overline{U}_1 f.$$

Wenn wir jetzt noch

$$\overline{U}_2 f \equiv -\frac{1}{\varkappa} U_1 f$$

anstatt $U_1 f$ benutzen, was wir thun dürfen, da $\varkappa \neq 0$ ist, so kommt:

$$\overline{U}_1(\overline{U}_2 f) - \overline{U}_2(\overline{U}_1 f) \equiv \frac{1}{\varkappa} \cdot \varkappa \overline{U}_1 f \equiv \overline{U}_1 f.$$

Aber dieser Fall war der *zweite* schon erledigte Fall (siehe S. 630), der zum Satz 9 führte. Wir erkennen daher, dass sich der jetzige Fall dadurch, dass man anstatt $U_1 f$ und $U_2 f$ zwei passende, von $U_1 f$ und $U_2 f$ abhängige infinitesimale Punkttransformationen benutzt, auf den vorigen zurückführen lässt. Reduct. auf d. 2. Fall.

Also gilt der

Satz 10: *Weiss man von einer nicht linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung* Ergebnis.

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

im Raume (x, y, z), dass sie zwei von einander unabhängige und nicht vertauschbare bekannte infinitesimale Punkttransformationen $U_1 f$ und $U_2 f$ gestattet, die in einer Beziehung von der Form

$$U_1(U_2 f) - U_1(U_2 f) \equiv \text{Const. } U_1 f + \text{Const. } U_2 f$$

stehen, so lässt sich ihre Integration mit Hülfe dieser Umstände auf die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung und nicht weiter zurückführen.

Viertens ist jetzt der letzte Fall zu behandeln, dass $U_1' J$ ein von J unabhängiges Integral des Systems (53) ist und zwar ein auch bei Berücksichtigung von $F = 0$ unabhängiges Integral. In diesem Falle sind *zwei* Integrale des Systems (53) von drei simultanen Differentialgleichungen bekannt. Nach Jacobi's Multiplicatortheorie ergiebt sich alsdann das noch fehlende dritte Integral des Systems (53) durch Quadratur. Damit sind dann die charakteristischen Streifen von $F = 0$ gefunden, *sodass das Integrationsproblem der Gleichung $F = 0$ in diesem Falle durch Quadratur gelöst ist.* Vierter Fall: $U_1' J$ unabh. von J.

Weiter gehen wir hier auf Integrationstheorien für die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung nicht ein, da wir uns aus verschiedenen Gründen auf die Vorführung von Beispielen beschränken müssen.

Kapitel 14.

Über einige in der Geometrie auftretende partielle Differentialgleichungen 1. O.

Wiederholt wiesen wir auf das Verdienst hin, das sich Monge dadurch erworben hat, dass er die Lagrange'sche Integrationstheorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung in eine geometrische Form einkleidete. Die geometrische Auffassung ist namentlich deshalb nützlich, weil sie naturgemäss zur expliciten Aufstellung der wahren Grundbegriffe führt, während auf der anderen Seite auch die durch sie gewonnene Anschaulichkeit ihren Wert hat.

Nichts lag daher nach der Begründung der Liniengeometrie und der Geometrie der Kugeln näher, als die hierdurch gewonnenen erweiterten geometrischen Vorstellungen für die Theorie der partiellen Differentialgleichungen weiterhin zu verwerten. In diesem Sinne beschäftigen wir uns im gegenwärtigen letzten Kapitel dieses Bandes der Reihe nach mit den partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, deren *Charakteristiken Haupttangentencurven bez. Krümmungslinien* auf allen Integralflächen sind, alsdann mit einigen Kategorien von partiellen Differentialgleichungen, deren *Charakteristiken geodätische Linien* auf den Integralflächen sind, sowie schliesslich *mit einigen anderen geometrisch definierten Classen von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.* Zwischen diesen interessanten Kategorien, die von Lie im Jahre 1870*) eingeführt wurden, bestehen merkwürdige Beziehungen. Ihre Theorien werden dabei in schönster Weise durch die Anschauungen der Linien- und der Kugelgeometrie beleuchtet und bilden überdies wichtige Abschnitte in diesen Disciplinen.

Die Entwickelungen dieses Kapitels werden im zweiten Bande einerseits weiter ausgeführt und anderseits nach verschiedenen Richtungen hin verwertet werden.

§ 1. Partielle Differentialgleichungen 1. O., deren Charakteristiken Haupttangentencurven sind.

Unter den partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

im Raume (x, y, z) giebt es insbesondere solche, auf deren Integralflächen stets die ∞^1 Charakteristiken, die auf den Flächen verlaufen,

*) Om en Classe geometriske Transformationer, Verhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania, October 1870.

Haupttangentencurven der Integralflächen sind. In Theorem 9, § 5 des 7. Kap., S. 308, haben wir erkannt, dass dies unter den nicht linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung diejenigen sind, deren zugeordnete Monge'schen Gleichungen *nicht lineare Liniencomplexe* definieren. Nach Satz 1, § 3 des 11. Kap., S. 500, hat jede derartige partielle Differentialgleichung gerade ∞^3 verschiedene Charakteristiken. Die Flächen, auf denen die Charakteristiken Haupttangentencurven sind, d. h. die Integralflächen der betreffenden partiellen Differentialgleichung, construiert man nach Satz 10, § 2 des 12. Kap., S. 553, indem man ∞^1 Chakteristiken auswählt, die eine Umhüllende haben. Die zugehörige Monge'sche Gleichung ordnet jedem Punkte einen Elementarkegel zu, und die Linienelemente der Charakteristiken gehören diesen Elementarkegeln an. Daher wird die erwähnte Umhüllende eine Curve des Liniencomplexes sein, der durch die Monge'sche Gleichung definiert wird. Wählt man umgekehrt eine Curve c dieses Complexes beliebig, so gehen durch jeden Punkt p der Curve ∞^1 Charakteristiken. Ihre Linienelemente in diesem Punkte p bilden den Elementarkegel des Punktes p. Diesem Elementarkegel gehört auch das Linienelement der Complexcurve c im Punkte p an. Demnach giebt es unter den Charakteristiken sicher eine, die in p die Curve c berührt. Die Flächen also, auf denen die Charakteristiken Haupttangentencurven sind, erhält man dadurch, dass man eine beliebige Curve des Complexes auswählt und die ∞^1 Charakteristiken bestimmt, welche die Curve zur Umhüllenden haben. Noch sei erwähnt, dass sich die Curve c auch auf einen Punkt reducieren kann. Linien-complex.

Also hat sich ergeben:

Satz 1: *Unter den Curven eines nicht linearen Liniencomplexes giebt es solche ∞^3 Curven, denen die folgende Eigenschaft zukommt: Alle diejenigen ∞^1 Curven dieser Schar, die eine beliebig gewählte andere Curve des Complexes berühren, erzeugen eine Fläche, auf der sie Haupttangentencurven der einen Schar sind*).*

Da zu *jeder* nicht linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung in x, y, z nach Satz 5, § 4 des 11. Kap., S. 511, eine Monge'sche Gleichung

$$\Omega(x, y, z;\ dx, dy, dz) = 0$$

die nicht linear ist, und umgekehrt nach Satz 3, § 1 des 7. Kap., S. 260, zu *jeder* nicht linearen Monge'schen Gleichung eine nicht lineare par-

*) Es ist naturgemäss, die im Satze genannten ∞^3 Curven als die Haupttangentencurven des Complexes zu bezeichnen. In diesem Bande brauchen wir aber diese Bezeichnung noch nicht einzuführen.

tielle Differentialgleichung erster Ordnung gehört, so können wir nach Satz 1, § 1 des 7. Kap., S. 254, auch den folgenden Satz aussprechen:

Satz 2: *Soll eine Monge'sche Gleichung*

$$\Omega(x, y, z; dx, dy, dz) = 0$$

im Raume (x, y, z) *die Eigenschaft haben, dass unter ihren Integralcurven solche* ∞^3 *Curven enthalten sind, von denen die* ∞^1 *Curven, die eine beliebige Integralcurve umhüllen oder durch einen gemeinsamen Punkt gehen, stets Haupttangentencurven auf der durch sie erzeugten Fläche sind, so ist dazu notwendig und hinreichend, dass die Monge'sche Gleichung die Gestalt habe:*

$$\Phi(y\,dz - z\,dy,\ z\,dx - x\,dz,\ x\,dy - y\,dx,\ dx,\ dy,\ dz) = 0.$$

Sie gehört alsdann zu einem Liniencomplex, und die erwähnten ∞^3 *Curven sind die Charakteristiken derjenigen nicht linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung*

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

deren Elementarkegel die Kegel des Complexes sind. Die Flächen, auf denen die Charakteristiken Haupttangentencurven sind, sind die Integralflächen der Gleichung $F = 0$.

Lineare p. Diffgl.

Ist eine vorgelegte partielle Differentialgleichung erster Ordnung *linear* in p, q:

$$X(x, y, z)p + Y(x, y, z)q - Z(x, y, z) = 0,$$

so hat sie nach S. 541, § 2 des 12. Kap., nur ∞^2 Charakteristiken, nämlich die ∞^2 Integralcurven des äquivalenten Systems

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}.$$

Eine allgemeine Integralfläche der partiellen Differentialgleichung ergiebt sich, indem man nach einem beliebigen Gesetz ∞^1 unter diesen Charakteristiken zu einer Fläche zusammenfasst. Sollen nun die ∞^1 Charakteristiken auf einer solchen Fläche Haupttangentencurven sein, so müssen die Schmiegungsebenen jeder Charakteristik Tangentenebenen auf allen den Integralflächen sein, die durch die Charakteristik hindurchgehen. Nun aber können wir stets eine solche Integralfläche construieren, die eine beliebige dieser Charakteristiken enthält und in einem Punkt der Curve eine beliebig gewählte, die Curve berührende Ebene zur Tangentenebene hat. Mithin müsste, damit die gestellte Forderung erfüllbar wäre, in jedem Punkte einer Charakteristik jede die Curve berührende Ebene Schmiegungsebene sein. Das ist aber für krumme Curven nicht der Fall. Die Charakteristiken müssen also ∞^2 *Geraden* sein und daher ein Strahlensystem bilden. Alsdann sind die Integralflächen Regelflächen, deren Erzeugende dem Strahlensystem angehören. Die Erzeugenden sind aber stets Haupttangentencurven der Regelflächen. (Vgl. hiermit die Note in § 1 des 11. Kap., S. 488.) Hiermit sind wir zu folgendem Ergebnis gelangt:

Theorem 25: *Eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung* P. Diffgl. 1. O., deren Char. Haupttgcurven sind.

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

im Raume (x, y, z) hat dann und nur dann die Eigenschaft, dass auf jeder ihrer Integralflächen die auf der Fläche gelegenen ∞^1 Charakteristiken Haupttangentencurven der Fläche sind, wenn sie entweder die partielle Differentialgleichung eines nicht linearen Complexes ist oder aber wenn sie eine lineare partielle Differentialgleichung ist, deren Charakteristiken ein Strahlensystem bilden.

Hiermit haben wir eine schöne geometrische Definition aller der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung gefunden, deren Charakteristiken auf allen Integralflächen Haupttangentencurven sind.

Es liegt nun nahe zu versuchen, die allgemeine analytische Form der hierher gehörigen partiellen Differentialgleichungen, insbesondere natürlich der nicht linearen, zu bestimmen. Zu diesem Zwecke könnte man nach Satz 3, § 1 des 7. Kap., S. 260, die Gleichungen Anal. Form d. Diffgln.

$$\Phi(yz' - zy', zx' - xz', xy' - yx', x', y', z') = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x'} = \varrho p, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y'} = \varrho q, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z'} = -\varrho$$

bilden und aus ihnen die Grössen x', y', z', ϱ zu eliminieren versuchen. Die Elimination ist aber, solange $\Phi = 0$ in allgemeiner Form vorliegt, offenbar nicht möglich und also führt der eingeschlagene Weg nicht zu der gesuchten allgemeinen Form. Bei besonderer Wahl der Gleichung $\Phi = 0$ lässt sich allerdings die Elimination leisten. Jedenfalls erkennt man, dass die Bestimmung *aller* derartiger nicht linearer Gleichungen $F = 0$ nur Differentiationen und Eliminationen erfordert. Entsprechend kann man zur Bestimmung der linearen partiellen Differentialgleichungen, auf deren Integralflächen die Charakteristiken Haupttangentencurven sind, von einem beliebigen Strahlensysteme ausgehen.

Anal. Bedingg. für solche Diffgln.

Will man die analytischen Bedingungen ableiten, denen die Function F unterworfen werden muss, damit die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

Haupttangentencurven sind, so kann man so verfahren: Die ∞^1 Flächenelemente (x, y, z, p, q) einer Integralfläche längs einer Charakteristik, also die Flächenelemente eines charakteristischen Streifens, genügen nach Satz 12, § 2 des 12. Kap., S. 555, dem System von vier gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$(1) \qquad \frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{F_p p + F_q q} = \frac{dp}{-F_x - F_z p} = \frac{dq}{-F_y - F_z q}.$$

Sollen sie längs einer Haupttangentencurve gelegen sein, so müssen sie der in § 4 des 10. Kap., S. 472, aufgestellten Bedingung (56) genügen:

$$(2) \qquad dp\,dx + dq\,dy = 0.$$

Dies thun sie nach (1) dann und nur dann, wenn

$$(3) \qquad (F_x + F_z p) F_p + (F_y + F_z q) F_q = 0$$

ist, und zwar ist zu fordern, dass diese Gleichung infolge von $F = 0$ bestehe. Ist dies der Fall, so ist für jeden der ∞^3 durch (1) definierten charakteristischen Streifen der partiellen Differentialgleichung $F = 0$ die Bedingung (2) erfüllt. Bei dieser Ableitung war es gleichgültig, ob $F = 0$ nicht linear oder linear ist.

Es gilt daher der

Satz 3: *Eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung*

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

im Raume (x, y, z) hat dann und nur dann die Eigenschaft, dass ihre Charakteristiken auf allen Integralflächen Haupttangentencurven sind, wenn die Gleichung

$$(F_x + F_z p) F_p + (F_y + F_z q) F_q = 0$$

infolge von $F = 0$ besteht. Alle derartigen partiellen Differentialgleichungen lassen sich durch Differentiation und Elimination angeben).*

---

*) Die homogene partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$(F_x + F_z p) F_p + (F_y + F_z q) F_q = 0$$

für F in den *fünf* unabhängigen Veränderlichen x, y, z, p, q, die oben factisch durch geometrische Betrachtungen integriert worden ist, bietet unter mehreren Gesichtspunkten besonderes Interesse. An dieser Stelle möge nur das Eine bemerkt werden, dass diese Gleichung zu den sogenannten *semilinearen* partiellen Differentialgleichungen gehört; dies geht leicht daraus hervor, das ein linearer Liniencomplex nicht wie andere Liniencomplexe ∞^4, sondern nur ∞^3 Flächenelemente x, y, z, p, q des Raumes bestimmt. Bei dieser Auffassung liefern ∞^4 beliebig gewählte lineare Liniencomplexe eine vollständige Lösung der vorliegenden partiellen Differentialgleichung in fünf unabhängigen Veränderlichen.

Wenn insbesondere die Charakteristiken einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung sämtlich *Geraden* sind, so sind sie selbstverständlich auf jeder Integralfläche Haupttangentencurven. Die zugehörigen partiellen Differentialgleichungen sind also als Specialfälle unter den soeben bestimmten enthalten.

Wir wollen uns nun die Aufgabe stellen, *alle partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zu bestimmen, deren Charakteristiken Geraden sind.* P. Diffgln., deren Char. Geraden sind.

Ist die gesuchte partielle Differentialgleichung linear in p und q, so sind ihre Charakteristiken die Geraden eines beliebigen Strahlensystems, und das Problem ist damit erledigt.

Wir dürfen uns also auf den Fall beschränken, dass die gesuchte partielle Differentialgleichung

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

nicht linear ist. Da ihre Charakteristiken Geraden sein sollen, die einem Liniencomplex angehören, so sind die nicht singulären Integralflächen $F = 0$ abwickelbare Flächen, deren Rückkehrcurven beliebige Curven des Complexes sind. Jede Charakteristik muss also auf einer abwickelbaren Integralfläche liegen. Aber eine abwickelbare Fläche wird durch eine Tangentenebene stets längs einer Erzeugenden in ihrer ganzen Ausdehnung berührt, d. h. die ∞^1 Flächenelemente dieser Integralfläche längs einer Charakteristik oder also die ∞^1 Flächenelemente eines charakteristischen Streifens haben sämtlich dieselbe Ebene. Da p, q die Coordinaten der Stellung der Ebene eines Elementes sind, so sind also längs jedes charakteristischen Streifens p und q constant, d. h.:

$$dp = 0, \quad dq = 0.$$

Da andererseits die charakteristischen Streifen dem System (1) genügen, so ist also längs jeden charakteristischen Streifens:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} p = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} q = 0. \tag{4}$$

Nun gehört jedes Flächenelement der Gleichung $F = 0$ einem charakteristischen Streifen an. Also müssen alle ∞^4 Elemente der Gleichung $F = 0$ auch den Gleichungen (4) genügen. Diese beiden partiellen Differentialgleichungen für F haben die drei von einander unabhängigen Lösungen:

$$p, \; q, \; z - px - qy,$$

und jede andere Lösung ist von diesen dreien abhängig. Also muss die gesuchte partielle Differentialgleichung die Form haben:

$$F(p, q, z - px - qy) = 0. \tag{5}$$

Im 3. Beispiel des § 1, 7. Kap., S. 265, und auch später haben wir die partiellen Differentialgleichungen von dieser Form schon betrachtet. Wir sahen, dass die schon von Lagrange (vgl. die Fussnote, S. 518) integrierte Gleichung (5) zu Charakteristiken in der That ∞^3 Geraden hat, die eine (wirkliche oder ausgeartete) Fläche berühren. (Siehe Fig. 58, S. 266.) Der von den geradlinigen Charakteristiken gebildete Complex besteht also aus allen Tangenten einer Fläche Ω. Die allgemeinen Integralflächen sind die abwickelbaren Flächen, welche die Fläche Ω längs Curven berühren. Die charakteristischen Streifen bestehen aus den Flächenelementen, deren Punkte eine Tangente von Ω bilden, während ihre Ebenen mit der Tangentenebene von Ω im Berührungspunkte dieser Tangente zusammenfallen.

Es hat sich daher ergeben:

Satz 4: *Sind die Charakteristiken einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung*

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

im Raume (x, y, z) *sämtlich geradlinig, so sind sie entweder die* ∞^2 *Geraden eines beliebigen Strahlensystems, und dann ist die partielle Differentialgleichung linear, oder aber sie sind die* ∞^3 *Tangenten einer beliebigen Fläche. Im letzteren Falle ist die partielle Differentialgleichung diejenige nicht lineare partielle Differentialgleichung, die dem Complex aller Tangenten der Fläche zugeordnet ist.*

Das hiermit erledigte Problem der Bestimmung aller partiellen Differentialgleichungen $F(x, y, z, p, q) = 0$, deren Charakteristiken *Geraden* sind, zerlegten wir durch eine *geometrische* Betrachtung in *zwei analytische* Probleme, die sich alle beide auf die partielle Differentialgleichung erster Ordnung für F:

$$(6)\qquad (F_x + F_z p) F_p + (F_y + F_z q) F_q = 0$$

bezogen. Wir suchten nämlich unter den Lösungen F dieser Gleichung insbesondere diejenigen, die entweder die drei linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$(7)\qquad F_{pp} = 0, \quad F_{pq} = 0, \quad F_{qq} = 0$$

oder aber die beiden linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$(8)\qquad F_x + F_z p = 0, \quad F_y + F_z q = 0$$

erfüllen. Im Laufe dieses Kapitels werden wir eine Anzahl ähnlicher Probleme erledigen, die teilweise analytisch einen complicierten Charakter haben. Wenn wir dabei anscheinend leicht zum Ziele kommen, so beruht dies darauf, dass wir uns nicht von vornherein zu einer bestimmten Methode wenden, sondern abwechselnd synthetische (begriffliche) und analytische Betrachtungen anstellen.

§ 2. Partielle Differentialgleichungen 1. O., deren Charakteristiken Krümmungslinien sind.

Im letzten Paragraphen des 12. Kap. führten wir eine beliebige Punkttransformation des Raumes (x, y, z) auf eine vorgelegte partielle Differentialgleichung erster Ordnung Punkttransf.

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

aus. Dadurch ging eine neue partielle Differentialgleichung

$$F_1(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1) = 0$$

hervor; die Elemente von $F = 0$ wurden in die von $F_1 = 0$, die Integralgebilde von $F = 0$ in die von $F_1 = 0$ und insbesondere die charakteristischen Streifen von $F = 0$ in die von $F_1 = 0$ übergeführt. (Vgl. Satz 20, S. 579.) Im vorigen Kapitel betrachteten wir alsdann solche Punkttransformationen, die eine vorgelegte partielle Differentialgleichung insbesondere in sich überführten.

Es giebt nun aber noch allgemeinere Transformationen als die Punkttransformationen, bei denen ebenfalls jede partielle Differentialgleichung erster Ordnung wieder in eine solche verwandelt wird und die Integralgebilde der ursprünglichen in die der neuen Gleichung übergehen. Auf die allgemeine Frage nach *allen* derartigen Transformationen gehen wir hier nicht näher ein. (Vgl. S. 583.) Allgemeinere Trfn.

Wir machen jedoch darauf aufmerksam, dass wir schon einige derartige Transformationen, die keine Punkttransformationen sind, kennen gelernt haben. Sie sollen hier kurz erwähnt werden.

Zunächst gehört hierher die *Dualität* im Raume (S. 229, § 3 des 6. Kap.). Eine allgemeine bilineare Gleichung Dualität.

$$(9)\quad \begin{cases} (a_1x + b_1y + c_1z + d_1)x_1 + (a_2x + b_2y + c_2z + d_2)y_1 + \\ + (a_3x + b_3y + c_3z + d_3)z_1 + (a_4x + b_4y + c_4z + d_4) = 0 \end{cases}$$

ordnet jedem Punkt (x, y, z) eine Ebene zu, nämlich die Ebene, die durch die vorliegende Gleichung in den laufenden Coordinaten x_1, y_1, z_1 dargestellt wird. Sie ordnet ferner allen ∞^2 Punkten (x, y, z) einer Ebene

$$(10)\qquad Ax + By + Cz + D = 0$$

solche ∞^2 Ebenen zu, die sämtlich durch einen gemeinsamen Punkt gehen, denn wenn man x, y, z als drei Parameter auffasst, die an die Gleichung (10) gebunden sind, so stellt (9) in den laufenden Coordinaten x_1, y_1, z_1 die ∞^2 Ebenen eines Ebenenbündels dar, da die Parameter x, y, z in (9) *linear* auftreten. Wir sagen, dass die Dualität der Ebene

(10) diesen Punkt zuordnet. Betrachten wir eine Ebene e und einen Punkt p in ihr. Dem Punkte p wird durch (9) eine Ebene e_1 zugeordnet. Der Ebene e wird ein Punkt p_1 zugeordnet, den man erhält, wenn man den gemeinsamen Punkt der ∞^2 Ebenen sucht, die den Punkten von e entsprechen. Da p zu den Punkten von e gehört, so folgt, dass e_1 durch p_1 geht. Der Inbegriff einer Ebene e und eines Punktes p in ihr ist aber ein Flächenelement. Also folgt: *Die Dualität ordnet jedem Flächenelement (p, e) ein Flächenelement (p_1, e_1) zu.*

Ist z. B.

$$(11) \qquad -yx_1 + xy_1 + z_1 - z = 0$$

die bilineare Gleichung, die bei der Definition der Dualität zu Grunde gelegt wird, so findet man das dem Flächenelement (x, y, z, p, q) zugeordnete Flächenelement $(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1)$ in folgender Weise: Es müssen p_1, q_1 und -1 proportional den Richtungscosinus der Ebene sein, die durch (11) dargestellt wird, wenn x_1, y_1, z_1 die laufenden Coordinaten bedeuten. Daher ist:

$$p_1 = y, \quad q_1 = -x.$$

Ferner folgt, da die Gleichung (11) in x, y, z und x_1, y_1, z_1 vollkommen symmetrisch ist, analog:

$$p = y_1, \quad q = -x_1.$$

Aus diesen vier Gleichungen und aus (11) ergiebt sich durch Auflösung nach x_1, y_1, z_1, p_1, q_1:

$$(12) \quad x_1 = -q, \quad y_1 = p, \quad z_1 = z - xp - yq, \quad p_1 = y, \quad q_1 = -x.$$

Das Flächenelement $(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1)$, in das hiernach das Element (x, y, z, p, q) übergeht, ist nichts anderes als das Element, das zum Element (x, y, z, p, q) hinsichtlich des linearen Complexes mit der Pfaff'schen Gleichung

$$xdy - ydx + dz = 0$$

Trf. der Element-vereine. *reciprok* ist, vgl. S. 454, § 4 des 10. Kap. (Man vgl. auch die Formeln (47), S. 467.) *Bei der Dualität* (12) *geht jeder Elementverein in denjenigen Elementverein über, der zu ihm hinsichtlich des linearen Complexes reciprok ist.* Dies haben wir an der angeführten Stelle im Einzelnen gezeigt. Man kann es auch auf einmal dadurch nachweisen, dass man zeigt, dass die Bedingung der vereinigten Lage

$$dz - pdx - qdy = 0$$

(vgl. § 1 des 12. Kap., S. 523) bei der Transformation (12) invariant bleibt. In der That ist nach (12)

$$dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1 = dz - pdx - qdy.$$

Liegt nun eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung

(13) $$F(x, y, z, p, q) = 0$$

vor, so gehen ihre ∞^4 Elemente (x, y, z, p, q) vermöge der Dualität (12) in diejenigen ∞^4 Elemente $(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1)$ über, die der Gleichung

(14) $$F(-q_1, p_1, z_1 - x_1 p_1 - y_1 q_1, y_1, -x_1) = 0$$

genügen. Jedes Integralgebilde von (13) geht dabei in ein Integralgebilde von (14) über. *Daher sind die beiden partiellen Differentialgleichungen* (13) *und* (14) *mit einander völlig äquivalent*, denn hat man die zweite integriert, so ist damit auch die Integration der ersten erledigt. Kennt man insbesondere eine vollständige Lösung von (14), so kann man vermöge der Inversion der Dualität (12) sofort eine vollständige Lösung von (13) aufstellen. Diese Transformation (12) einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung in eine andere kennt man schon lange als die Legendre'sche Transformation. Die völlige Äquivalenz der beiden Gleichungen (13) und (14) beruht darauf, dass sich die Dualität als eine solche Transformation innerhalb des fünfdimensionalen Gebietes *aller* Flächenelemente auffassen lässt, bei der jeder Elementverein in einen Elementverein übergeht. Legendre'sche Trf.

Diese Legendre'sche Transformation steht in engem Zusammenhang mit der folgenden älteren, nämlich schon von Euler angegebenen Transformation: Euler'sche Trf.

(15) $$x_1 = p, \quad y_1 = y, \quad z_1 = z - px, \quad p_1 = -x, \quad q_1 = q.$$

Auch diese Transformation der Flächenelemente führt jeden Elementverein in einen Elementverein über, denn hier ist ebenfalls:

(16) $$dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1 = dz - p dx - q dy.$$

Wenn also eine Schar von Elementen (x, y, z, p, q) vorliegt, die der Bedingung

$$dz - p dx - q dy = 0$$

genügt, d. h. einen Verein bildet, und wenn man alsdann diese Schar vermöge (15) in eine Schar von Elementen $(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1)$ transformiert, so besteht nach (16) für die neue Schar die Gleichung

$$dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1 = 0,$$

d. h. die neue Schar ist ebenfalls ein Verein. Bei der Euler'schen Transformation (15) gehen alle die Flächenelemente, deren Punkte in einer Ebene

$$y = c$$

liegen, in Elemente derselben Art über. Insbesondere gehen die ∞^2 Elemente durch einen Punkt

$$x = x_0, \quad y = c, \quad z = z_0$$

dieser Ebene in die ∞^2 Elemente $(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1)$ über, für die

$$y_1 = c, \quad x_0 x_1 + z_1 = z_0$$

ist, wie aus den drei ersten Gleichungen (15) sofort hervorgeht. Es sind dies die Elemente einer Geraden in der Ebene $y = c$, und zwar findet man diese Gerade, wenn man innerhalb der Ebene $y = c$ auf den Punkt (x_0, y_0) die *Dualität* ausübt, die durch die bilineare Gleichung

$$x_0 x_1 + z_1 - z_0 = 0$$

definiert wird (vgl. § 5 des 2. Kap., S. 57).*)

Vermöge der Transformation (15) führte Euler die Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

auf die Integration der Gleichung

$$F(-p_1, y_1, z_1 - p_1 x_1, x_1, q_1) = 0$$

zurück. Da die Transformation (15) jeden Elementverein in einen Elementverein überführt, so erhellt in der That, dass sie jedes Integralgebilde der ersten Gleichung in ein Integralgebilde der zweiten verwandelt.

Im 10. Kap. haben wir in § 4, S. 466, *eine neue Transformation der Flächenelemente* kennen gelernt. Wir ordneten damals jedem Element (x, y, z, p, q) eines Raumes (x, y, z) ein Element (X, Y, Z, P, Q) eines anderen Raumes (X, Y, Z) zu und fanden (siehe Theorem 20, S. 474), dass dabei jede allgemein gewählte Fläche, aufgefasst als Elementverein wieder in eine Fläche übergeht. Ferner geht dabei jede Gerade, aufgefasst als ein Elementverein, in eine Kugel über. Diese Transformation wird sich analytisch durch fünf Gleichungen von der Form:

Trf. d. Geraden in Kugeln.

$$X = \mathfrak{X}(x, y, z, p, q), \quad Y = \mathfrak{Y}(x, y, z, p, q), \quad Z = \mathfrak{Z}(x, y, z, p, q),$$
$$P = \mathfrak{P}(x, y, z, p, q), \quad Q = \mathfrak{Q}(x, y, z, p, q)$$

darstellen. (Ihre wirkliche Gestalt liegt übrigens in den Formeln (53) und (54), S. 468, vor.) Wenn wir es auch damals nicht in voller Allgemeinheit ausgesprochen haben, dass diese Transformation jeden Elementverein wieder in einen Elementverein verwandelt, so haben wir dies doch für die Vereine von ∞^2 Elementen im Einzelnen gezeigt.

Wenn nun eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung

---

*) Die Euler'sche Transformation, die besonders von Ampère für die Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung verwertet wurde, dehnt sich auf n Dimensionen aus. Von der im Text gegebenen Deutung der Euler'schen Transformation findet sich wohl weder bei Euler noch bei Ampère eine Spur. Die Legendre'sche Transformation ist der Aufeinanderfolge zweier Euler'scher Transformationen äquivalent.

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

vorliegt, so wird die Transformation ihre ∞^4 Elemente in die Elemente (X, Y, Z, P, Q) einer neuen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$F_1(X, Y, Z, P, Q) = 0$$

überführen, und es erhellt, dass eine allgemeine Integralfläche von $F = 0$ vermöge der Transformation in eine Integralfläche von $F_1 = 0$ übergeht. Die Integrationsprobleme dieser beiden partiellen Differentialgleichungen sind also mit einander äquivalent.

Die vorgeführten Beispiele von Element-Transformationen ordnen sich als specielle Fälle einem allgemeinen Begriff unter. Wir bezeichnen nämlich allgemein eine Transformation, welche die Elemente (x, y, z, p, q) des Raumes in neue Elemente $(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1)$ verwandelt:

$$(17) \quad \begin{cases} x_1 = \mathfrak{X}(x, y, z, p, q), \quad y_1 = \mathfrak{Y}(x, y, z, p, q), \quad z_1 = \mathfrak{Z}(x, y, z, p, q), \\ \qquad p_1 = \mathfrak{P}(x, y, z, p, q), \quad q_1 = \mathfrak{Q}(x, y, z, p, q), \end{cases}$$

insbesondere als eine *Berührungstransformation des Raumes*, wenn sie jeden Elementverein in einen Elementverein überführt. Nach § 1 des 12. Kap., S. 523, ist die Gleichung

Berührungstrf. des Raumes.

$$(18) \qquad dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

die Bedingung der vereinigten Lage zweier Flächenelemente (x, y, z, p, q) und $(x + dx, y + dy, z + dz, p + dp, q + dq)$. Da die vereinigte Lage bei der Transformation nicht gestört werden soll, so soll die Gleichung

$$dz_1 - p_1\,dx_1 - q_1\,dy_1 = 0$$

eine Folge von (18) sein. Da sie linear und homogen in den Differentialen dx_1, dy_1, dz_1 ist, die sich nach (17) linear und homogen durch die Differentiale der ursprünglichen Veränderlichen x, y, z, p, q ausdrücken, so kann die letzte Gleichung nur dann eine Folge der Gleichung (18) sein, wenn infolge von (17) eine Gleichung von der Form:

$$(19) \qquad dz_1 - p_1\,dx_1 - q_1\,dy_1 = \varrho(dz - p\,dx - q\,dy)$$

besteht, in der ϱ eine Function von x, y, z, p, q bedeutet.

Wir definieren daher die Berührungstransformationen des Raumes analytisch in folgender Weise:

Eine Transformation

$$(17) \quad \begin{cases} x_1 = \mathfrak{X}(x, y, z, p, q), \quad y_1 = \mathfrak{Y}(x, y, z, p, q), \quad z_1 = \mathfrak{Z}(x, y, z, p, q), \\ \qquad p_1 = \mathfrak{P}(x, y, z, p, q), \quad q_1 = \mathfrak{Q}(x, y, z, p, q) \end{cases}$$

der Veränderlichen x, y, z, p, q *in die Veränderlichen* x_1, y_1, z_1, p_1, q_1

heisst eine Berührungstransformation des Raumes (x, y, z), *wenn vermöge der Transformation eine Gleichung von der Form*

$$dz_1 - p_1\,dx_1 - q_1\,dy_1 = \varrho\,(dz - p\,dx - q\,dy) \tag{19}$$

besteht, in der ϱ *eine Function von* x, y, z, p, q *bedeutet.*

Be-rührungs-trf. ausgef. auf e. p. Diffgl. 1. O.

Liegt eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

vor, so werden ihre ∞^4 Flächenelemente (x, y, z, p, q) durch die Berührungstransformation (17) in neue ∞^4 Flächenelemente $(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1)$ übergeführt, deren Gleichung

$$F_1(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1) = 0$$

durch Elimination von x, y, z, p, q aus $F = 0$ vermöge (17) hervorgeht. Dann leuchtet ein, dass die Berührungstransformation (17) jedes Integralgebilde der Gleichung $F = 0$ in ein Integralgebilde der Gleichung $F_1 = 0$ überführt. Sie verwandelt jeden Elementstreifen der Gleichung $F = 0$ in einen Elementstreifen der Gleichung $F_1 = 0$. Unter den Elementstreifen spielen nun die charakteristischen Streifen der Gleichung $F = 0$ eine ausgezeichnete Rolle, da sie diejenigen sind, durch die je eine continuierliche Schar von Integralgebilden geht (vgl. Theorem 23, § 2 des 12. Kap., S. 552). Daraus folgt, *dass die Berührungstransformation* (17) *jeden charakteristischen Streifen der Gleichung* $F = 0$ *in einen charakteristischen Streifen der Gleichung* $F_1 = 0$ *verwandelt.* Dies ergiebt sich also genau so wie früher für den besonderen Fall der Erweiterung einer Punkttransformation (vgl. Satz 20, § 5 des 12. Kap., S. 579). Dass die Erweiterungen der Punkttransformationen des Raumes sich dem allgemeinen Begriff: Berührungstransformation des Raumes unterordnen, erhellt nach § 5 des 12. Kap. sofort.

Ebenso wie damals (Satz 22, S. 581) erschliessen wir auch hier sofort, dass die Berührungstransformationen des Raumes die Involutionsbeziehung, sei es die zwischen Gleichungen oder die zwischen Functionen, invariant lässt.

Doch wir wollen hierauf an dieser Stelle nicht weiter eingehen. Erst im zweiten Bande werden wir die Theorie der Berührungstransformationen im Raume eingehend entwickeln. Hier wird uns in der Folge nur die Berührungstransformation beschäftigen, die wir vorhin (S. 646) als ein Beispiel erwähnten und die in § 4 des 10. Kap. genauer untersucht wurde, wenn wir auch damals absichtlich ihre Bezeichnung als Berührungstransformation unterdrückt haben.

Dass jene Elementtransformation eine Berührungstransformation ist, haben wir vorhin auf begrifflichem Wege erkannt. Denn sie führt

Vereine von ∞^2 Elementen immer wieder in solche über, wobei sie insbesondere die ∞^2 Elemente einer Geraden des Raumes (x, y, z) in die einer Kugel des Raumes (X, Y, Z) verwandelt. Irgend zwei vereinigte Flächenelemente im Raume (x, y, z) gehören immer einer Fläche an. Da diese vermöge der Transformation in einen Verein im Raume (X, Y, Z) übergeführt wird, so erhellt, dass jene Transformation in der That vereinigte Elemente in vereinigte Elemente überführt und deshalb eine Berührungstransformation ist.

Analytisch kann man dies aus den Gleichungen (53) und (54) in § 4 des 10. Kap., S. 468, erkennen. Sie ergeben nämlich

$$dZ - P\,dX - Q\,dY = \frac{1}{q - x}(dz - p\,dx - q\,dy).$$

Die Bedingung (19) ist also hier erfüllt.

Wir wollen diese Berührungstransformation, welche die Geraden des Raumes (x, y, z) in die Kugeln des Raumes (X, Y, Z) verwandelt, auf eine solche partielle Differentialgleichung erster Ordnung P. Diffgl., deren Char. Haupttgc. sind.

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

anwenden, *deren Charakteristiken Haupttangentencurven sind.*

Sie wird diese Differentialgleichung in eine neue partielle Differentialgleichung erster Ordnung im Raume (X, Y, Z) überführen:

$$F_1(X, Y, Z, P, Q) = 0.$$

Dabei gehen die charakteristischen Streifen von $F = 0$ in die der Gleichung $F_1 = 0$ über. Da aber die Curven der charakteristischen Streifen der Gleichung $F = 0$, also ihre Charakteristiken, nach Voraussetzung Haupttangentencurven der Integralflächen von $F = 0$ sind, so folgt aus Theorem 20, S. 474, sofort, *dass die Charakteristiken der neuen partiellen Differentialgleichung* $F_1 = 0$ *Krümmungslinien auf den Integralflächen von* $F_1 = 0$ *sind.* Part. Diffgl., deren Char. Krümmgsl. sind.

Wenn umgekehrt

$$F_1(X, Y, Z, P, Q) = 0$$

eine solche partielle Differentialgleichung erster Ordnung im Raume (X, Y, Z) ist, deren Charakteristiken auf allen Integralflächen Krümmungslinien sind, so liefert die Ausführung der inversen Transformation, indem wir von den Elementen (X, Y, Z, P, Q) zu den Elementen (x, y, z, p, q) übergehen, dass die hervorgehende partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

im Raume (x, y, z) die Eigenschaft hat, dass ihre Charakteristiken auf allen Integralflächen Haupttangentencurven sind.

Da wir im vorigen Paragraphen diejenigen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Charakteristiken Haupttangentencurven sind, sämtlich bestimmt haben, so erhellt, *dass hiermit auch die Bestimmung aller derjenigen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung geleistet ist, deren Charakteristiken auf allen Integralflächen Krümmungslinien sind.*

Wir wollen aber die Sachlage noch eingehender untersuchen, um die Erledigung des Problems, die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zu bestimmen, deren Charakteristiken Krümmungslinien sind, in einer durchsichtigeren Form darzustellen. Um den Leser mit diesen Theorien vertraut zu machen, holen wir etwas weiter aus und betrachten im Anschluss an das 10. Kap. noch eine Reihe von Gebilden und Problemen in den beiden Räumen (x, y, z) und (X, Y, Z), die einander entsprechen.

Zu diesem Zwecke gehen wir näher auf die Beziehungen ein, die vermöge unserer Berührungstransformation zwischen den beiden Räumen (x, y, z) und (X, Y, Z) hergestellt werden. Wir wissen, dass jeder Geraden des Raumes (x, y, z) eine Kugel des Raumes (X, Y, Z) entspricht, also jeder Schar von ∞^1 Geraden eine Schar von ∞^1 Kugeln. Dies führte uns schon früher (S. 472) zu dem Ergebnis: Einer Regelfläche im Raume (x, y, z) entspricht die Umhüllende einer Schaar von ∞^1 Kugeln im Raume (X, Y, Z).

Ein Strahlen- oder Geradensystem, d. h. eine Schar von ∞^2 Geraden, die im Raume (x, y, z) gegeben ist, liefert im Raume (X, Y, Z) eine Schar von ∞^2 Kugeln. Zur Abkürzung der Redeweise wollen wir

Kugel-system.

festsetzen, *dass unter einem Kugelsystem eine Schar von ∞^2 Kugeln verstanden werden soll.* Jedem Strahlensystem des Raumes (x, y, z) entspricht also ein Kugelsystem des Raumes (X, Y, Z). Die beiden Brennflächen des Strahlensystems (vgl. S. 456) gehen durch unsere Berührungstransformation in zwei Flächen über, die von allen ∞^2 Kugeln des Kugelsystems berührt werden. Wir werden sie als die *Brennflächen des Kugelsystems* bezeichnen. Vermöge unserer Transformation geht z. B. ein im Raume (x, y, z) gelegenes Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe, d. h. die Gesamtheit der Schnittgeraden zweier fester Geraden (vgl. Satz 12, § 4 des 7. Kap., S. 295) in ein solches Kugelsystem des Raumes (X, Y, Z) über, das aus allen ∞^2 Kugeln besteht, die zwei feste Kugeln berühren, denn wir wissen, dass zwei einander schneidenden Geraden des Raumes (x, y, z) zwei einander berührende Kugeln des Raumes (X, Y, Z) entsprechen (nach S. 464).

Betrachten wir eine Fläche ω im Raume (x, y, z). Sie hat zwei

Scharen von Haupttangentencurven. Wir wählen die Haupttangentencurven einer Schar aus und construieren ihre ∞^2 Tangenten. Diese ∞^2 Haupttangenten der Fläche ω bilden ebenfalls ein Strahlensystem. Ihm entspricht im Raume (X, Y, Z) folglich ein Kugelsystem. Der Fläche ω entspricht im Raume (X, Y, Z) eine Fläche Ω. Den Elementen der Fläche ω längs einer Haupttangentencurve entsprechen solche Elemente der Fläche Ω, die längs einer Krümmungslinie liegen. Eine Haupttangente hat mit ω zwei benachbarte Elemente gemein und geht daher in eine Kugel über, die mit Ω zwei consecutive Elemente, also zwei Elemente längs einer Krümmungslinie gemein hat. (Vgl. die Tabelle S. 475.) Eine derartige Kugel wollen wir eine *Krümmungskugel* der Fläche Ω nennen. Die Krümmungskugeln sollen also die Kugeln sein, welche die Hauptkrümmungskreise der Fläche Ω zu grössten Kreisen haben. Nun erhellt, dass dem Strahlensystem der vorhin ausgewählten Schar von ∞^2 *Haupttangenten* der Fläche ω im anderen Raume (X, Y, Z) ein *Kugelsystem* entspricht, *das aus der einen Schar von ∞^2 Krümmungskugeln der Fläche Ω besteht.*

Liegt im Raume (x, y, z) ein Liniencomplex, also eine Schar von ∞^3 Geraden, vor, so geht er vermöge der Berührungstransformation in eine Schar von ∞^3 Kugeln im Raume (X, Y, Z) über. Eine Schar von ∞^3 Kugeln bezeichnen wir kurz als einen *Kugelcomplex. Jeder Liniencomplex des Raumes (x, y, z) liefert demnach einen Kugelcomplex des Raumes (X, Y, Z).* So giebt die Schar aller ∞^3 Tangenten einer Fläche ω den Kugelcomplex, der aus allen ∞^3 Kugeln besteht, welche die zugeordnete Fläche Ω berühren. Kugelcomplex.

Ein *linearer Liniencomplex* des Raumes (x, y, z) besteht aus allen den Geraden:

$$x = rz + \varrho, \quad y = sz + \sigma, \tag{20}$$

die einer Gleichung von der Form:

$$A\sigma - B\varrho + C(s\varrho - r\sigma) + Dr + Es + G = 0 \tag{21}$$

genügen, nach Theorem 7, § 3 des 6. Kap., S. 218. Nun liefert eine Gerade (20) mit den Liniencoordinaten r, s, ϱ, σ im Raume (x, y, z) eine Kugel, deren Gleichung nach Theorem 19, § 4 des 10. Kap., S. 463, so lautet:

$$\left(X - \frac{\varrho + s}{2r}\right)^2 + \left(Y + i\frac{\varrho - s}{2r}\right)^2 + \left(Z - \frac{\eta - 1}{2r}\right)^2 = \left(\frac{\eta + 1}{2r}\right)^2, \tag{22}$$

wobei:

$$\eta \equiv s\varrho - r\sigma .$$

ist. Die ∞^3 Geraden des linearen Liniencomplexes gehen somit in diejenigen ∞^3 Kugeln über, in deren Gleichung (22) die Parameter r, s, ϱ, σ an die Gleichung (21) gebunden sind. Diese ∞^3 Kugeln (22) haben eine besondere Eigenschaft. Sie schneiden nämlich sämtlich eine feste Kugel unter constantem Winkel φ.

Um dies zu beweisen, wollen wir unter $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ die Mittelpunktscoordinaten und unter $\mathfrak{R}$ den Radius einer Kugel des Kugelcomplexes verstehen, sodass diese Kugel die Gleichung hat:

$$(23) \qquad (X-\mathfrak{X})^2 + (Y-\mathfrak{Y})^2 + (Z-\mathfrak{Z})^2 - \mathfrak{R}^2 = 0.$$

Nach (22) ist dann

$$(24) \quad \mathfrak{X} = \frac{\varrho + s}{2r}, \quad \mathfrak{Y} = -i\frac{\varrho - s}{2r}, \quad \mathfrak{Z} = \frac{\eta - 1}{2r}, \quad \mathfrak{R} = \pm\frac{\eta + 1}{2r}.$$

Hieraus folgt umgekehrt:

$$(24') \quad \begin{cases} r = \dfrac{1}{\pm\mathfrak{R} - \mathfrak{Z}}, \quad s = \dfrac{\mathfrak{X} - i\mathfrak{Y}}{\pm\mathfrak{R} - \mathfrak{Z}}, \quad \varrho = \dfrac{\mathfrak{X} + i\mathfrak{Y}}{\pm\mathfrak{R} - \mathfrak{Z}}, \\ \sigma = \dfrac{\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2 - \mathfrak{R}^2}{\pm\mathfrak{R} - \mathfrak{Z}}, \quad \eta = \dfrac{\pm\mathfrak{R} + \mathfrak{Z}}{\pm\mathfrak{R} - \mathfrak{Z}}. \end{cases}$$

Setzen wir diese Werte in (21) ein, so kommt:

$$(25) \quad \begin{cases} A(\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2 - \mathfrak{R}^2) - (B-E)\mathfrak{X} - i(B+E)\mathfrak{Y} + \\ \qquad + (C-G)\mathfrak{Z} \pm (C+G)\mathfrak{R} + D = 0. \end{cases}$$

Dem Kugelcomplexe gehören also alle die Kugeln (23) an, deren Bestimmungsstücke $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{R}$ die Bedingung (25) erfüllen.

Wenn nun diese Kugeln $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{R})$ eine Kugel mit den Coordinaten $\mathfrak{X}_0, \mathfrak{Y}_0, \mathfrak{Z}_0, \mathfrak{R}_0$ in der That unter constantem Winkel φ schnitten, so müsste für alle diese Kugeln:

$$(\mathfrak{X}-\mathfrak{X}_0)^2 + (\mathfrak{Y}-\mathfrak{Y}_0)^2 + (\mathfrak{Z}-\mathfrak{Z}_0)^2 + (i\mathfrak{R} - i\mathfrak{R}_0)^2 - 2\mathfrak{R}\mathfrak{R}_0\cos\varphi = 0$$

sein. Insbesondere müsste dies für die im Complex enthaltenen Nullkugeln der Fall sein, für die $\mathfrak{R} = 0$ ist. Die Mittelpunkte $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ dieser Nullkugeln wären dann auf der festen Kugel gelegen, d. h. die vorstehende Gleichung müsste die feste Kugel darstellen, wenn in ihr $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ als laufende Coordinaten betrachtet und $\mathfrak{R} = 0$ gesetzt wird. So käme als Gleichung der fraglichen festen Kugel:

$$(\mathfrak{X}-\mathfrak{X}_0)^2 + (\mathfrak{Y}-\mathfrak{Y}_0)^2 + (\mathfrak{Z}-\mathfrak{Z}_0)^2 - \mathfrak{R}_0^2 = 0.$$

Da aber $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{R} = 0$ der Bedingung (25) genügen müssen, die sich auch so schreiben lässt:

$$\left(\mathfrak{X} - \frac{B-E}{2A}\right)^2 + \left(\mathfrak{Y} - i\frac{B+E}{2A}\right)^2 + \left(\mathfrak{Z} + \frac{C-G}{2A}\right)^2 -$$
$$- \mathfrak{R}^2 \pm \frac{C-G}{A}\mathfrak{R} - \frac{(C-G)^2 - 4(AD+BE)}{4A^2} = 0,$$

so müsste die Gleichung der festen Kugel in X, Y, Z so lauten:

$$\left(X - \frac{B-E}{2A}\right)^2 + \left(Y - i\frac{B+E}{2A}\right)^2 + \left(Z + \frac{C-G}{2A}\right)^2 -$$
$$- \frac{(C-G)^2 - 4(AD+BE)}{4A^2} = 0.$$

Die Coordinaten der festen Kugel wären hiernach:

$$(26)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}_0 = \dfrac{B-E}{2A}, \quad \mathfrak{Y}_0 = i\dfrac{B+E}{2A}, \quad \mathfrak{Z}_0 = -\dfrac{C-G}{2A}, \\ \mathfrak{R}_0 = \dfrac{1}{2A}\sqrt{(C-G)^2 - 4(AD+BE)}. \end{cases}$$

Jedenfalls lässt sich die Gleichung (25) des Complexes so schreiben*):

$$(25')\quad (\mathfrak{X}-\mathfrak{X}_0)^2 + (\mathfrak{Y}-\mathfrak{Y}_0)^2 + (\mathfrak{Z}-\mathfrak{Z}_0)^2 + (i\mathfrak{R} - i\mathfrak{R}_0)^2 - 2\mathfrak{R}\mathfrak{R}_0\cos\varphi = 0,$$

wobei

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{(C-G)^2 - 4(AD+BE)} \mp (C-G)}{\sqrt{(C-G)^2 - 4(AD+BE)}}$$

ist. Da φ mithin für alle Kugeln des Kugelcomplexes denselben Wert hat, so folgt in der That, *dass der Kugelcomplex* (25) *im Raume* (X, Y, Z), *der aus dem linearen Liniencomplex* (21) *im Raume* (x, y, z) *vermöge unserer Berührungstransformation hervorgeht, aus allen den* ∞^3 *Kugeln* ($\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{R}$) *besteht, die eine feste Kugel* (26) *unter einem gewissen constanten Winkel schneiden.* **Kugeln, d. eine Kugel unter const. Winkel schneiden.**

Es giebt ∞^5 lineare Liniencomplexe, da ihre allgemeine Gleichung (21) fünf wesentliche Constanten enthält. Andererseits giebt es im Raume (X, Y, Z) gerade ∞^4 Kugeln. Wählen wir eine solche als die feste Kugel (26) und wählen wir den Winkel φ beliebig, aber bestimmt, so ergiebt sich ein Kugelcomplex, bestehend aus allen ∞^3 Kugeln, welche die feste Kugel unter dem Winkel φ schneiden. Mithin giebt es gerade ∞^5 derartige Kugelcomplexe, was nach dem Vorhergehenden auch von vornherein klar ist.

Ist insbesondere der lineare Liniencomplex (21) ein *specieller*, d. h. besteht er aus allen Schnittgeraden einer festen Geraden, so besteht der zugehörige Kugelcomplex augenscheinlich aus allen ∞^3 Kugeln, die eine feste Kugel *berühren.*

---

*) Oder so:

$$(\mathfrak{X}-\mathfrak{X}_0)^2 + (\mathfrak{Y}-\mathfrak{Y}_0)^2 + (\mathfrak{Z}-\mathfrak{Z}_0)^2 + \left(i\mathfrak{R} \mp i\frac{C-G}{2A}\right)^2 + \frac{AD+BE}{A^2} = 0.$$

Wir stellen die Ergebnisse tabellarisch zusammen:

Zusammenstellg.

Raum (x, y, z).	Raum (X, Y, Z).
1) Schar von ∞^1 Geraden.	1) Schar von ∞^1 Kugeln.
2) Strahlensystem und seine beiden Brennflächen.	2) Kugelsystem und seine beiden Brennflächen.
3) Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe.	3) Kugelsystem, bestehend aus allen ∞^2 Kugeln, die zwei feste Kugeln berühren.
4) Strahlensystem der Haupttangenten der einen Schar auf einer Fläche ω.	4) Kugelsystem der Krümmungskugeln der einen Schar, die zu einer Fläche Ω gehören.
5) Liniencomplex.	5) Kugelcomplex.
6) Linearer Liniencomplex.	6) Kugelcomplex, bestehend aus allen ∞^3 Kugeln, die eine feste Kugel unter constantem Winkel schneiden.
7) Specieller linearer Liniencomplex.	7) Kugelcomplex, bestehend aus allen ∞^3 Kugeln, die eine feste Kugel berühren.

Betrachten wir im Raume (x, y, z) ein *Strahlensystem*. Seine ∞^2 Geraden sind die Integralcurven eines gewissen Systems von zwei simultanen gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\frac{dx}{\alpha(x, y, z)} = \frac{dy}{\beta(x, y, z)} = \frac{dz}{\gamma(x, y, z)}$$

und zugleich die Charakteristiken der zugeordneten linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\alpha p + \beta q - \gamma = 0, \tag{27}$$

und zwar bilden sie eine vollständige Lösung der letzteren. (Vgl. hierzu die Note auf S. 488, § 1 des 11. Kap.) Jede Regelfläche, deren Geraden dem Strahlensystem angehören, ist eine Integralfläche. Insbesondere sind die beiden Brennflächen singuläre Integralflächen. Die Curven, längs deren die Strahlen des Systems die Brennflächen berühren, sind augenscheinlich ebenfalls Integralgebilde.

Part. Diffgl. eines Kugelsystems. Nehmen wir nun unsere Berührungstransformation vor, so geht das Strahlensystem in ein *Kugelsystem* im Raume (X, Y, Z) über. Die lineare partielle Differentialgleichung (27) wird in eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$\varphi(X, Y, Z, P, Q) = 0$$

übergeführt, für die alle ∞^2 Kugeln des Kugelsystems eine vollständige Lösung vorstellen. Die allgemeine Integralfläche von $\varphi = 0$ ist demnach eine Fläche, die von ∞^1 Kugeln des Systems umhüllt wird. Insbesondere sind die Brennflächen des Kugelsystems singuläre Integralflächen.

In ähnlicher Weise stehen die folgenden Probleme und Theorien einander gegenüber: Weitere Ausführungen.

Raum (x, y, z).

Problem: Vorgelegt sei ein beliebiger Liniencomplex. Man soll alle in ihm enthaltenen Strahlensysteme bestimmen, deren Geraden Haupttangenten der einen Schar auf einer Fläche (Brennfläche des Strahlensystems) sind.

Dieses Problem findet nach der Note in § 1 des 9. Kap., S. 370, seinen analytischen Ausdruck in einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$F(x, y, z, p, q) = 0.$$

Problem: Vorgelegt sei ein beliebiger Liniencomplex. Gesucht werden alle Flächen, deren Haupttangenten der einen Schar dem Liniencomplex angehören.

Dieses Problem findet seinen analytischen Ausdruck in einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung von der Form

$$r + 2Ns + N^2 t = 0,$$

nach § 1 des 9. Kap, S. 371. Ist

$$\Phi(y\,dz - z\,dy,\ z\,dx - x\,dz,\ x\,dy - y\,dx,\ dx,\ dy,\ dz) = 0$$

die Monge'sche Gleichung des vorgelegten Liniencomplexes, so erhält man die betreffende Differentialgleichung, indem man vermöge $\Phi = 0$ und

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

die Grösse $\frac{dy}{dx}$ als Function von x, y, z, p, q berechnet und in die Differentialgleichung der Haupttangentencurven

$$r + 2\frac{dy}{dx}s + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 t = 0$$

einsetzt.

Raum (X, Y, Z).

Problem: Vorgelegt sei ein Kugelcomplex, also eine beliebige Schar von ∞^3 Kugeln. Alle in ihm enthaltenen Kugelsysteme (Scharen von ∞^2 Kugeln) zu bestimmen, deren Kugeln die eine Schar der Krümmungskugeln einer Fläche bilden.

Dies Problem findet seinen analytischen Ausdruck in einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$F_1(X, Y, Z, P, Q) = 0.$$

Problem: Vorgelegt sei ein beliebiger Kugelcomplex. Gesucht werden alle Flächen, deren Krümmungskugeln der einen Schar dem Kugelcomplex angehören.

Dieses Problem findet seinen analytischen Ausdruck in einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Ist

$$\Phi(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{R}) = 0$$

die Gleichung des vorgelegten Kugelcomplexes, in der $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ die Mittelpunktscoordinaten und $\mathfrak{R}$ den Radius der Kugeln des Complexes bedeuten, so erhält man die betreffende Differentialgleichung, wenn man $\mathfrak{R}$ vermöge $\Phi = 0$ und

$$(\mathfrak{X} - X)^2 + (\mathfrak{Y} - Y)^2 + (\mathfrak{Z} - Z)^2 = \mathfrak{R}^2,$$
$$(\mathfrak{X} - X) + (\mathfrak{Z} - Z)P = 0,$$
$$(\mathfrak{Y} - Y) + (\mathfrak{Z} - Z)Q = 0$$

als Function von X, Y, Z, P, Q berechnet und in die Gleichung für die Hauptkrümmungsradien

$$(RT - S^2)\mathfrak{R}^2 - \\ - \{(1 + Q^2)R - 2PQS + (1 + P^2)T\} \\ \sqrt{1 + P^2 + Q^2}\,\mathfrak{R} + (1 + P^2 + Q^2)^2 = 0$$

einsetzt. Hierbei bedeuten R, S, T die zweiten partiellen Ableitungen von Z nach X und Y.

Von den Kugelcomplexen sei hier noch eine *besondere* Kategorie erwähnt: Wir betrachten die ∞^3 Kugeln, deren Mittelpunkte $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ auf einer gegebenen Fläche Kugelcomplex der die Dilatat. gestattet.

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) = 0$$

liegen, während ihre Radien $\mathfrak{R}$ beliebig sind. Man kann diese Kugelcomplexe in besonderer Weise definieren: Im Raume giebt es eine Berührungstransformation, die als *Dilatation* bezeichnet wird und das Analogon der Dilatation in der Ebene ist (vgl. § 2 des 1. Kap., S. 14). Bei ihr wird jedes Flächenelement um eine constante Strecke n parallel verschoben, sodass der Punkt des Elementes dabei auf der Normalen des Elementes bleibt. Es leuchtet ein, dass diese Transformation die Flächenelemente einer Kugel vom Radius $\mathfrak{R}$ in die einer concentrischen Kugel vom Radius $\mathfrak{R} \pm n$ verwandelt. Man sieht, dass die soeben betrachteten Kugelcomplexe als diejenigen Kugelcomplexe charakterisiert werden können, von denen jeder bei allen Dilatationen des Raumes in sich transformiert wird. Wenn nun eine Fläche J die Fläche $\mathfrak{F} = 0$ zur einen Centrafläche hat, so sind ∞^2 Kugeln des Complexes die Krümmungskugeln der einen Schar der Fläche J. Nach Gauss kommt das Problem, die Flächen J zu finden, die $\mathfrak{F} = 0$ zur einen Centrafläche haben, auf die Bestimmung der geodätischen Linien der Fläche $\mathfrak{F} = 0$ zurück. Dem Kugelcomplex entspricht im Raume (x, y, z) ein gewisser Liniencomplex. Die Bestimmung der Flächen, deren Haupttangenten der einen Schar diesem Liniencomplex angehören, liefert im Raume (X, Y, Z) des Kugelcomplexes die Flächen, deren Krümmungskugeln der einen Schar dem Kugelcomplex $\mathfrak{F} = 0$ angehören. *Im vorliegenden Fall deckt sich also das Problem, die Flächen zu finden, deren Haupttangenten der einen Schar jenem Liniencomplex angehören, mit dem Problem, die geodätischen Linien der Fläche $\mathfrak{F} = 0$ zu bestimmen.*

Part. Diffgl., deren Char. Krümmgsl. sind.

Wir wenden uns jetzt wieder zu unserem früheren Problem zurück, nämlich zu dem Problem, *diejenigen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung*

$$F_1(X, Y, Z, P, Q) = 0$$

zu bestimmen, deren Charakteristiken auf allen Integralflächen Krümmungslinien sind.

Wir haben gesehen, dass die gesuchten partiellen Differentialgleichungen vermöge unserer Berührungstransformation aus denjenigen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

hervorgehen, deren Charakteristiken auf allen Integralflächen Haupttangentencurven sind. Im vorigen Paragraphen fanden wir im Theorem 25 (S. 639), dass die Differentialgleichungen der letzteren Art in zwei wesentlich verschiedene Kategorien zerfallen. Die eine Kategorie besteht aus denjenigen linearen partiellen Differentialgleichungen, die in der oben auseinandergesetzten Beziehung zu Strahlensystemen stehen, d. h. für die alle ∞^2 Geraden eines Strahlensystems eine vollständige Lösung bilden. Die andere Kategorie ist die Gesamtheit der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, die zu den Monge'schen Gleichungen von Liniencomplexen gehören.

Wenden wir auf diese Differentialgleichungen unsere Berührungstransformation an, so gelangen wir folglich unmittelbar zu dem

Theorem 26: *Sind die Charakteristiken einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung im Raume Krümmungslinien auf allen Integralflächen, so sind zwei wesentlich verschiedene Fälle möglich. Im ersten Fall besteht eine vollständige Lösung aus ∞^2 Kugeln, die beliebig gewählt werden können, sodass die allgemeine Integralfläche von beliebigen ∞^1 Kugeln dieses Kugelsystems umhüllt wird. Im zweiten Fall ist die partielle Differentialgleichung der analytische Ausdruck des Problems: Alle Flächen zu finden, von denen die ∞^2 Krümmungskugeln der einen Schar einem beliebig gegebenen Kugelcomplex angehören. Alle derartigen partiellen Differentialgleichungen lassen sich durch Differentiation und Elimination aufstellen*).* **Ergebnis.**

Um die *analytische* Bedingung dafür aufzustellen, dass die Charakteristiken einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, die wir statt in der Form $F_1 = 0$ der Bequemlichkeit halber nunmehr so schreiben: **Anal. Bed. f. p. Diffgln. mit Krümmgsl. als Char.**

$$F(X, Y, Z, P, Q) = 0,$$

auf allen Integralflächen Krümmungslinien werden, verfahren wir so: Auf einer Integralfläche: $Z = \omega(X, Y)$ erfüllen die Streifen längs der Krümmungslinien nach S. 473, § 4 des 10. Kap., die Differentialgleichung:

$$(dX + PdZ)\,dQ - (dY + Q\,dZ)\,dP = 0.$$

Andererseits erfüllen die charakteristischen Streifen nach Satz 12, § 2 des 12. Kap., S. 555, das System:

$$\frac{dX}{F_P} = \frac{dY}{F_Q} = \frac{dZ}{F_P P + F_Q Q} = \frac{dP}{-F_X - F_Z P} = \frac{dQ}{-F_Y - F_Z Q}.$$

Mithin lautet die gesuchte Bedingung so:

$$\begin{aligned}(28)\qquad & [F_P + P(F_P P + F_Q Q)]\,[F_Y + F_Z Q] - \\ & - [F_Q + Q(F_P P + F_Q Q)]\,[F_X + F_Z P] = 0\end{aligned}$$

oder anders geordnet:

$$\begin{aligned}(28')\qquad & (F_Y + F_Z Q)\,F_P - (F_X + F_Z P)\,F_Q + \\ & + (F_Y P - F_X Q + F_Z PQ)\,(F_P P + F_Q Q) = 0.\end{aligned}$$

Eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung $F = 0$ im Raume (X, Y, Z) hat also dann und nur dann die Eigenschaft, dass ihre

---

*) Lie, Verh. d. G. d. W. zu Christiania Oct. 1870.

Charakteristiken auf allen Integralflächen Krümmungslinien sind, wenn die Gleichung (28) *oder* (28′) *infolge von* $F = 0$ *besteht*)*.

P. Dffgl., deren Char. Hauptgc. u. Krümmgsl. sind.

Wir wenden uns nun zu einem noch specielleren, aber immerhin interessanten Problem, indem wir diejenigen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung suchen, *deren Charakteristiken auf den Integralflächen zugleich Haupttangentencurven und Krümmungslinien sind.*

Wenn auf einer Fläche eine Curvenschar zugleich eine Schar von Haupttangentencurven und eine Schar von Krümmungslinien ist, so fallen entweder die beiden Scharen der Haupttangentencurven oder die beiden Scharen der Krümmungslinien zusammen. Im ersteren Falle sind die Haupttangentencurven Geraden, im letzteren sind die Krümmungslinien Minimalgeraden. In jedem Falle also sind die Charakteristiken der gesuchten partiellen Differentialgleichungen *Geraden.*

Nun bestimmten wir im vorigen Paragraphen alle partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Charakteristiken Geraden sind (vgl. Satz 4, S. 642). Entweder haben wir es mit einer partiellen Differentialgleichung zu thun, die zum Complex aller Tangenten einer Fläche (oder den Treffgeraden einer Curve) gehören, — und auf ihren Integralflächen sind die Charakteristiken Haupttangentencurven und Krümmungslinien, da die Flächen abwickelbar sind, — oder aber die partielle Differentialgleichung ist linear und gehört zu einem Strahlensystem, dessen Geraden die Charakteristiken sind. In diesem letzteren Falle sind die Integralflächen die Regelflächen des Strahlensystems. Aber die Geraden einer nicht abwickelbaren Regelfläche, die ja stets Haupttangentencurven sind, sind nur dann auch Krümmungslinien, wenn sie Minimalgeraden sind.

Also hat sich ergeben:

Satz 5: *Sind die Charakteristiken einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung*

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

im Raume (x, y, z) *zugleich Haupttangentencurven und Krümmungslinien, so ist die partielle Differentialgleichung entweder von der Farm*

$$F(p, q, z - xp - yq) = 0,$$

oder aber sie ist linear und ihre Charakteristiken sind ∞^2 *Minimalgeraden.*

Lin. p. Dffgl., deren Char. Krümmgsl. sind.

Schliesslich stellen wir uns noch das Problem, die *linearen* partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zu bestimmen, *deren Charakteristiken Krümmungslinien sind.*

---

*) Wir bemerken auch hier (vgl. Fussnote S. 640), dass die Gleichung (28) eine *semilineare* partielle Differentialgleichung erster Ordnung für F ist.

Es möge

(29) $$\alpha(x, y, z)p + \beta(x, y, z)q - \gamma(x, y, z) = 0$$

eine solche Gleichung sein. Sie hat ∞^2 Charakteristiken, es sind dies die Integralcurven des Systems

$$\frac{dx}{\alpha(x, y, z)} = \frac{dy}{\beta(x, y, z)} = \frac{dz}{\gamma(x, y, z)}.$$

Zunächst wollen wir annehmen, dass die ∞^2 Charakteristiken die Orthogonalcurven einer Schar von ∞^1 Flächen Char. als Orthogonal-curven.

$$\omega(x, y, z) = \text{Const.}$$

seien, d. h. dass α, β, γ proportional den Ableitungen von ω oder also

$$\alpha dx + \beta dy + \gamma dz = \varrho d\omega$$

sei, wobei ϱ eine Function von x, y, z bedeutet. Wir werden später factisch erkennen, dass der hier zunächst ins Auge gefasste Fall der einzig mögliche ist. Wählen wir auf einer der ∞^1 Flächen $\omega =$ Const. eine beliebige Curve c und ziehen wir durch die Punkte von c die orthogonalen Trajectorien der Flächen $\omega =$ Const., d. h. Integralcurven von (29), so bilden diese Trajectorien eine Integralfläche von (29). Diese Integralfläche schneidet alle Flächen $\omega =$ Const. senkrecht, und die Schnittlinien müssen Krümmungslinien auf der Integralfläche sein, da sie die Trajectorien orthogonal schneiden und da die Trajectorien selbst nach Voraussetzung Krümmungslinien sein sollen. Nach einem bekannten Satze von Dupin ist daher die auf der einen Fläche $\omega =$ Const. willkürlich gewählte Curve c auch eine Krümmungslinie dieser Fläche. Die Flächen $\omega =$ Const. haben mithin unbestimmte Krümmungslinien. Es giebt aber bekanntlich nur zwei Kategorien von Flächen mit unbestimmten Krümmungslinien, nämlich die *Kugeln* und die *Minimal-Developpabeln*, d. h. die von Minimalgeraden erzeugten abwickelbaren Flächen.

Sind die Flächen $\omega =$ Const. *Minimal-Developpabeln*, so sind ihre Tangentenebenen Minimalebenen. Aber die Senkrechten zu einer Minimalebene sind nach der bekannten projectiven Deutung der Orthogonalität (vgl. S. 429, § 1 des 10. Kap.) die in der Ebene verlaufenden Minimalgeraden. Daraus folgt, dass die orthogonalen Trajectorien jener Schar von ∞^1 Minimal-Developpabeln die ∞^3 Minimalgeraden in diesen Flächen selbst sind. Dies führt daher zu den linearen partiellen Differentialgleichungen (29), die zu Strahlensystemen von Minimalgeraden gehören. Jede Integralfläche einer solchen Differentialgleichung, d. h. jede Regelfläche eines solchen Strahlensystems, hat in der That ihre ∞^1 Charakteristiken, nämlich ihre ∞^1 erzeugenden Minimalgeraden, zu Krümmungslinien.

Sind die Flächen $\omega =$ Const. *Kugeln*, so giebt es eine lineare partielle Differentialgleichung (29), deren Integralcurven oder Charakteristiken die ∞^2 orthogonalen Trajectorien der Kugeln sind. Jede Integralfläche, d. h. jede von ∞^1 dieser Curven erzeugte Fläche durchsetzt alle ∞^1 Kugeln senkrecht und schneidet daher nach dem Satze von Joachimsthal alle ∞^1 Kugeln in der einen Schar der Krümmungslinien der Fläche. Die andere Schar der Krümmungslinien sind senkrecht zu diesen ∞^1 sphärischen Schnittcurven und daher die ∞^1 erzeugenden orthogonalen Trajectorien oder Charakteristiken.

Hiermit sind zwei Kategorien von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung gewonnen, deren Charakteristiken auf allen Integralflächen Krümmungslinien sind. Die Charakteristiken der einen bilden ein beliebiges Strahlensystem von Minimalgeraden, die der anderen sind die Orthogonalcurven einer beliebig gewählten Schar von ∞^1 Kugeln.

Wir werden nachher (S. 664) erkennen, dass hiermit *alle* linearen partiellen Differentialgleichungen der gewünschten Art gefunden sind.

Ehe wir aber daran gehen, dies nachzuweisen, machen wir darauf aufmerksam, dass die fragliche Kategorie von linearen partiellen Differentialgleichungen in einer umfassenderen Kategorie enthalten ist, der eine ebenfalls interessante Eigenschaft zukommt, sodass wir es vorziehen, zuerst diese allgemeinere Kategorie zu bestimmen, und dann erst das bisherige Problem vollständig zu erledigen. Zu der in Rede stehenden umfassenderen Kategorie wird man auf folgende Weise geführt.

Neues Problem.

Nehmen wir an, die lineare partielle Differentialgleichung

$$\alpha p + \beta q - \gamma = 0 \tag{29}$$

habe die Eigenschaft, dass ihre Charakteristiken auf allen Integralflächen Krümmungslinien sind. Alsdann schneiden sich zwei Integralflächen längs einer Krümmungslinie. Nach einem Satze von Bonnet bilden sie daher längs ihrer Schnittlinie einen *constanten Winkel* mit einander. Wohlbemerkt hängt die Grösse dieses Winkels noch von der Auswahl des Paares von Integralflächen ab.

Lin. p. Dffgl., deren Integralfln. const. Winkel bilden.

Diese Überlegung führt uns dazu, überhaupt das Problem zu stellen, alle *linearen* partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zu bestimmen, *von denen je zwei Integralflächen längs ihrer Schnittlinie (Charakteristik) einen constanten Winkel mit einander bilden.* Wie gesagt, wollen wir zunächst dies Problem erledigen.

Zu diesem Zwecke nehmen wir an, es sei

(29) $$\alpha p + \beta q - \gamma = 0$$

eine lineare partielle Differentialgleichung von der verlangten Art. Ist dann u ein beliebiges Integral des äquivalenten Systems

(30) $$\frac{dx}{\alpha} = \frac{dy}{\beta} = \frac{dz}{\gamma},$$

so stellt $u =$ Const. ∞^1 Integralflächen von (29) dar. Diese Flächen haben ∞^2 orthogonale Trajectorien. Von diesen wählen wir eine aus. Da jede Fläche $u =$ Const. ∞^1 Charakteristiken enthält, so geht durch die Schnittpunkte jener Trajectorie mit den Flächen $u =$ Const. je eine dieser Charakteristiken. Insgesamt erhalten wir so ∞^1 Charakteristiken, die eine Integralfläche bilden. Diese Fläche enthält die ausgewählte Trajectorie. Da sie in den Punkten dieser Trajectorie alle Flächen $u =$ Const. senkrecht trifft und andererseits jede Fläche $u =$ Const. unter constantem Winkel schneidet, so folgt, dass sie alle Flächen $u =$ Const. überall rechtwinklig schneidet. Indem wir so, wie mit der ausgewählten Trajectorie, überhaupt mit ∞^1 orthogonalen Trajectorien der Flächenschar $u =$ Const. verfahren, erhalten wir ∞^1 Integralflächen $v =$ Const., die alle ∞^1 Integralflächen $u =$ Const. *orthogonal* schneiden. Dann ist v ebenfalls ein Integral des Systems (30), und insbesondere ist: Orthog. Integralfln.

(31) $$u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z \equiv 0.$$

Das Integral v ist nur dann von u abhängig, wenn die Flächen $u =$ Const. und die zu ihnen orthogonalen Flächen $v =$ Const. zusammenfallen. Dies lässt sich immer vermeiden, sobald die Flächen $u =$ Const. nicht lauter Minimalebenen zu Tangentenebenen haben, d. h. keine Minimal-Developpabeln sind. Dass die Integralflächen *nicht sämtlich* Minimal-Developpabeln sind, folgt daraus, dass die letzteren die *nicht* lineare partielle Differentialgleichung $1 + p^2 + q^2 = 0$ erfüllen. Wir können also immer annehmen, *dass das System* (30) *zwei von einander unabhängige Integrale u, v habe, die der Bedingung* (31) *genügen.*

Sind die Flächen $u =$ Const. Minimal-Developpabeln, aber die Flächen $v =$ Const. nicht, so sind die Flächen $v =$ Const. erzeugt von den Orthogonalcurven der Minimal-Developpabeln $u =$ Const., d. h. von Minimalgeraden. Die Flächen $u =$ Const. und $v =$ Const. schneiden also einander in Minimalgeraden, d. h. die Charakteristiken müssen Minimalgeraden sein. Dann aber sind sie Krümmungslinien auf allen Integralflächen, und daher schneiden die Integralflächen einander in diesem Falle nach einem bekannten Satze sicher unter constanten Winkeln. Dieser Fall ist also erledigt.

Ist φ irgend ein Integral des Systems (29), so können wir für dieses dieselbe Betrachtung wie soeben für u anstellen. Es giebt also ein zweites Integral ψ des Systems (29), für das:

$$\varphi_x\psi_x + \varphi_y\psi_y + \varphi_z\psi_z \equiv 0$$

ist. Aber jedes Integral des Systems (30) ist eine Function der beiden von einander unabhängigen Integrale u und v; also sind auch φ und ψ Functionen von u und v allein. Daher lautet die letzte Identität so:

$$\varphi_u\psi_u(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) + (\varphi_u\psi_v + \varphi_v\psi_u)(u_xv_x + u_yv_y + u_zv_z) + \\ + \varphi_v\psi_v(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \equiv 0$$

oder nach (31) so:

$$\frac{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = -\frac{\varphi_v\psi_v}{\varphi_u\psi_u}.$$

Die rechte Seite hiervon ist eine Function von u und v allein.

Integrale v. besond. Art. Diese Betrachtungen lehren also: Es giebt zu jedem Integral u des Systems (30) ein zweites Integral v dieses Systems derart, dass

(31) $$u_xv_x + u_yv_y + u_zv_z \equiv 0,$$

(32) $$\frac{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \equiv \omega(u, v)$$

ist. Ist u allgemein gewählt, so sind dabei die Integrale u und v von einander unabhängig. Ferner dürfen wir annehmen, dass in (32) auf der linken Seite der Zähler nicht identisch gleich Null ist, denn sonst wären, da u ein allgemein gewähltes Integral des Systems (30) ist, *alle* Integralflächen Minimal-Developpabeln. Ebenso darf der Nenner als von Null verschieden angenommen werden.

Aus dem Vorhergehenden lassen sich wichtige Schlüsse ziehen. Ist φ ein beliebiges Integral des Systems (30), also eine Function von u und v, so ist nach (31):

$$\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2 \equiv \varphi_u^2(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) + \varphi_v^2(v_x^2 + v_y + v_z^2),$$

daher nach (32):

$$\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2 \equiv \{\varphi_u^2\omega(u, v) + \varphi_v^2\}\{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\}.$$

Nun lässt sich φ stets so als Function von u und v wählen, dass

(33) $$\varphi_u^2\omega(u, v) + \varphi_v^2 = 0$$

wird. Alsdann ist identisch:

$$\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2 = 0.$$

Die Bedingung (33) zerlegt sich so:

$$(\varphi_u\sqrt{-\omega}+\varphi_v)(\varphi_u\sqrt{-\omega}-\varphi_v)=0.$$

Da ω weder gleich Null noch unendlich gross ist, giebt es folglich *zwei* von einander unabhängige Integrale der verlangten Art. Sie seien mit φ und ψ bezeichnet. Dann ist also:

$$(34)\qquad \varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2\equiv 0,\qquad \psi_x^2+\psi_y^2+\psi_z^2\equiv 0.$$

Mithin definieren $\varphi=$ Const. und $\psi=$ Const. zwei Scharen von ∞^1 Integralflächen, die *Minimal-Developpabeln* sind. Ihre ∞^2 Schnittlinien müssen die Charakteristiken der linearen partiellen Differentialgleichung (29) sein. Zwei Scharen v. Minimal-Devel.

Wählen wir *umgekehrt* zwei beliebige Scharen von je ∞^1 Minimal-Developpabeln aus, also zwei Flächenscharen

$$(35)\qquad \varphi=\text{Const.}\quad\text{und}\quad\psi=\text{Const.},$$

für welche die Identitäten (34) bestehen, so haben sie ∞^2 Schnittcurven, vorausgesetzt, dass φ von ψ unabhängig ist. Diese Schnittcurven sind die Charakteristiken einer leicht zu bildenden linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, nämlich dieser:

$$(36)\qquad \begin{vmatrix} p & q & -1\\ \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z\\ \psi_x & \psi_y & \psi_z\end{vmatrix}=0.$$

Wir behaupten, dass diese Gleichung die Eigenschaft hat, dass ihre Integralflächen constante Winkel mit einander längs der Schnittlinien bilden.

In der That, wenn Φ und Ψ zwei beliebige Integrale des zugehörigen Systems von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen sind, so sind sie beliebige Functionen von φ und ψ allein, und $\Phi=$ Const. und $\Psi=$ Const. sind allgemeine Integralflächen. Der Cosinus des Winkels, den die Flächen $\Phi=a$, $\Psi=b$ in einem Punkte (x,y,z) ihrer Schnittlinie mit einander bilden, ist gleich

$$\frac{\Phi_x\Psi_x+\Phi_y\Psi_y+\Phi_z\Psi_z}{\sqrt{\Phi_x^2+\Phi_y^2+\Phi_z^2}\sqrt{\Psi_x^2+\Psi_y^2+\Psi_z^2}}.$$

Es muss bewiesen werden, dass dieser Ausdruck längs der ganzen Schnittlinie constant, also eine Function von a und b allein oder also von Φ und Ψ allein oder schliesslich von φ und ψ allein ist. Dies folgt aber sofort, wenn man bedenkt, dass Φ und Ψ Functionen von φ und ψ allein sind und dass φ und ψ die Identitäten (34) befriedigen. Danach ist nämlich der vorstehende Ausdruck gleich

$$\frac{\Phi_\varphi \Psi_\psi + \Phi_\psi \Psi_\varphi}{2\sqrt{\Phi_\varphi \Phi_\psi \Psi_\varphi \Psi_\psi}},$$

also eine Function von φ und ψ allein.

Wir sind hier auf diejenigen linearen partiellen Differentialgleichungen geführt worden, deren Charakteristiken die Schnittcurven zweier Scharen von ∞^1 Minimal-Developpabeln sind.

Mithin gilt mit Rücksicht auf den früher betrachteten Fall, dass alle Charakteristiken Minimalgeraden sind, der

Ergebnis. Satz 6: *Eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung im Raume* (x, y, z) *hat dann und nur dann die Eigenschaft, dass je zwei ihrer Integralflächen längs ihrer ganzen Schnittcurve einen constanten Winkel mit einander bilden, wenn ihre* ∞^2 *Charakteristiken die Schnittcurven zweier Scharen von je* ∞^1 *Minimal-Developpabeln sind, oder aber wenn die Charakteristiken Minimalgeraden sind. Im letzteren Fall gehört jede Charakteristik nur einer einzigen Minimal-Developpabeln an.*

Rückkehr zum urspr. Problem. Nach den früheren Auseinandersetzungen (S. 660) sind unter diesen Gleichungen diejenigen linearen partiellen Differentialgleichungen enthalten, deren Charakteristiken auf allen Integralflächen *Krümmungslinien* sind. Man darf aber nicht glauben, dass jede der in Satz 6 angegebenen Differentialgleichungen die letztere Eigenschaft hat. Dass dies in der That nicht immer der Fall ist, kann man so beweisen:

Wählt man im Raume eine beliebige Schar von ∞^1 Curven, so gehen durch jede *zwei* Minimal-Developpabeln. Sie definieren also zwei Scharen von ∞^1 Minimal-Developpabeln (35). Wählen wir diese als die im Satz 6 erwähnten, so sehen wir, dass unter den Charakteristiken der betreffenden Differentialgleichung (36) die ∞^1 beliebig gewählten Curven enthalten sind. Die von diesen beliebig gewählten ∞^1 Curven gebildete Fläche ist eine Integralfläche, und die ∞^1 Curven sind ihre Charakteristiken. Nun kann man aber ∞^1 Curven immer so wählen, dass sie auf der von ihnen gebildeten Fläche *keine* Krümmungslinien sind. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Wir geben hierzu ein an sich interessantes Beispiel: Wählt man im Raume eine beliebige Schar von ∞^1 *Kreisen*, so gehen durch jeden zwei Minimal-Developpabeln, nämlich zwei *Nullkugeln*. Wir erhalten so zwei Scharen von ∞^1 Nullkugeln. Die Schnittlinie zweier Nullkugeln ist aber stets ein Kreis. Also kommt hier als Schar der Charakteristiken eine Schar von ∞^2 Kreisen, denen die gegebene Schar von ∞^1 Kreisen angehört. Da wir nun nicht wissen, ob das hierin enthaltene Ergebnis schon bekannt ist, sei es ausdrücklich angegeben: *Jede allgemein gewählte Schar von ∞^1 Kreisen im Raume ist in einer Schar von ∞^2 Kreisen enthalten, die so beschaffen ist, dass zwei Flächen, die von je ∞^1 Kreisen der Schar erzeugt werden, einander stets längs ihrer Schnittlinie unter constantem Winkel treffen.* Schar v. ∞^2 Kreisen v. bes. Art.

Aus dem Vorhergehenden erhellt, dass die ∞^2 Curven, die sich als Schnitte zweier Scharen von ∞^1 Minimal-Developpabeln ergaben, noch eine besondere Bedingung erfüllen müssen, damit sie die Charakteristiken einer solchen linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung seien, deren Integralflächen die Charakteristiken zu Krümmungslinien haben. Erledigg. d. urspr. Problems.

Diese Bedingung können wir nun leicht finden:

Wir wissen, dass zu jeder Schar von Integralflächen $u =$ Const. der bisher betrachteten linearen partiellen Differentialgleichung eine Orthogonalschar $v =$ Const. von Integralflächen vorhanden ist. Sind nun die Charakteristiken Krümmungslinien, so schneiden die beiden orthogonalen Flächenscharen $u =$ Const. und $v =$ Const. einander in Krümmungslinien und gehören daher nach den Untersuchungen von Dupin und Darboux zu einem dreifach-orthogonalen Flächensystem. Es giebt also eine Flächenschar $\omega =$ Const., die alle Flächen $u =$ Const. und $v =$ Const. orthogonal schneidet. Da die Schnittlinien der Flächen $u =$ Const. und $v =$ Const. die ∞^2 Charakteristiken sind, so folgt: Die ∞^2 Charakteristiken müssen die orthogonalen Trajectorien einer Flächenschar $\omega =$ Const. sein. Diesen Fall haben wir aber auf S. 659 betrachtet, wo wir fanden, dass die Flächen $\omega =$ Const. entweder Minimal-Developpabeln oder Kugeln sein müssen, sodass die Charakteristiken entweder Minimalgeraden oder die Orthogonalcurven einer Schar von ∞^1 Kugeln sind. Factisch haben wir daher schon damals alle Differentialgleichungen der gesuchten Art gefunden.

Also sehen wir:

Satz 7: *Die Charakteristiken einer linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung im Raume (x, y, z) sind dann und nur dann auf allen Integralflächen Krümmungslinien, wenn sie entweder ∞^2 Minimalgeraden oder die Orthogonalcurven irgend einer Schar von ∞^1 Kugeln sind.* Ergebnis.

§ 3. Einige partielle Differentialgleichungen 1. O., deren Charakteristiken geodätische Linien sind.

Im ersten Paragraphen bestimmten wir diejenigen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung im Raume, deren Charakteristiken

Haupttangentencurven auf allen Integralflächen sind, und im zweiten Paragraphen bestimmten wir darauf diejenigen, deren Charakteristiken Krümmungslinien auf allen Integralflächen sind. Hieran reiht sich ein

Diffgln., deren Char. geod. Linien sind.

drittes Problem, nämlich die Bestimmung derjenigen *partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung im Raume, deren Charakteristiken auf allen Integralflächen geodätische Linien sind.* Dies Problem wird hier aber nicht in vollem Umfange erledigt werden. Wir beschränken uns vielmehr darauf, *einige* wichtige Kategorien derartiger Differentialgleichungen zu bestimmen.

Eine solche Kategorie lässt sich aus den im vorigen Paragraphen bestimmten Differentialgleichungen auf folgendem Wege ableiten.

Ableitg. aus d. Diffgln. d. § 2.

Es sei im Raume (X, Y, Z) eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\Phi(X, Y, Z, P, Q) = 0 \tag{37}$$

vorgelegt, deren Charakteristiken auf allen Integralflächen *Krümmungslinien* sind. Ferner sei mit J eine Integralfläche dieser Differentialgleichung bezeichnet.

Unter den beiden Scharen von Krümmungslinien auf der Fläche J besteht dann nach Voraussetzung die eine aus Charakteristiken der Differentialgleichung (37). Construiert man längs einer dieser Krümmungslinien, die wir mit $\mathfrak{k}$ bezeichnen wollen, die Flächennormalen, so bilden sie eine abwickelbare Fläche, deren Rückkehrcurve $\mathfrak{g}$ eine geodätische Linie auf der einen Centrafläche $\mathfrak{F}$ der Fläche J ist. Im Folgenden betrachten wir immer nur diese eine Centrafläche $\mathfrak{F}$ von J.

Betrachten wir zwei Integralflächen J_1 und J_2 von (37), die einander längs einer Charakteristik, d. h. längs einer Krümmungslinie $\mathfrak{k}$ berühren, also einen charakteristischen Streifen gemein haben, so sehen wir, dass ihre Centraflächen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ eine geodätische Linie $\mathfrak{g}$ gemein haben. Dann steht die Schmiegungsebene in einem beliebigen Punkte der Curve $\mathfrak{g}$ senkrecht auf der zugehörigen gemeinsamen Tangentenebene der Flächen J_1 und J_2, und zu diesen beiden Ebenen ist drittens die Tangentenebene der Centrafläche $\mathfrak{F}_1$ und ebenso die Tangentenebene der Centrafläche $\mathfrak{F}_2$ in dem betreffenden Punkte von $\mathfrak{g}$ senkrecht. Mithin berühren die beiden Centraflächen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ einander längs $\mathfrak{g}$.

Wenn also zwei Flächen J_1 und J_2 einander längs einer Krümmungslinie berühren, so berühren auch die entsprechenden Centraflächen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ einander längs der zugehörigen geodätischen Linie.

Wählen wir irgend ein Flächenelement (X, Y, Z, P, Q) der Gleichung (37), so haben diejenigen Integralflächen J von (37), die dieses

Element enthalten, denjenigen charakteristischen Streifen, also Elementstreifen längs einer Krümmungslinie $\mathfrak{k}$, gemein, der das Element (X, Y, Z, P, Q) enthält. Durch Angabe des Elementes (X, Y, Z, P, Q) ist also der Elementstreifen längs $\mathfrak{k}$ festgelegt, also auch die zugehörige Umhüllungscurve der Normalen längs $\mathfrak{k}$, d. h. auch die geodätische Linie $\mathfrak{g}$ der Centraflächen $\mathfrak{F}$ und nach dem Vorhergehenden auch der gemeinsame Elementstreifen der Centraflächen $\mathfrak{F}$ längs $\mathfrak{g}$. Die Normale des Elementes (X, Y, Z, P, Q) berührt $\mathfrak{g}$ in einem bestimmten Punkte $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$, und die Centraflächen $\mathfrak{F}$ haben in diesem Punkte von $\mathfrak{g}$ ein bestimmtes Element $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$. *Zu jedem Flächenelemente* (X, Y, Z, P, Q) *der Gleichung* (37) *ist hiermit ein Flächenelement* $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ *in bestimmter Weise zugeordnet.* Nun giebt es ∞^4 Elemente (X, Y, Z, P, Q), die der Gleichung (37) angehören, demnach auch ∞^4 Elemente $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$. Von dem denkbaren Fall, dass die Zahl der letzteren geringer ist, sehen wir hier zunächst ab. Die ∞^4 Elemente $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ werden durch eine gewisse Gleichung

$$(38) \qquad \varphi(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) = 0$$

definiert sein. Diese Gleichung ist eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, deren Integralflächen notwendig die eine Schar von Centraflächen $\mathfrak{F}$ der Integralflächen J von (37) sind. Durch jeden charakteristischen Streifen von (37) gehen unendlich viele Integralflächen J von (37), ihnen entsprechen unendlich viele Integralflächen $\mathfrak{F}$ von (38), die sämtlich den Elementstreifen längs einer gewissen geodätischen Linie $\mathfrak{g}$ gemein haben. Deshalb sind diese Elementstreifen die charakterischen Streifen von (38).

Somit hat sich ergeben: Eine Kategorie v. p. Diffgl. d. gesuchten Art.

Satz 8: *Liegt im Raume eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung vor, deren Charakteristiken auf jeder Integralfläche Krümmungslinien sind, so sind die zugehörigen Centraflächen der einen Art die Integralflächen einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, deren Charakteristiken auf allen Integralflächen geodätische Linien sind.*

Der Übergang von *beliebigen* Flächen F zu ihren Centraflächen $\mathfrak{F}$ wird nicht etwa durch eine Berührungstransformation des Raumes vermittelt. Zwar entspricht jedem Flächenelement (X, Y, Z, P, Q) einer *gegebenen* Fläche F ein bestimmtes Element $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ der zugehörigen Centrafläche $\mathfrak{F}$. Um aber das Element $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ zu finden, genügt es nicht, dass man nur das eine Element (X, Y, Z, P, Q) kenne, sondern man muss zugleich das unendlich benachbarte Element der betreffenden Krümmungslinie kennen, denn erst dann kann man den Krümmungsmittelpunkt $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ und die Tangentenebene der Centrafläche daselbst construieren. Bei der Anwendung auf die ∞^4 Elemente (X, Y, Z, P, Q) einer partiellen Differentialgleichung $\Phi = 0$, deren Charakteristiken Krümmungslinien sind, gehört jedoch jedem Element (X, Y, Z, P, Q) ein *bestimmtes* Element

$(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ zu. Dies liegt darin, dass mit dem Element (X, Y, Z, P, Q) vermöge der Gleichung $\Phi = 0$ auch der hindurchgehende charakteristische Streifen längs der Krümmungslinie festgelegt ist.

Zweites Verfahren.

Jetzt wollen wir einen zweiten Weg einschlagen, der uns ebenfalls zu gewissen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung führen wird, deren Charakteristiken geodätische Linien sind. Wir werden nachher erkennen, dass diese neue Kategorie mit der in Satz 8 erwähnten übereinstimmt. Zugleich werden wir damit ein Verfahren erhalten, um die *analytische* Form dieser Kategorie abzuleiten.

Es sei $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ der Mittelpunkt und $\mathfrak{R}$ der Radius einer Kugel. Die Kugel *berührt* eine unendlich benachbarte Kugel $(\mathfrak{X} + d\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} + d\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z} + d\mathfrak{Z}, \mathfrak{R} + d\mathfrak{R})$ dann und nur dann, wenn die Bedingung

$$d\mathfrak{X}^2 + d\mathfrak{Y}^2 + d\mathfrak{Z}^2 - d\mathfrak{R}^2 = 0 \tag{39}$$

erfüllt ist, die sich, wie wir *hier* nur nebenbei bemerken, auch so schreiben lässt:

$$d\mathfrak{X}^2 + d\mathfrak{Y}^2 + d\mathfrak{Z}^2 + (d\,i\mathfrak{R})^2 = 0. \tag{40}$$

Kugelcomplex.

Es sei nun ein *Kugelcomplex*, also eine Schar von ∞^3 Kugeln $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{R})$, dadurch definiert, dass der Radius $\mathfrak{R}$ als eine Function H der Mittelpunktscoordinaten $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ gegeben sei:

$$\mathfrak{R} = H(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}). \tag{41}$$

Jeder Punkt $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ des Raumes ist dann der Mittelpunkt einer Kugel des Kugelcomplexes. Zu jeder Kugel $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{R})$ des Complexes giebt es unendlich viele unendlich benachbarte Kugeln $(\mathfrak{X} + d\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} + d\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z} + d\mathfrak{Z})$ des Complexes. Unter diesen werden diejenigen, welche die gewählte Kugel $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{R})$ berühren, nach (39) und (41) durch die Bedingung

$$d\mathfrak{X}^2 + d\mathfrak{Y}^2 + d\mathfrak{Z}^2 - \left(\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{X}} d\mathfrak{X} + \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{Y}} d\mathfrak{Y} + \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{Z}} d\mathfrak{Z}\right)^2 = 0 \tag{42}$$

bestimmt. Dies ist die Bedingung, die der Mittelpunkt der unendlich benachbarten Kugel zu erfüllen hat. Der Radius $\mathfrak{R} + d\mathfrak{R}$ dieser Kugel unterscheidet sich vom Radius $\mathfrak{R}$ um dH.

Zugeh. Monge'sche Gl.

Die Gleichung (42) ist nun eine *Monge'sche Gleichung* in $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$, und zwar ist sie vom zweiten Grade in den Differentialen. Der Elementarkegel, den diese Monge'sche Gleichung einem beliebigen Punkte $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ zuordnet, ist also ein *Kegel zweiten Grades* und zwar, wie die Form der Gleichung (42) zeigt, ein *Rotationskegel*, dessen Axe im Punkte $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ auf derjenigen Fläche

$$H(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) = \text{Const.}$$

senkrecht steht, die durch den Punkt $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ hindurchgeht. In der That, da die Normale dieser Fläche Richtungscosinus proportional

$$\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{X}}, \quad \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{Y}}, \quad \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{Z}}$$

hat, so ist der Cosinus des Winkels λ, den die Fortschreitungsrichtung $(d\mathfrak{X} : d\mathfrak{Y} : d\mathfrak{Z})$ mit dieser Normalen bildet:

$$\cos \lambda = \frac{\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{X}} d\mathfrak{X} + \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{Y}} d\mathfrak{Y} + \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{Z}} d\mathfrak{Z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{X}}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{Y}}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{Z}}\right)^2} \sqrt{d\mathfrak{X}^2 + d\mathfrak{Y}^2 + d\mathfrak{Z}^2}}.$$

Infolge von (42) kommt also:

$$(43) \qquad \cos \lambda = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{X}}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{Y}}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{Z}}\right)^2}}.$$

Da dieser Wert von den Differentialen $d\mathfrak{X}$, $d\mathfrak{Y}$, $d\mathfrak{Z}$ unabhängig ist, so folgt die Richtigkeit der obigen Behauptung.

Da der Abstand dh der beiden unendlich benachbarten Flächen

$$H(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) = c$$

und

$$H(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) = c + dc$$

an der Stelle $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ den Wert

$$dh = \frac{dc}{\sqrt{H_{\mathfrak{x}}^2 + H_{\mathfrak{y}}^2 + H_{\mathfrak{z}}^2}}$$

hat, so ist überdies

$$\cos \lambda = \frac{dh}{dc}.$$

Mithin schneiden die beiden Flächen $H = c$ und $H = c + dc$ auf den Mantellinien des Elementarkegels eines Punktes der Fläche $H = c$ gerade die Strecke dc ab.

Die Monge'sche Gleichung (42) definiert nach Satz 3, § 1 des 7. Kap., S. 260, eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit denselben Elementarkegeln. Wir finden sie, indem wir $d\mathfrak{X}$, $d\mathfrak{Y}$, $d\mathfrak{Z}$ und die Hülfsgrösse ϱ aus der Gleichung (42) und den drei Gleichungen: Zugeh. p. Dffgl. 1. O.

$$\begin{aligned}
\varrho \mathfrak{P} &= d\mathfrak{X} - H_{\mathfrak{x}}(H_{\mathfrak{x}} d\mathfrak{X} + H_{\mathfrak{y}} d\mathfrak{Y} + H_{\mathfrak{z}} d\mathfrak{Z}), \\
\varrho \mathfrak{Q} &= d\mathfrak{Y} - H_{\mathfrak{y}}(H_{\mathfrak{x}} d\mathfrak{X} + H_{\mathfrak{y}} d\mathfrak{Y} + H_{\mathfrak{z}} d\mathfrak{Z}), \\
-\varrho \ &= d\mathfrak{Z} - H_{\mathfrak{z}}(H_{\mathfrak{x}} d\mathfrak{X} + H_{\mathfrak{y}} d\mathfrak{Y} + H_{\mathfrak{z}} d\mathfrak{Z})
\end{aligned}$$

eliminieren. Zunächst geben die drei letzten Gleichungen:

$$\varrho(\mathfrak{P} H_{\mathfrak{x}} + \mathfrak{Q} H_{\mathfrak{y}} - H_{\mathfrak{z}}) = -(H_{\mathfrak{x}}^2 + H_{\mathfrak{y}}^2 + H_{\mathfrak{z}}^2 - 1) dH,$$

und zweitens geben sie infolge von (42):

$$\varrho^2(\mathfrak{P}^2 + \mathfrak{Q}^2 + 1) = (H_{\mathfrak{x}}^2 + H_{\mathfrak{y}}^2 + H_{\mathfrak{z}}^2 - 1)(dH)^2,$$

sodass aus den beiden letzten Gleichungen ϱ und dH sofort eliminiert werden können. Dadurch geht die gesuchte partielle Differentialgleichung hervor:

$$(44) \quad \begin{cases} (\mathfrak{P} H_{\mathfrak{x}} + \mathfrak{Q} H_{\mathfrak{y}} - H_{\mathfrak{z}})^2 - \\ - (H_{\mathfrak{x}}^2 + H_{\mathfrak{y}}^2 + H_{\mathfrak{z}}^2 - 1)(\mathfrak{P}^2 + \mathfrak{Q}^2 + 1) = 0. \end{cases}$$

Eigenschaften d. p. Dffgl. 1. O.

Diese partielle Differentialgleichung hat nun besondere Eigenschaften: Ihre Elemente $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ umhüllen die oben besprochenen Elementarkegel. Durch den Punkt $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ eines solchen Elementes geht eine der Flächen:

$$H(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) = \text{Const.}$$

Diese Fläche hat eine in der Ebene des Elementes gelegene Tangente. Ferner berührt die Ebene des Elementes den zugehörigen Elementarkegel längs einer Geraden. Somit gehen vom Punkte des Elementes zwei ausgezeichnete Geraden in der Ebene des Elementes aus. Diese beiden Geraden stehen auf einander *senkrecht*, da die Axe des Rotationskegels auf der Fläche $H =$ Const. senkrecht steht. Die Gerade, längs deren das Element den Kegel berührt, ist, wie immer, die Tangente an diejenige Charakteristik, die durch den Punkt $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ geht.

Auf jeder Integralfläche der partiellen Differentialgleichung (44) liegt mithin ein Orthogonalsystem, gebildet von den ∞^1 Charakteristiken und den ∞^1 Schnittcurven γ der Integralfläche mit den ∞^1 Flächen

$$H(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) = c.$$

Noch mehr: Wir sahen, dass die Mantellinien des Elementarkegels, sobald man ihn durch die benachbarte Fläche

$$H(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) = c + dc$$

derjenigen Fläche $H = c$ begrenzt, die durch seine Spitze geht, gerade die Länge dc, d. h. für alle Punkte $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ der Schnittcurve der Integralfläche mit der Fläche $H = c$ dieselbe Länge haben. Demnach ist das vorhin gefundene Orthogonalsystem so beschaffen, dass die Schnittcurven γ der Integralfläche mit den Flächen $H =$ Const. auf den zu ihnen senkrechten Charakteristiken der Fläche constante Strecken abschneiden. Jene Schnittcurven sind also *Parallel*curven und daher ihre orthogonalen Trajectorien, d. h. die Charakteristiken, *geodätische Linien* auf der Integralfläche.

Also hat sich ergeben*):

Theorem 27: *Ist H eine beliebig gegebene Function von $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$, so sind die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung:* Ergebnis.

$$(\mathfrak{P}H_{\mathfrak{x}} + \mathfrak{Q}H_{\mathfrak{y}} - H_{\mathfrak{z}})^2 - (H_{\mathfrak{x}}^2 + H_{\mathfrak{y}}^2 + H_{\mathfrak{z}}^2 - 1)(\mathfrak{P}^2 + \mathfrak{Q}^2 + 1) = 0$$

im Raume $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ auf jeder Integralfläche geodätische Linien.

Man kann nun leicht einsehen, dass die hiermit gefundene Kategorie von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Charakteristiken geodätische Linien sind, mit der oben (S. 667) gefundenen Kategorie identisch ist. Übereinstimmg. mit d. früher. Ergebnis.

Es sei nämlich $\mathfrak{F}$ irgend eine Integralfläche unserer partiellen Differentialgleichung (44). Wir denken uns die Tangenten an ihre ∞^1 Charakteristiken construiert. Dann giebt es, da diese Charakteristiken geodätische Linien auf der Fläche $\mathfrak{F}$ sind, nach einem Satze der Flächentheorie ∞^1 Parallelflächen, welche die construierten ∞^2 Tangenten senkrecht schneiden. Wir wollen eine besondere unter diesen Parallelflächen wirklich construieren. Zu diesem Zwecke beachten wir, dass nach dem Früheren dc das Bogenelement einer Charakteristik ist, das von den Flächen

$$H = c \quad \text{und} \quad H = c + dc$$

auf der Charakteristik abgeschnitten wird. Man erhält daher die Punkte einer der gesuchten Parallelflächen, wenn man auf der Tangente im Punkte $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ einer Charakteristik gerade die Strecke $H(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ aufträgt. Da die Parallelflächen die Tangenten der Charakteristiken senkrecht schneiden, so folgt, dass die so construierte Parallelfläche alle die ∞^2 Kugeln des gegebenen Kugelcomplexes

$$\mathfrak{R} = H(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$$

berührt, deren Mittelpunkte $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ auf der betrachteten Integralfläche $\mathfrak{F}$ liegen. Bezeichnen wir diese Parallelfläche mit J, so sind die ∞^2 Kugeln die Krümmungskugeln der Fläche J. Die Fläche $\mathfrak{F}$ ist die eine Centrafläche von J und die Tangenten einer Charakteristik von $\mathfrak{F}$ schneiden J in den Punkten einer *Krümmungslinie.*

Diese Construction ordnet jeder Integralfläche $\mathfrak{F}$ von (44) eine bestimmte Fläche J zu, von der $\mathfrak{F}$ die eine Centrafläche ist. Wenn zwei Integralflächen $\mathfrak{F}$ von (44) einander längs einer Curve, d. h. nach Satz 3, § 3 des 11. Kap., S. 503, längs einer Charakteristik berühren, so haben

*) Lie, Verh. d. Ges. d. Wiss. zu Christiania, Oct. 1870.

die entsprechenden Flächen J diejenige Curve gemein, die durch Abtragen der Strecken $H(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ auf den Tangenten der Charakteristik von ihren Punkten $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ aus als Ort der Endpunkte bestimmt wird. Sie ist Krümmungslinie der betreffenden Flächen J, und diese Flächen J schneiden die abwickelbare Fläche jener Tangenten senkrecht, d. h. diese Flächen J haben längs der Krümmungslinie den Elementstreifen gemein.

Ist $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ ein Flächenelement der Gleichung (44), so sind mithin denjenigen Integralflächen $\mathfrak{F}$ von (44), die dieses Element enthalten, solche Flächen J zugeordnet, die ebenfalls ein Element (X, Y, Z, P, Q) gemein haben. Die Normale dieses letzteren Elementes geht durch den Punkt $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$, berührt daselbst die Charakteristik desjenigen charakteristischen Streifens, dem das Element $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ angehört, und hat bis zum Punkt $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ die Länge $H(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$. Zu jedem der ∞^4 Elemente $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ der Gleichung (44) ist also ein bestimmtes Element (X, Y, Z, P, Q) zugeordnet. Somit erhalten wir ∞^4 Elemente (X, Y, Z, P, Q). Sie werden eine gewisse Gleichung

$$\Phi(X, Y, Z, P, Q) = 0$$

erfüllen, und die Integralflächen dieser partiellen Differentialgleichung sind die Flächen J. Aus dem Vorhergehenden erhellt ferner, dass die Charakteristiken von $\Phi = 0$ *Krümmungslinien* auf den Integralflächen J von $\Phi = 0$ sind.

Hiermit sind wir genau zu dem Ausgangspunkt dieses Paragraphen zurückgekommen. Daraus folgt, dass die im Theorem 27 angegebene Kategorie von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Charakteristiken geodätische Linien sind, mit der in Satz 8 (S. 667) angegebenen Kategorie übereinstimmt.

Zugleich haben wir hiermit auf einem neuen Wege partielle Differentialgleichungen erster Ordnang $\Phi = 0$ gefunden, deren Charakteristiken auf allen Integralflächen Krümmungslinien sind. Die Integralflächen J der Gleichung $\Phi = 0$ sind diejenigen Flächen, deren ∞^2 Krümmungskugeln der einen Schar Kugeln des vorgelegten Kugelcomplexes (41) sind. Allerdings ist wohl zu beachten, dass wir hier nicht nochmals auf die Frage eingegangen sind, ob hiermit auch alle partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung gefunden sind, deren Charakteristiken Krümmungslinien sind.

Anal. Bed. f. p. Dffgl., deren Char. geod. Lin. sind.

Soll eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$\varphi(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) = 0$$

die Eigenschaft haben, dass ihre Charakteristiken auf allen Integralflächen *geodätische* Linien sind, so muss $\varphi = 0$ eine Bedingung erfüllen, die man analytisch so findet:

Nach Satz 2, § 2 des 12. Kap., S. 555, bildet man das System, das die charakteristischen Streifen bestimmt:

$$\frac{d\mathfrak{X}}{\varphi_{\mathfrak{P}}} = \frac{d\mathfrak{Y}}{\varphi_{\mathfrak{Q}}} = \frac{d\mathfrak{Z}}{\varphi_{\mathfrak{P}}\mathfrak{P} + \varphi_{\mathfrak{Q}}\mathfrak{Q}} = \frac{d\mathfrak{P}}{-\varphi_{\mathfrak{X}} - \varphi_{\mathfrak{Z}}\mathfrak{P}} = \frac{d\mathfrak{Q}}{-\varphi_{\mathfrak{Y}} - \varphi_{\mathfrak{Z}}\mathfrak{Q}}.$$

Längs eines charakteristischen Streifens kann man $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ als Functionen eines Parameters t auffassen, sodass

$$\frac{d\mathfrak{X}}{dt} = \varphi_{\mathfrak{P}}, \quad \frac{d\mathfrak{Y}}{dt} = \varphi_{\mathfrak{Q}}, \quad \frac{d\mathfrak{Z}}{dt} = \varphi_{\mathfrak{P}}\mathfrak{P} + \varphi_{\mathfrak{Q}}\mathfrak{Q}$$

ist. Nun verlangt man, dass die Schmiegungsebene:

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{X} - X & \mathfrak{Y} - Y & \mathfrak{Z} - Z \\ \frac{d\mathfrak{X}}{dt} & \frac{d\mathfrak{Y}}{dt} & \frac{d\mathfrak{Z}}{dt} \\ \frac{d^2\mathfrak{X}}{dt^2} & \frac{d^2\mathfrak{Y}}{dt^2} & \frac{d^2\mathfrak{Z}}{dt^2} \end{vmatrix} = 0,$$

in deren Gleichung sich die zweiten Ableitungen von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ nach t infolge des obigen Systems als Functionen von $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ und von den ersten und zweiten Ableitungen von φ nach $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ berechnen lassen, auf der Ebene des Elementes ($\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$) senkrecht stehe, d. h. dass

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{P} & \mathfrak{Q} & -1 \\ \frac{d\mathfrak{X}}{dt} & \frac{d\mathfrak{Y}}{dt} & \frac{d\mathfrak{Z}}{dt} \\ \frac{d^2\mathfrak{X}}{dt^2} & \frac{d^2\mathfrak{Y}}{dt^2} & \frac{d^2\mathfrak{Z}}{dt^2} \end{vmatrix} = 0$$

sei infolge von $\varphi = 0$. Wie man sieht, ergiebt sich eine Bedingung, die auch die *zweiten* Ableitungen von φ enthält. Bei den analogen Problemen in § 1, S. 640, und § 2, S. 657, traten immer nur die *ersten* Ableitungen auf. *Man kann hieraus schliessen, dass es ausser den partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, die wir in Theorem* 27 *fanden, noch andere giebt, deren Charakteristiken auf allen Integralflächen geodätische Linien sind.*

Angenommen, es sei Umkehrg. d. früh. Betrachtg.

(45) $$\varphi(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) = 0$$

eine beliebige, aber nicht lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung von der Eigenschaft, dass ihre Charakteristiken auf allen Integralflächen geodätische

Linien sind. Sind die Charakteristiken insbesondere Geraden, so hat die Gleichung nach § 1, S. 641, die Form

$$\varphi(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{Z} - \mathfrak{X}\mathfrak{P} - \mathfrak{Y}\mathfrak{Q}) = 0.$$

Diese Kategorie ist nicht unter der im Theorem 27 angegebenen enthalten. Von ihr können wir absehen und also voraussetzen, dass die ∞^3 Charakteristiken von (45) *keine* Geraden seien.

Es möge $\mathfrak{F}$ eine beliebige Integralfläche von (45) sein. Auf $\mathfrak{F}$ liegen ∞^1 Charakteristiken γ, die geodätische Linien sind. Wir construieren die ∞^2 Tangenten dieser Curven γ. Es giebt bekanntlich ∞^1 Parallelflächen Π, die diese ∞^2 Geraden senkrecht schneiden. Die Fläche $\mathfrak{F}$ ist eine gemeinsame Centrafläche der Flächen Π. Die Tangenten einer Charakteristik γ schneiden die Flächen Π in den Punkten von Krümmungslinien $\mathfrak{k}$.

Zu jeder Integralfläche $\mathfrak{F}$ von (45) construieren wir eine Schar von ∞^1 Flächen Π. Die Gesamtheit aller Flächen Π hängt daher ebenso wie die aller Integralflächen $\mathfrak{F}$ nicht nur von willkürlichen Constanten, sondern noch von einer willkürlichen Function ab. Zu jedem Element $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ der Gleichung (45) erhalten wir ∞^1 Elemente (X, Y, Z, P, Q) von Flächen Π, nämlich die einander parallelen Elemente, deren gemeinsame Normale diejenige Charakteristik im Punkte $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ berührt, zu deren charakteristischem Streifen das Element $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ gehört. Die Zahl der Elemente $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ der Gleichung (45) ist gleich ∞^4. Wir erhalten dementsprechend $\infty^4 \cdot \infty^1$ oder also ∞^5 Elemente (X, Y, Z, P, Q) der Flächen Π. Es sind nicht weniger als ∞^5. Denn sonst hätten die ∞^3 Charakteristiken höchstens ∞^3 Tangenten und wären daher Curven eines Liniencomplexes und mithin Haupttangentencurven, also, da sie geodätisch sind, *Geraden*.

Jedes Flächenelement (X, Y, Z, P, Q) des Raumes gehört somit mindestens einer Fläche Π an und gehört daher zu einem Elemente $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$. Dies bestimmt sich so: Wir construieren die Normale des Elementes (X, Y, Z, P, Q) und fassen die Elementarkegel ins Auge, die den Punkten $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ der Normalen vermöge der Gleichung (45) zugeordnet sind. Würde die Normale allen diesen Kegeln angehören, so wäre sie selbst eine Charakteristik. Da aber die Charakteristiken keine Geraden sein sollen, so brauchen wir uns mit diesem Fall nicht weiter abzugeben. Es wird also unter jenen Kegeln nur eine discrete Anzahl geben, welche die Normale des Elementes (X, Y, Z, P, Q) enthalten. Es sei $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ die Spitze eines solchen Kegels. Das Element $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ der Gleichung (45), das den Kegel längs jener Geraden berührt, gehört einem charakteristischen Streifen von (45) an. Es sei γ die Charakteristik des Streifens. Alle diejenigen Integralflächen $\mathfrak{F}$ von (45), die dieses Element $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ enthalten, haben die geodätische Linie γ gemein und berühren einander längs γ. Unter den ∞^1 Flächen Π, die zu einer jeden dieser Integralflächen gehören, giebt es je eine, die gerade das Element (X, Y, Z, P, Q) enthält. Alle Flächen Π also, die das Element (X, Y, Z, P, Q) enthalten, haben solche Centraflächen $\mathfrak{F}$, die einander längs der geodätischen Linie γ berühren. Mithin berühren diese Flächen Π einander längs der zugehörigen Krümmungslinie $\mathfrak{k}$ in einem Elementstreifen, dem das Element (X, Y, Z, P, Q) angehört.

Da durch *jedes* Element (X, Y, Z, P, Q) des Raumes eine Fläche Π, ja sogar unendlich viele gehen, so ist es klar, dass die Flächen Π nicht sämtlich einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung genügen können. Sie sind vielmehr *gemeinsame Integralflächen zweier partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung.*

Gemeins. Integralfln. v. 2 part. Diffgln. 2. O.

In der That, alle die Flächen Π, denen ein Element (X, Y, Z, P, Q) gemein ist, haben, wie wir sahen, einen Elementstreifen gemein. So giebt es im Raume ∞^4 Streifen, die einem gewissen System von simultanen gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{dX}{A} = \frac{dY}{B} = \frac{dZ}{C} = \frac{dP}{D} = \frac{dQ}{E} \tag{46}$$

genügen werden, in dem A, B, C, D, E gewisse Functionen von X, Y, Z, P, Q bedeuten. Da die Curve eines solchen Streifens auf jeder Fläche Π, die den Streifen enthält, eine Krümmungslinie ist, so besteht nach § 4 des 10. Kap., S. 473, für diese ∞^4 Streifen die Relation:

$$(dX + P\,dZ)\,dQ - (dY + Q\,dZ)\,dP = 0. \tag{47}$$

Setzen wir hierin die Werte der Differentiale aus (46) ein, so kommt:

$$(A + PC)\,E - (B + QC)\,D = 0.$$

Diese Gleichung muss *identisch* bestehen, denn sonst würde sie ja eine partielle Differentialgleichung *erster* Ordnung sein, der alle Flächen Π genügen, und eine solche giebt es nicht, wie wir wissen. Sind R, S, T die zweiten Ableitungen von Z nach X und Y, so können wir aber die Gleichung (47) mit Rücksicht auf (46) so schreiben:

$$(A + PC)(S\,dX + T\,dY) - (B + QC)(R\,dX + S\,dY) = 0$$

oder:

$$(A + PC)(SA + TB) - (B + QC)(RA + SB) = 0.$$

Dies ist eine partielle Differentialgleichung *zweiter* Ordnung, der alle Flächen Π genügen. Erste p. Diffgl. 2. O.

Um eine zweite partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung aufzustellen, der alle Flächen Π genügen, beachten wir, dass jedem Element (X, Y, Z, P, Q) ein Element $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ entspricht. Von den beiden Krümmungskugeln einer Fläche Π durch das Element (X, Y, Z, P, Q) hat die eine ihren Mittelpunkt im Punkte $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$. Ihr Radius $\mathfrak{R}$ ist die Entfernung der Punkte (X, Y, Z) und $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ von einander. Sie wird sich als eine gewisse Function von X, Y, Z, P, Q darstellen lassen:

$$\mathfrak{R} = \varrho(X, Y, Z, P, Q).$$

Alsdann ist $\mathfrak{R}$ der eine Hauptkrümmungsradius der Fläche Π im Punkte (X, Y, Z). Da die Hauptkrümmungsradien die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$(S^2 - RT)\mathfrak{R}^2 + \{(1 + Q^2)R - 2PQS + (1 + P^2)T\}\sqrt{1 + P^2 + Q^2}\,\mathfrak{R} - \\ - (1 + P^2 + Q^2)^2 = 0$$

sind, so muss $\mathfrak{R} = \varrho(X, Y, Z, P, Q)$ dieser Gleichung genügen Setzen wir diesen Wert ein, so ergiebt sich eine zweite partielle Differentialgleichung *zweiter* Ordnung, der alle Flächen Π genügen. Sie ist, wie ihre Form in R, S, T zeigt, von der oben aufgestellten wesentlich verschieden. Zweite p. Diffgl. 2 O.

Die Flächen Π, deren allgemeine Gleichung nicht nur willkürliche Constanten, sondern eine willkürliche Function enthält, sind somit gemeinsame Integralflächen zweier partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Wenn zwei Flächen Π einander berühren, so haben sie einen Elementstreifen längs einer Krümmungslinie gemein. Dass diese gemeinsamen Streifen durch ein System (46) bestimmt sind, das nur die ersten Ableitungen P, Q und nicht auch die zweiten R, S, T enthält, ist beachtenswert.

§ 4. Einige weitere Kategorien von partiellen Differentialgleichungen 1. O.

In diesem Schlussparagraphen wollen wir noch einige geometrische Probleme behandeln, die mit einander und mit den früher behandelten Problemen Berührungspunkte haben.

Normalen-Problem.

Wir stellen uns zunächst die Aufgabe, *alle Flächen zu bestimmen, deren Normalen einem gegebenen Liniencomplexe angehören.*

Construieren wir in einem beliebigen Punkte des Raumes den Elementarkegel des Complexes und die Flächenelemente, die auf den Mantellinien des Kegels senkrecht stehen, so werden letztere wiederum einen Elementarkegel umhüllen. Jedem Punkte des Raumes wird somit ein zweiter Elementarkegel zugeordnet. Diese Elementarkegel gehören natürlich im allgemeinen keinem Liniencomplex an, aber sie bestimmen eine gewisse Monge'sche Gleichung. Es leuchtet ein, dass unser Problem darauf hinauskommt, die *partielle Differentialgleichung erster Ordnung* zu integrieren, die dieser Monge'schen Gleichung zugeordnet ist.

Lösung des Normalenprobl.

Um das Problem etwa so zu erledigen, wie Transon (vgl. § 2 des 7. Kap., S. 273) es gethan hat, denken wir uns den Liniencomplex dadurch gegeben, dass wir jedem Punkte (x, y, z) des Raumes eine Gerade durch ihn zuordnen. Die Richtungscosinus α, β, γ dieser Geraden seien also irgendwie gegebene Functionen von x, y, z. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ laufende Punktcoordinaten, so werden dann durch die Gleichungen:

$$\frac{\mathfrak{x}-x}{\alpha}=\frac{\mathfrak{y}-y}{\beta}=\frac{\mathfrak{z}-z}{\gamma} \tag{48}$$

∞^3 Geraden, also ein Liniencomplex, dargestellt. Dabei spielen x, y, z die Rolle von Parametern. Wir können sagen, dass die ∞^3 Geraden des Liniencomplexes auf die ∞^3 Punkte (x, y, z) des Raumes abgebildet sind. Die Gleichungen (48) der Complexgeraden können wir auch so schreiben:

$$\mathfrak{x}=x+\varrho\alpha, \quad \mathfrak{y}=y+\varrho\beta, \quad \mathfrak{z}=z+\varrho\gamma. \tag{49}$$

Dabei bedeutet dann ϱ den Abstand des variabeln Punktes $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ der Geraden von dem festen Punkte (x, y, z) auf der Geraden.

Specialfall.

In dem Falle, dass die Pfaff'sche Gleichung

$$\alpha\, dx+\beta\, dy+\gamma\, dz=0$$

integrabel ist, d. h. auf die Form

$$d\varphi(x, y, z)=0$$

gebracht werden kann, haben die ∞^1 Flächen

$$\varphi(x, y, z)=\text{Const.}$$

die geforderte Eigenschaft, und zwar sind ihre Normalen gerade diejenigen Geraden des Complexes, deren Bildpunkte die Punkte der Flächen selbst sind. Aber dies sind nicht alle Flächen der gesuchten Art.

Wie in diesem besonderen Fall, so suchen wir auch im allgemeinen Fall überhaupt solche Flächen Allgem. Fall.

$$\psi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = 0,$$

deren Normalen zu den Geraden (49) gehören. Dabei brauchen aber die Bildpunkte (x, y, z) der Normalen durchaus nicht die Fusspunkte der Normalen selbst zu sein. Vielmehr ist der Abstand ϱ des Flächenpunktes $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ von dem Bildpunkte (x, y, z) der Normalen dieses Flächenpunktes von Punkt zu Punkt ein anderer. Wenn wir aber *eine* Fläche $\psi = 0$ kennen, deren ∞^2 Normalen zu den Geraden (49) des Complexes gehören, so hat jede der ∞^1 Parallelflächen dieser Fläche dieselben Normalen und gehört daher auch zu den gesuchten Flächen. Hieraus folgt, dass wir von vornherein nach ∞^1 Parallelflächen

$$\psi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = \text{Const.}$$

fragen können, deren ∞^2 Normalen zu den Geraden (49) gehören. Diese ∞^1 Flächen müssen die Integralflächen einer integrabeln Pfaff'schen Gleichung: Integrabele Pfaff'sche Gl

$$\alpha\, d\mathfrak{x} + \beta\, d\mathfrak{y} + \gamma\, d\mathfrak{z} = 0 \tag{50}$$

sein, wobei $d\mathfrak{x}, d\mathfrak{y}, d\mathfrak{z}$ die Incremente von $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ längs einer Normalen bedeuten. Es kommt also darauf an, *die in* (49) *auftretende Grösse* ϱ *so als Function von* x, y, z *zu bestimmen, dass die Pfaff'sche Gleichung* (50) *integrabel wird.*

Die Gleichung (50) lautet, ausführlich geschrieben, nach (49) so:

$$\alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz + (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\, d\varrho + \varrho(\alpha\, d\alpha + \beta\, d\beta + \gamma\, d\gamma) = 0.$$

Da $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \equiv 1$ ist, so ist auch

$$\alpha\, d\alpha + \beta\, d\beta + \gamma\, d\gamma \equiv 0,$$

sodass die Gleichung (50) die Form hat:

$$(\alpha + \varrho_x)\, dx + (\beta + \varrho_y)\, dy + (\gamma + \varrho_z)\, dz = 0. \tag{50'}$$

Nach Satz 1, § 2 des 6. Kap., S. 198, ist diese Gleichung dann und nur dann integrabel, wenn ϱ die lineare partielle Differentialgleichung erfüllt:

$$\begin{cases} (\beta_z - \gamma_y)\dfrac{\partial \varrho}{\partial x} + (\gamma_x - \alpha_z)\dfrac{\partial \varrho}{\partial y} + (\alpha_y - \beta_x)\dfrac{\partial \varrho}{\partial z} + \\ + (\beta_z - \gamma_y)\alpha + (\gamma_x - \alpha_z)\beta + (\alpha_y - \beta_x)\gamma = 0. \end{cases} \tag{51}$$

Diese lineare partielle Differentialgleichung ist dem System von drei simultanen gewöhnlichen Differentialgleichungen äquivalent:

$$\frac{dx}{\beta_z - \gamma_y} = \frac{dy}{\gamma_x - \alpha_z} = \frac{dz}{\alpha_y - \beta_x} = \frac{-d\varrho}{(\beta_z - \gamma_y)\alpha + (\gamma_x - \alpha_z)\beta + (\alpha_y - \beta_x)\gamma}. \tag{52}$$

Die drei ersten Glieder dieses Systems sind frei von ϱ. Die beiden Gleichungen:

System von 2 gew. Diffgln. 1. O.

$$\frac{dx}{\beta_z - \gamma_y} = \frac{dy}{\gamma_x - \alpha_z} = \frac{dz}{\alpha_y - \beta_x} \tag{53}$$

wird man also zuerst integrieren. Hat man sie integriert, also zwei von einander unabhängige Integrale $u(x, y, z)$ und $v(x, y, z)$ gefunden, so eliminiert man etwa y und z vermöge

$$u(x, y, z) = a, \qquad v(x, y, z) = b$$

aus (52) und bestimmt dadurch $\frac{d\varrho}{dx}$ als Function von x und den beiden Constanten a, b. Hieraus findet man ϱ durch eine Quadratur als Function von x, a, b. Setzt man darin für a und b wieder u und v ein, so hat man die gesuchte Function ϱ von x, y, z in der Form gefunden:

$$\varrho = \omega(x, y, z) + \text{Const.} \tag{54}$$

Zur Integration des Systems (53) ist zu bemerken, dass wegen

$$\frac{\partial}{\partial x}(\beta_z - \gamma_y) + \frac{\partial}{\partial y}(\gamma_x - \alpha_z) + \frac{\partial}{\partial z}(\alpha_y - \beta_x) \equiv 0$$

Bekannter Multipl.

ein Multiplicator dieses Systems von vornherein bekannt ist, nämlich der *Multiplicator Eins.* Es ist also nur nötig, *ein* Integral u von (53) zn bestimmen. Das zweite, v, ergiebt sich dann nach der Multiplicatortheorie durch eine Quadratur. Der innere Grund hierfür liegt darin, dass die Integralflächen $\psi =$ Const. der Gleichung (50'), sobald sie integrabel ist, Parallelflächen sind.

Constr. d. Fln., deren Normalen einem geg. Compl. angehören.

Wegen der Bedeutung von x, y, z als Coordinaten des Bildpunktes der Geraden (49) findet man die Integralflächen $\psi =$ Const. in folgender Weise: Unter den ∞^2 Curven

$$u(x, y, z) = \text{Const.}, \qquad v(x, y, z) = \text{Const.}$$

greift man ∞^1 heraus. Sie bilden eine Fläche, nämlich die Fläche derjenigen Punkte (x, y, z), welche die Bildpunkte der Normalen einer der gesuchten Scharen von Parallelflächen $\psi =$ Const. sind. Diese Flächen $\psi =$ Const. bestimmt man folglich dadurch, dass man durch die Punkte (x, y, z) der soeben construierten Fläche die betreffenden Geraden (49) legt und auf ihnen von den Punkten (x, y, z) aus die Strecken

$$\varrho = \omega(x, y, z)$$

aufträgt. Die Endpunkte bilden eine der Flächen $\psi =$ Const., und die Parallelflächen zu dieser Fläche sind die übrigen Flächen $\psi =$ Const.

Dies ist im Wesentlichen die von Transon selbst gegebene Lösung des zu Anfang gestellten Problems, alle Flächen zu finden, deren Normalen einem gegebenen Liniencomplex angehören. Wie wir oben sahen, findet das Problem zunächst seinen analytischen Ausdruck in einer im Allgemeinen *nicht* linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung. Im Vorangehenden ist also das Integrationsproblem dieser Gleichung auf eine *lineare* partielle Differentialgleichung (51) zurückgeführt, und zwar auf eine Gleichung, deren Integrationsproblem erhebliche Vereinfachungen gestattet.

Reduct. auf lin. p. Diffgl.

Nunmehr wollen wir zeigen, wie Lie 1871 die Möglichkeit dieser Reduction auf ihren inneren Grund zurückführte*).

Ist

$$(55)\quad \Phi(ydz - zdy,\ zdx - xdz,\ xdy - ydx,\ dx,\ dy,\ dz) = 0$$

die Monge'sche Gleichung des vorgelegten Liniencomplexes (nach Satz 1, § 1 des 7. Kap., S. 254), so sind die Elementarkegel derjenigen partiellen Differentialgleichung, deren Integralflächen die gesuchten Flächen sind, diejenigen Kegel, die man erhält, wenn man zu den Mantellinien der Elementarkegel von (55) in den Kegelspitzen die senkrechten Flächenelemente construiert und deren umhüllende Kegel sucht. Ist (x, y, z, p, q) eines dieser Flächenelemente, so ist es also bestimmt durch die Forderung, dass es auf einer der durch (55) gegebenen Fortschreitungsrichtungen $(dx : dy : dz)$ des Punktes (x, y, z) senkrecht stehen soll, d. h. dass

$$dx : dy : dz = p : q : -1$$

sein soll. Da die Gleichung (55) homogen in dx, dy, dz ist, so werden diese Flächenelemente der Gleichung genügen:

$$\Phi(-y - zq,\ zp + x,\ xq - yp,\ p,\ q,\ -1) = 0.$$

Part. Diffgl. des Problems.

Da $xq - yp$ eine Function der übrigen hierin auftretenden Argumente ist, so ist einfacher

$$(56)\qquad F(p,\ q,\ x + zp,\ y + zq) = 0$$

die allgemeine Form dieser Gleichung.

Das Normalenproblem kommt also analytisch darauf hinaus, eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung von der Form (56) zu integrieren.

Wir bemerkten schon, dass, wenn eine Fläche dieser Gleichung (56) genügt, auch jede Parallelfläche von ihr eine Integralfläche von (56) ist. Diese Eigenschaft können wir mit Hülfe des Begriffes: *Dilatation im Raume* anders aussprechen.

---

*) Verhandl. d. Ges. d. Wiss. zu Christiania, 1871; Math. Ann. Bd. V.

Dilatation. Unter einer *Dilatation im Raume* verstehen wir eine Transformation der Flächenelemente, die jedes Element (x, y, z, p, q) in ein solches Element $(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1)$ verwandelt, dessen Punkt (x_1, y_1, z_1) auf der Normalen des ursprünglichen Elementes in einem constanten Abstand n liegt und dessen Ebene der Ebene des ursprünglichen Elementes parallel ist (vgl. § 2, S. 656). Es ist dies das Analogon der Dilatation in der Ebene (vgl. § 2 des 1. Kap., S. 14, sowie § 5 des 2. Kap., S. 58). Die Gleichungen der Dilatation sind offenbar die folgenden:

$$(57)\quad \begin{cases} x_1 = x + \dfrac{np}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad y_1 = y + \dfrac{nq}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad z_1 = z - \dfrac{n}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \\ p_1 = p, \quad q_1 = q. \end{cases}$$

Augenscheinlich *führt die Dilatation jede Fläche in eine Parallelfläche über.* Sie ist eben eine *Berührungstransformation* (vgl. § 2, S. 647), und dies kann man analytisch dadurch nachweisen, dass man zeigt, dass infolge von (57):

$$dz_1 - p_1\,dx_1 - q_1\,dy_1 = dz - p\,dx - q\,dy$$

ist. Sie verwandelt also nicht nur jede Fläche in eine Parallelfläche, sondern führt überhaupt jeden Elementverein in einen Elementverein über. In der That erkennt man sofort geometrisch, dass sie jede Curve — aufgefasst als Verein von ∞^2 Flächenelementen — in eine Röhrenfläche vom Radius n und jeden Punkt — aufgefasst als einen Verein von ∞^2 Flächenelementen — in eine Kugel vom Radius n verwandelt. Ferner führt sie jeden Elementstreifen in einen neuen Elementstreifen über, den man als den parallelen Elementstreifen im Abstande n bezeichnen kann.

Da mit jeder Integralfläche der partiellen Differentialgleichung (56) auch alle Parallelflächen dieser Gleichung genügen, so erhellt, dass die Dilatation (57) jede Integralfläche von (56) in eine Integralfläche überführt, anders ausgedrückt: *Die partielle Differentialgleichung* (56) *gestattet die Dilatation* (57). Analytisch geht dies zum Überfluss daraus hervor, dass nach (57):

$$p_1 = p, \quad q_1 = q, \quad x_1 + z_1 p_1 = x + zp, \quad y_1 + z_1 q = y + zq$$

ist.

Es giebt nun ∞^1 Dilatationen im Raume, da die Constante n beliebig gewählt werden kann. *Die partielle Differentialgleichung* (56) *gestattet also alle ∞^1 Dilatationen im Raume. Insbesondere gestattet sie*

Infin. Dilatat. *die infinitesimale Dilatation*, die sich ergiebt, wenn man n unendlich klein, gleich δt, wählt. Bei der infinitesimalen Dilatation erfahren x, y, z, p, q die Zuwüchse:

$$(58)\quad \begin{cases} \delta x = \dfrac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\,\delta t, \quad \delta y = \dfrac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\,\delta t, \quad \delta z = \dfrac{-1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\,\delta t, \\ \delta p = 0, \quad \delta q = 0. \end{cases}$$

Sucht man umgekehrt alle partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

welche die infinitesimale Dilatation gestatten, so hat man zu fordern, dass das Increment, das F bei der infinitesimalen Dilatation erfährt, nämlich

$$\delta F \equiv F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z + F_p \delta p + F_q \delta q,$$

infolge von $F = 0$ verschwinde. Es soll also nach (58):

$$p\frac{\partial F}{\partial x} + q\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

infolge von $F = 0$ verschwinden. Da die Coefficienten dieser Gleichung unmöglich infolge von $F = 0$ sämtlich verschwinden können, so muss also die letzte Gleichung an sich bestehen. Sie ist eine lineare partielle Differentialgleichung für F in fünf unabhängigen Veränderlichen x, y, z, p, q, und es sind

$$p, \quad q, \quad x + zp, \quad y + zq$$

vier von einander unabhängige Lösungen. Die allgemeine Lösung ist demnach eine beliebige Function von diesen vier. Somit ergiebt sich:

Eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung im Raume (x, y, z) gestattet dann und nur dann die infinitesimale Dilatation, wenn sie die Form hat: P. Diffgl., die bei inf. Dilat. inv. bleibt.

$$F(p,\ q,\ x + zp,\ y + zq) = 0.$$

Es ergiebt sich somit, *dass das Normalenproblem gerade und nur in denjenigen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung seinen Ausdruck findet, welche die infinitesimale Dilatation gestatten.*

Jeder der ∞^3 *charakteristischen Streifen* der partiellen Differentialgleichung

$$(56)\qquad F(p, q,\ x + zp,\ y + zq) = 0$$

wird durch eine Dilatation in einen Elementstreifen übergeführt, durch den ebenfalls unendlich viele Integralflächen gehen, also wieder in einen charakteristischen Streifen. Führen wir alle ∞^1 Dilatationen Dilat. auf d. char. Streifen ausgeführt.

(57) auf einen charakteristischen Streifen aus, so geht er somit in ∞^1 charakteristische Streifen über. Dieselben sind, wie wir sagen können, einander parallel, genau ausgesprochen: die Elemente jedes dieser ∞^1 Streifen haben dieselben Normalen wie die des gewählten Streifens und schneiden auf den Normalen eine constante Strecke n ab. Alle ∞^1 so erhaltenen charakteristischen Streifen haben also dieselben ∞^1 Normalen. Diese bilden eine *Regelfläche*, die dem gegebenen Liniencomplex angehört. Es giebt überhaupt zu jeder Regelfläche des Complexes ∞^1 Elementstreifen, deren Elemente die Geraden der Regelfläche zu Normalen haben, und es ist klar, dass die Dilatationen diese ∞^1 Streifen unter einander vertauschen. *Diese ∞^1 Streifen bilden mithin eine bei den Dilatationen invariante Schar.* Aber wohlbemerkt sind diese Streifen nicht sämtlich charakteristische Streifen von (56). Denn da es nur ∞^3 charakteristische Streifen von (56) giebt, so sind im Complex nur ∞^2 Regelflächen enthalten, deren Geraden die Normalen der Elemente von je ∞^1 charakteristischen Streifen sind.

Regelfl. des Complexes.

Inv. Schar von ∞^1 char. Streifen.

Kennt man diese ∞^2 ausgezeichneten Regelflächen des Complexes, so ist das Integrationsproblem im Wesentlichen gelöst, denn dann construiert man zunächst diejenigen ∞^1 Curven, die alle Erzeugenden einer Regelfläche orthogonal schneiden. Sie sind Charakteristiken, und die Elemente längs dieser Charakteristiken und senkrecht zu den Erzeugenden bilden die charakteristischen Streifen. Aus den charakteristischen Streifen kann man schliesslich in bekannter Weise die Integralflächen construieren.

Bestmmg. d. inv. Scharen.

Das Problem kommt also darauf hinaus, jene ∞^2 Regelflächen im Liniencomplex zu finden oder, was dasselbe besagt, jene bei allen Dilatationen invarianten ∞^2 Scharen von je ∞^1 parallelen charakteristischen Streifen zu bestimmen. Diese Scharen werden durch $F=0$ und zwei Gleichungen

$$U(x, y, z, p, q) = \text{Const.}, \quad V(x, y, z, p, q) = \text{Const.}$$

definiert sein, wobei die Functionen U und V von einander und von F unabhängig und nach § 4 des 12. Kap., S. 566,

$$[FU] = 0, \quad [FV] = 0$$

vermöge $F=0$ sein muss. Ferner muss die Schar der durch

$$F = 0, \quad U = a, \quad V = b \tag{59}$$

bei bestimmten Werten der Constanten a, b dargestellten ∞^1 charakteristischen Streifen insbesondere bei der infinitesimalen Dilatation (58) invariant sein. Bei Ausführung der infinitesimalen Dilatation bleibt

$F = 0$, wie wir wissen, invariant. U und V dagegen erfahren die Zuwüchse, die aus dem Ausdruck

$$Bf \equiv \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \frac{\partial f}{\partial z}$$

durch Substitution von U und V an Stelle von f und Multiplication mit δt hervorgehen. Es muss also

$$BU = 0, \quad BV = 0 \tag{60}$$

infolge des Systems (59) sein und zwar für alle Wertepaare der Constanten a, b. Es müssen mithin die Gleichungen (60) infolge von $F = 0$ allein bestehen.

Hiernach lassen sich U und V definieren als zwei von einander und von F unabhängige Functionen f, die den beiden Gleichungen

$$[Ff] = 0, \quad Bf = 0 \tag{61}$$

infolge von $F = 0$ genügen. Es sind dies zwei lineare homogene partielle Differentialgleichungen für f, und sie enthalten fünf unabhängige Veränderliche x, y, z, p, q. Sie werden durch $f \equiv F$ identisch erfüllt. Eine der Veränderlichen, etwa q, können wir vermöge $F = 0$ als Function von x, y, z, p ausdrücken. Dadurch reduciert sich das System (61) auf zwei homogene lineare partielle Differentialgleichungen für f mit *vier* unabhängigen Veränderlichen x, y, z, p. Da die Gleichungen nun *identisch* bestehen müssen, wenn in ihnen die von einander unabhängigen Functionen U und V, aus denen q vermöge $F = 0$ eliminiert ist, für f eingesetzt werden, so folgt, dass das System *mindestens* zwei von einander unabhängige Lösungen haben muss. Andererseits kann es *höchstens* $4 - 2$ oder also zwei von einander unabhängige Lösungen haben. Es ist daher ein zweigliedriges *vollständiges* System in vier Veränderlichen.

Wir können aber das Zurückgehen auf die Theorie derartiger Systeme vermeiden, wenn wir, wie früher geschehen, jede Gerade des vorgelegten Liniencomplexes auf einen Punkt (x, y, z) auf ihr beziehen. *Jeder Regelfläche des Complexes als einer Schar von ∞^1 Complexgeraden entspricht dann als Bild eine gewisse Curve auf ihr.* Kennen wir diese Bildcurve, so ist auch die Regelfläche bekannt. Den ∞^2 Regelflächen, deren jede nach dem obigen eine bei allen Dilatationen invariante Schar von ∞^1 charakteristischen Streifen vertritt, entsprechen gewisse ∞^2 Raumcurven. Diese ∞^2 Bildcurven genügen dem obigen System (53) von zwei simultanen gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung und sind die damals mit $u =$ Const., $v =$ Const. bezeichneten Curven.

∞^2 Bildcurven der Regelfln.

Die hier betrachteten partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung $F=0$ sind dadurch charakterisiert, dass sie bei einer gewissen infinitesimalen Berührungstransformation, nämlich bei der infinitesimalen Dilatation, invariant bleiben. Hieran knüpfen wir eine Bemerkung, die eine Verallgemeinerung der Betrachtungen im 1. Beispiel des § 2, 4. Kap., S. 96, ferner im 4. Beispiel daselbst, S. 100, und im 1. Beispiel des § 3, 4. Kap., S. 111, ist und hier nur in aller Kürze angedeutet werden soll: Wenn eine Berührungstransformation des Raumes so beschaffen ist, dass sie alle Paare von Elementen, die gleiche Normale, parallele Ebenen und constanten Abstand n von einander haben, in solche Paare von Elementen überführt, die ebenfalls gleiche Normale, parallele Ebenen und constanten Abstand n_1 von einander haben, so sagen wir kurz, *dass die Berührungstransformation die infinitesimale Dilatation invariant lässt.* Jede solche Berührungstransformation wird die bei der infinitesimalen Dilatation einzeln invarianten Gleichungen

Berührtrf., d. bei der inf. Dilat. inv. ist.

$$F(p, q, x + zp, y + zq) = 0$$

unter einander vertauschen. Es ist dies nur ein specieller Fall eines allgemeinen Satzes in Lie's Invariantentheorie der Berührungstransformationen, worauf wir hier nicht weiter eingehen. Fasst man nun die *Wellenbewegung in einem isotropen Medium,* die ja in der *Elasticitätstheorie,* insbesondere in der *Optik,* betrachtet wird, als eine eingliedrige Gruppe von Dilatationen auf und beachtet man, dass die Refractionen und Reflexionen solche Berührungstransformationen sind, bei denen die infinitesimale Dilatation invariant bleibt, so kommt man unmittelbar zu einer neuen Auffassung gewisser Sätze der Optik, die insofern Interesse darbietet, als sie zu Verallgemeinerungen längst bekannter Sätze führt. Wir kommen auf diese Betrachtungen, die von Lie seit Jahren in seinen Vorlesungen entwickelt und auch an verschiedenen Stellen in seinen gedruckten Arbeiten angedeutet worden sind, im zweiten Bande ausführlich zurück.

Berührtrfn. d. Optik.

Es liege nun wieder eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung von der Form

$$F(p, q, x + zp, y + zq) = 0 \tag{62}$$

vor, deren Integralflächen also definiert sind als diejenigen Flächen, deren Normalen einem gegebenen Liniencomplex angehören. Jede Integralfläche hat zwei *Centraflächen. Alle* diese Centraflächen genügen einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, die man folgendermassen findet: Die Normalen einer Integralfläche J von (62) sind Tangenten der beiden Centraflächen und zwar bestimmen sie auf beiden Centraflächen je ∞^1 *geodätische* Linien, deren Tangenten sie sind. Die Centraflächen sind also so beschaffen, dass sie je ∞^1 geodätische Linien enthalten, die zugleich Curven des vorgelegten Liniencomplexes sind. Wenn umgekehrt eine Fläche die Eigenschaft hat, dass ∞^1 geodätische Linien auf ihr Curven eines vorgelegten Liniencomplexes sind, so ist sie eine Centrafläche von ∞^1 Flächen, die alle ∞^2 Tangenten der geodätischen Linien zu Normalen haben, also von ∞^1 Flächen, deren Normalen dem vorgelegten Complex angehören.

Centrafln. d. Integralflächen.

Nun kann man erkennen, *dass alle Flächen, auf denen ∞^1 geodätische Linien Curven eines vorgelegten Liniencomplexes sind, einer par-*

tiellen Differentialgleichung erster Ordnung genügen. Zu diesem Zweck betrachten wir einen Complexkegel und legen durch jede Mantellinie die Tangentialebene T und darauf die zur Tangentialebene senkrechte Ebene E. Alle diese ∞^1 Ebenen umhüllen einen Kegel mit derselben Spitze. Hiermit ist jedem Punkte ein neuer Kegel zugeordnet. Wir fassen diese ∞^3 neuen Kegel als die Elementarkegel einer *partiellen Differentialgleichung erster Ordnung* auf. Auf jeder Integralfläche der letzteren liegen wie überhaupt auf jeder Fläche ∞^1 Curven γ des vorgelegten Complexes. In einem Punkte p einer dieser Curven γ ist die Tangentenebene der Fläche eine Ebene E, und sie steht senkrecht auf einer Tangentialebene T des ursprünglichen Complexkegels des Punktes p, die γ berührt. Die letztere Ebene ist nach Satz 21 des § 5, 7. Kap., S. 303, Schmiegungsebene von γ in p. Die ∞^1 Curven γ auf der Integralfläche der hergestellten partiellen Differentialgleichung haben mithin die Eigenschaft, dass ihre Schmiegungsebenen auf den jeweiligen Tangentenebenen der Integralfläche senkrecht stehen und sind demnach geodätische Curven der Integralfläche. P. Diffgl. 1. O. für diese Flächen.

Hiermit haben wir eine Kategorie von partiellen Differentialgleichungen gefunden, die auf jeder Integralfläche ∞^1 Curven eines vorgelegten Liniencomplexes zu geodätischen Linien haben.

Ist der Liniencomplex insbesondere *linear*, so ist sein Complexkegel in ein Büschel degeneriert. Der vorhin construierte neue Kegel ist daher ebenfalls ein Büschel, d. h. die betreffende partielle Differentialgleichung ist *linear*. Wie wir wissen, kann man alle Geraden eines linearen Complexes durch eine *infinitesimale Schraubung* in einander transformieren (nach § 3 des 6. Kap., S. 210). Daraus folgt, dass auch die gefundene lineare partielle Differentialgleichung diese infinitesimale Schraubung gestattet. Die Integralflächen sind also hier *Schraubenflächen.* Linearer Complex. Schraubenfln.

Andererseits sind alle Flächen, deren Normalen dem linearen Complex angehören, offenbar Schraubenflächen. Die soeben besprochenen Flächen müssen nach unserer allgemeinen Theorie ihre Centraflächen sein. In der That ist jede Centrafläche einer Schraubenfläche augenscheinlich wieder eine Schraubenfläche, welche durch dieselbe infinitesimale Schraubung in sich übergeht, wie die ursprüngliche Schraubenfläche.

Wir haben in diesem Kapitel eine Reihe von geometrischen Problemen behandelt, die ihren analytischen Ausdruck in gewissen besonderen Kategorien von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung Aufzählg. d. behandelten Probleme.

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

fanden. Es waren dies die folgenden Probleme:

1. Problem: Bestimmung der Differentialgleichungen $F = 0$, deren *Charakteristiken auf allen Integralflächen Haupttangentencurven* sind. Wir sahen in § 1, S. 642, dass diese partiellen Differentialgleichungen $F = 0$ der Bedingung:

$$(F_x + F_z p) F_p + (F_y + F_z q) F_q = 0$$

genügen, und haben alle derartigen Gleichungen $F = 0$ aufgestellt.

2. Problem: Bestimmung der Differentialgleichungen $F = 0$, deren *Charakteristiken auf allen Integralflächen Krümmungslinien* sind. Diese Gleichungen $F = 0$ erfüllen nach § 2, S. 657, die Bedingung:

$$(F_y + F_z q) F_p - (F_x + F_z p) F_q + (F_y p - F_x q + F_z pq)(F_p p + F_q q) = 0.$$

Auch alle derartigen Gleichungen $F = 0$ haben wir aufgestellt.

3. Problem: Bestimmung der Differentialgleichungen $F = 0$, deren *Charakteristiken auf allen Integralflächen geodätische Linien* sind. Diese Gleichungen $F = 0$ genügen nach § 3, S. 673, einer Bedingung für F, die auch die zweiten Ableitungen von F enthält. *Einige* hierhergehörige Kategorien von Gleichungen $F = 0$ haben wir aufgestellt.

4. Problem: Bestimmung der Differentialgleichungen $F = 0$, *deren Integralflächen zu Normalen lauter Geraden eines gegebenen Liniencomplexes haben.* Dies Problem deckt sich mit der sofort ausführbaren Integration der Gleichung:

$$pF_x + qF_y - F_z = 0.$$

5. Problem: Bestimmung der Differentialgleichungen $F = 0$, deren *Charakteristiken gerade Linien* sind. Wir sahen in § 1, S. 641, dass diese Differentialgleichungen $F = 0$ entweder den beiden Gleichungen

$$F_x + F_z p = 0, \quad F_y + F_z q = 0$$

genügen oder aber die linearen partiellen Differentialgleichungen sind, deren Charakteristiken ein Strahlensystem bilden. Auch diese Gleichungen $F = 0$ haben wir sämtlich bestimmt.

6. Problem: Bestimmung der Differentialgleichungen $F = 0$, deren Integralflächen ∞^1 geodätische Curven enthalten, die einem vorgelegten Liniencomplex angehören. Dies Problem wurde auf das vierte zurückgeführt.

Man sieht, dass die Probleme mit Ausnahme des *dritten* auf Gleichungen $F = 0$ führen, die solchen Bedingungen genügen, die partielle Differentialgleichungen *erster* Ordnung für F mit den *fünf* unabhängigen Veränderlichen x, y, z, p, q sind. Es gelang uns durch geometrische Betrachtungen, diese partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung in fünf unabhängigen Veränderlichen vollständig zu integrieren.

Weiterhin kann man je zwei der angegebenen sechs Probleme combinieren. So liefert das erste mit dem vierten combiniert das Problem, alle partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung **Andeutung weiterer Probleme.**

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

zu bestimmen, deren Charakteristiken auf allen Integralflächen Haupttangentencurven sind und deren Integralflächen zu Normalen lauter Geraden eines vorgelegten Liniencomplexes haben.

Es ist nun sehr beachtenswert, dass sich diese Probleme, die durch Combination je zweier der angegebenen Probleme hervorgehen, durch geometrische Betrachtungen vollständig lösen lassen. Äussere Rücksichten lassen es uns aber angebracht erscheinen, diese Probleme für den zweiten Band dieses Werkes zurückzustellen.

Sachregister.

Stehende Abkürzungen: Bertrf. = Berührungstransformation, C. = Curve, D. = Differentialgleichung, E. = Ebene, Ger. = Gerade, p. = partiell, R. = Raum.

A.

B.

C.

D.

E.

F.

O.

P.

Q.

R.

S.

T.

U.

V.

W.

Namenverzeichnis.

gebraucht wird, ist ausführlich von den ersten Elementen an entwickelt. Daher kann dies Werk dazu dienen, einerseits die Bedeutung der Gruppentheorie klar zu machen, andererseits das Eindringen in dieselbe in besonderem Mafse vorzubereiten.

Schliefslich mufs noch bemerkt werden, dafs durch zweckmäfsige Teilung des Stoffes dafür Sorge getragen ist, dem Anfänger zunächst die leichteren Partieen verständlich zu machen, indem schwierigere oder weiterführende Entwickelungen, die beim ersten Lesen überschlagen werden können, durch kleineren Druck gekennzeichnet wurden. Auch sind, wo es immer anging, zahlreiche Übungsbeispiele — rund 200 — eingeschaltet. Dafs das Werk auch Fachmännern mancherlei Interessantes darbietet, liegt schon in seiner eigenartigen Methode.

Lie, S., Theorie der Transformationsgruppen. Unter Mitwirkung von Dr. Friedrich Engel bearbeitet. In 3 Abschn. gr. 8. geh. n. ℳ 60. —

I. Abschnitt. [X u. 632 S.] 1888. n. ℳ 18.—. II. Abschnitt. [VIII u. 555 S.] 1890. n. ℳ 16.—. III. Abschnitt. [XXVII u. 831 S.] 1893. n. ℳ 26.—.

Abschnitt I: Galois und seine Nachfolger, besonders C. Jordan, haben die fundamentale Bedeutung des Begriffes einer diskontinuierlichen Gruppe für die Theorie der algebraischen Gleichungen in helles Licht gesetzt. Derselbe Begriff ist später von Dedekind für die Zahlentheorie und in den letzten Jahren namentlich von Klein, Poincaré und Picard mit grofsem Erfolge für die allgemeine Funktionentheorie verwertet worden.

Es giebt nun neben den diskontinuierlichen Gruppen noch andere Kategorieen von Gruppen, unter denen zunächst die endlichen kontinuierlichen Gruppen Beachtung verdienen, indem ihre Theorie für mehrere mathematische Disciplinen, insbesondere für die Theorie der Differentialgleichungen von grofser Bedeutung ist.

Das vorliegende Werk giebt eine ausführliche und systematische Darstellung von Lies vieljährigen Untersuchungen über diesen Gegenstand, welche bisher in vielen einzelnen, meist schwer zugänglichen Schriften niedergelegt worden sind.

Abschnitt II: Der zweite Abschnitt enthält die Theorie der Berührungstransformationen und der Gruppen von solchen Transformationen, er zerfällt in fünf Abteilungen: In den beiden ersten werden der Begriff und die Eigenschaften der Berührungstransformationen entwickelt, die dritte Abteilung handelt von den infinitesimalen Berührungstransformationen, die beiden letzten beschäftigen sich mit der Theorie der Gruppen von Berührungstransformationen.

In der ersten Abteilung ist überdies die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung entwickelt, soweit es für den Plan des Ganzen notwendig war.

Besonders mufs erwähnt werden, dafs die beiden ersten Abteilungen, welche beinahe die Hälfte des ganzen Bandes ausmachen, von den Entwickelungen des ersten Abschnitts ganz unabhängig sind und daher auch von solchen verstanden werden können, welchen der erste Abschnitt unbekannt ist.

Abschnitt III: Die beiden ersten Abschnitte enthalten die allgemeine Theorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen, der dritte Abschnitt bringt zunächst eine ganze Reihe von speziellen Untersuchungen über einzelne Kategorieen von Gruppen. Es werden da auf Grund der Entwickelungen des Abschnitts I alle endlichen kontinuierlichen Gruppen der Geraden und der Ebene aufgestellt, ferner alle projektiven Gruppen der Ebene. Von den endlichen kontinuierlichen Gruppen des Raumes werden wenigstens die wichtigsten bestimmt, und die Bestimmung der projektiven Gruppen des Raumes wird so weit gefördert, dafs man diese Gruppen ohne Schwierigkeit alle finden kann.

Hieran schliefsen sich Untersuchungen über gewisse Klassen von Gruppen im Raume von n Dimensionen, z. B. über die Gruppen, die für die Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie von Wichtigkeit sind. Ferner enthalten einige Kapitel auch allgemeine Entwickelungen über die endlichen kontinuierlichen Gruppen, z. B. wird die Theorie der Bestimmung aller r-gliedrigen Gruppen von gegebener Zusammensetzung vervollständigt.

Eine ziemlich ausgedehnte Abteilung ist den Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie gewidmet. Das von Riemann gestellte und von ihm und von Herrn von Helmholtz behandelte Problem wird gruppentheoretisch formuliert und mit Hilfe der Methoden der Gruppentheorie erledigt. Diese Untersuchungen sind an und für sich schon für jeden Mathematiker von dem höchsten Interesse, überdies sind sie sehr lehrreich, da sie die Macht der Gruppentheorie in besonders deutlicher Weise erkennen lassen und zeigen, dafs man ohne die Methoden der Gruppentheorie sehr leicht wesentlichen Irrtümern ausgesetzt ist.

Die letzte Abteilung beleuchtet die Fundamentalsätze der Gruppentheorie von einem höheren Standpunkte aus und bringt sie in Zusammenhang mit allgemeineren Theoremen, zum Beispiel wird die Tragweite der Jacobischen Identität festgestellt. Das Schlufskapitel dieser Abteilung enthält einen Bericht über die neueren Untersuchungen, die von andrer Seite an Lies Arbeiten anknüpfend über die endlichen kontinuierlichen Gruppen angestellt worden sind.

Dieses Werk giebt eine fast vollständige Darstellung von Lies aus den Jahren 1870 bis 1884 herrührenden abstrakten Untersuchungen über die Theorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen. Dagegen war es nicht möglich, auch seine Untersuchungen über unendliche kontinuierliche Gruppen und seine zahlreichen Anwendungen auf Differentialgleichungen und Geometrie mit aufzunehmen.

Seit dem Jahre 1883 haben eine Reihe französischer Mathematiker, nämlich die Herren: Picard, Poincaré, Vessiot, de Tannenberg, Tresse schöne Anwendungen von Lies Gruppentheorie u. a. auf lineare Differentialgleichungen und auf die Theorie der komplexen Einheiten gemacht. Ebenso stehen die wichtigen, von Laguerre (1879), Halphen (1880—1883), Darboux, Liouville, Appel, Goursat, Painlevé, Autonne, Elliot, Riverau etc. herrührenden Untersuchungen über Differentialinvarianten in genaustem Zusammenhange mit Lies (1872—1884) Invariantentheorie der endlichen und unendlichen Gruppen. Es haben andererseits seit dem Jahre 1885 eine grofse Anzahl englischer Mathematiker versucht, den schon von Lie stark betonten Zusammenhang seiner Invariantentheorie mit der alten Cayleyschen Invariantentheorie durch viele, leider gröfstenteils triviale Beispiele zu illustrieren. Ungleich wichtiger sind die seit dem Jahre 1884 von den deutschen Mathematikern: Engel, Killing, Study, Maurer, Schur, Scheffers, Werner, Umlauf und Knothe, sowie von den Herren Page und v. Zorawski ausgeführten gruppentheoretischen Untersuchungen.

Da Lies ältere Untersuchungen an sich ein vollständiges Lehrgebäude bilden, war es unnötig die Ergebnisse der neueren Untersuchungen zu verwerten. Doch wird das Verständnis und die Würdigung derselben durch die systematische Darstellung dieses Werkes im höchsten Mafse erleichtert.